Thema Nr. 3

Gliederungspunkte

1) a) Erforderliche Begriffe
   b) Satzgruppe des Pythagoras

2) Unterrichtliche Zugangsweisen
   a) Knotenschur
   b) Geobrett
   c) Einheitsquadrate
   d) Messen und Nachrechnen
   e) Geometriesoftware
   f) Wiegen
   g) Diskussion

3) a) Pythagorassatz in der Hauptschule
   b) Fach
   c) Didaktische Analyse
   d) Lernziele
   e) Unterrichtsentwurf
   f) Resumee

4) a) Beweis Satz des Pythagoras
   b) Beweis Umkehrung

2 Nr. 1a) Erforderliche Begriffe

Zur Erläuterung der Satzgruppe des Pythagoras bedarf es einiger elementarer Begriffe, die im Folgenden kurz dargestellt werden.

- Dreieck

  Eine geschlossene ebene Figur, die von 3 Geraden begrenzt wird, nennt man Dreieck.

- Rechtwinkliges Dreieck

  Ein Dreieck mit einem rechten Winkel nennt man rechtwinkliges Dreieck.

- Rechter Winkel

  Schneiden sich zwei Geraden so, dass vier kongruente Winkel entstehen, nennt man die Winkel rechte Winkel.
  Die Winkelgröße beträgt $\frac{1}{4}$ des Vollwinkels (360°), also 90°.

- Hypotenuse

  In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die Seite, die dem 90° Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse

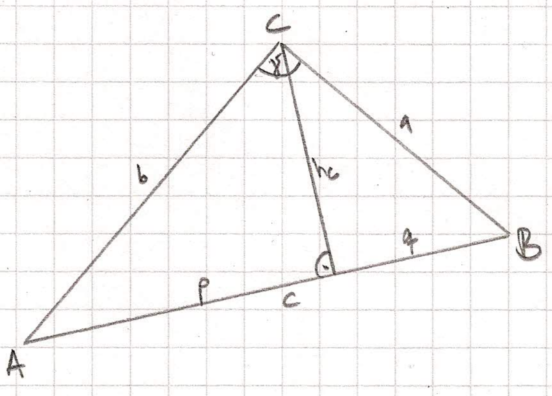
- Kathete

  In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die zwei Seiten, die dem 90° Winkel anliegen Katheten.

- Hypotenusenabschnitte

  Fällt man in einem rechtwinkligen Dreieck vom Scheitelpunkt des rechten Winkels aus das Lot auf die Gegenseite (Höhe), so teilt das Lot die Hypotenuse in 2 Hypotenusenabschnitte.

- Zeichnung zur Veranschaulichung



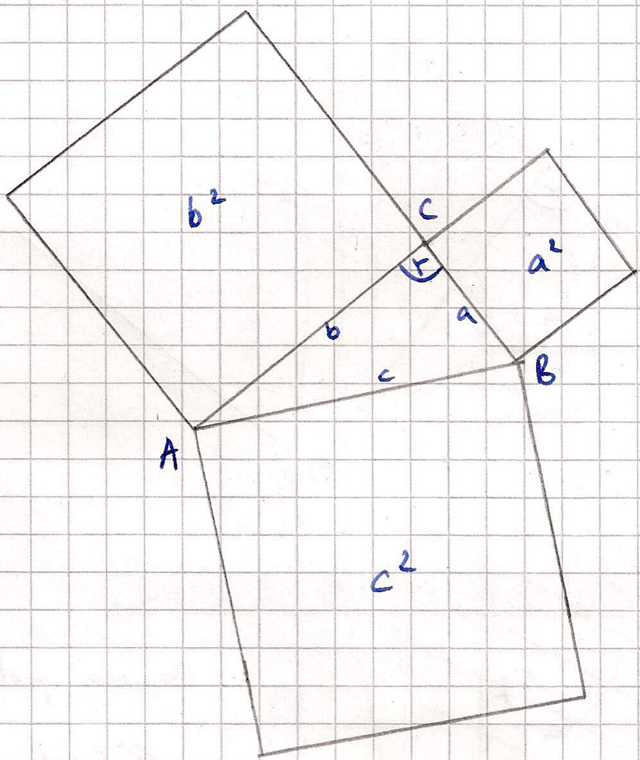
Nr. 1b) Satzgruppe des Pythagoras

Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Quadrate über den beiden Katheten flächengleich dem Quadrat über der Hypotenuse.

Sind also c Hypotenuse, a und b Katheten und $\gamma = 90°$ dann gilt:

$a^2 + b^2 = c^2$



Umkehrung

Sind in einem Dreieck die Quadrate über zwei Seiten flächengleich zum Quadrat über der dritten Seite, also $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist der Winkel gegenüber der längsten Seite ein rechter Winkel, also $\gamma = 90°$.

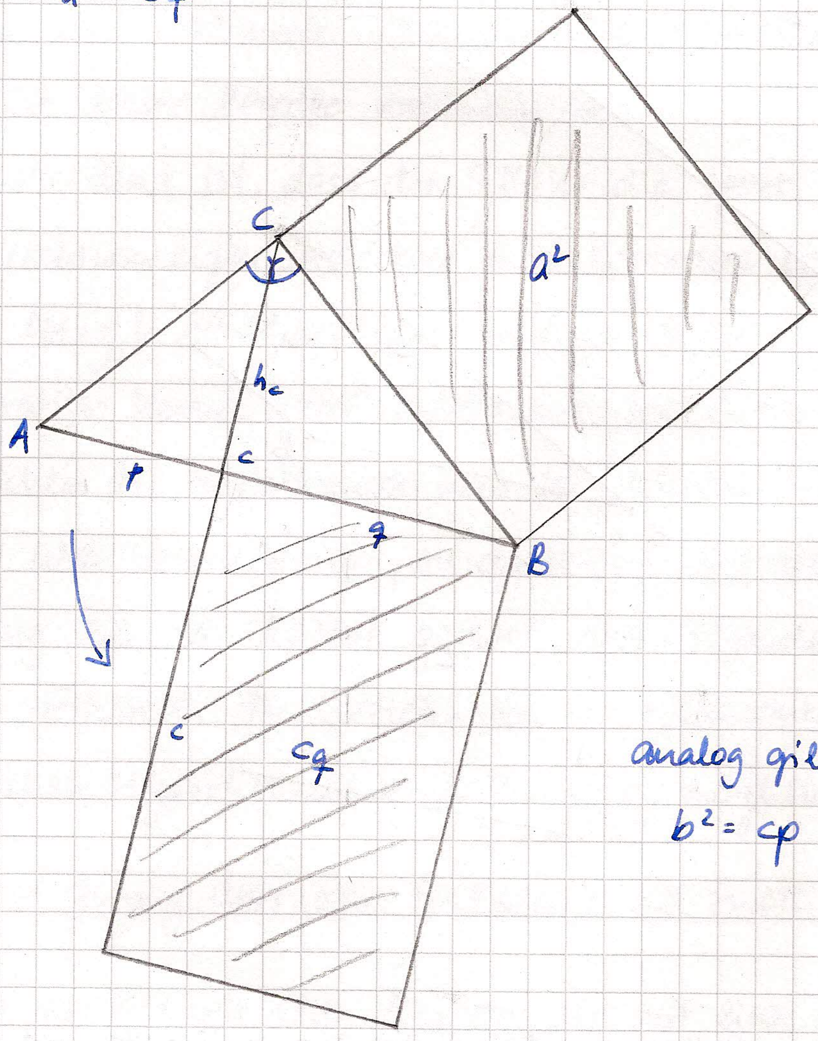
Es gilt $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \gamma = 90°$

Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Sind also a Kathete, c Hypotenuse und p,q Hypotenusenabschnitte gilt:

$a^2 = cq$



analog gilt:

$b^2 = cp$

Umkehrung

Ist in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite flächengleich dem Rechteck aus einer anderen Seite und dem anliegenden Abschnitt, der durch das Einzeichnen der Höhe entsteht, dann ist in dem Punkt, von dem aus die Höhe gezeichnet wurde ein rechter Winkel.

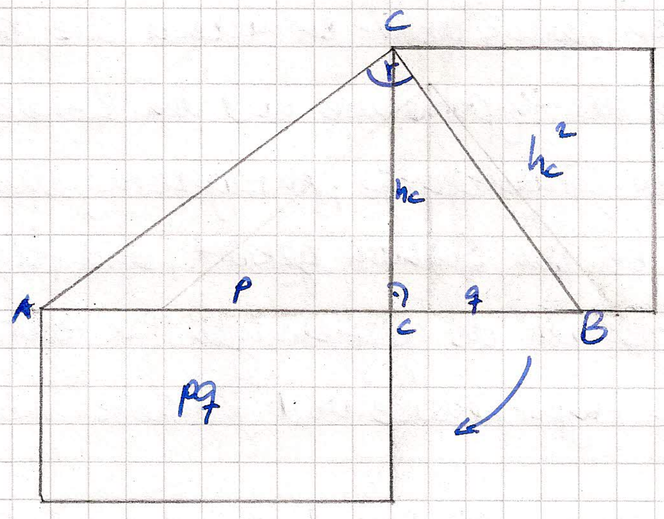
Es gilt: $a^2 = cq \Rightarrow \gamma = 90°$

Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe, die die Hypotenuse in ihre Hypotenusenabschnitte teilt, flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

Sind also h_c Höhe, c Hypothenuse, p und q Hypotenusenabschnitte, dann gilt:

$$h_c^2 = pq$$



Umkehrung

Ist in einem Dreieck das Quadrat über einer Höhe flächengleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten, die durch die Höhe auf einer Seite entstehen, dann ist bei dem Punkt, von dem aus die Höhe gezeichnet wurde, ein rechter Winkel.

Es gilt: $h_c^2 = pq \Rightarrow \gamma = 90°$

6

Nr. 2 Unterrichtliche Zugangsweisen

Um einen unterrichtlichen Zugang zum Satz des Pythagoras herzustellen bedarf es einiges Vorarbeit. So muss sichergestellt werden, dass die elementaren Grundbegriffe zum Dreieck, rechten Winkel usw. von den Schülern beherrscht werden und auch eine adäquate Vorstellung der fachmathematischen Aspekte dieser Begriffe vorhanden ist.
Entscheidend ist, dass die Schüler die ~~spezi~~ Sonderstellung von rechtwinkligen Dreiecken, ihre besondere Bedeutung für den Alltag & Beruf erkennen und am besten aus intrinsischer Motivation heraus aktiv-entdeckend die besondere Beziehung zwischen der Hypothenuse und den Katheten erkennen.
Sind also Grundbegriffe, Alltagsbezug und die naive Vorstellung bei den Schülern geklärt, sind folgende Zugänge zum Erkennen der Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck zwischen Hypothenuse und Kathete möglich.

Nr. 2a) • Zugang über eine Maßschnur mit zwölf Knoten

Über ein Bild von alten Ägyptern, die mit einer Knotenschnur auf einer Baustelle einen rechten Winkel messen, soll von den Schülern selbst die Idee kommen, dies auch auszuprobieren.
Die Schüler bekommen Schnüre, die sie mit Knoten in zwölf gleiche Teile teilen sollen. Dann sollen sie rechte Winkel im Klassenzimmer messen, wobei die Eckpunkte immer direkt bei einem Knoten sein sollen. Es fällt ~~auch~~ auf, dass dabei immer die Aufteilung 5, 4 und 3 Knoten herauskommt. Die Frage nach dem Zusammenhang wird aufgeworfen.

Nr. 2b) • <u>Zugang über Nachmessen auf Geobrett</u>

Die Schüler sollen auf einem Geobrett möglichst viele rechtwinklige Dreiecke herstellen und die Länge von Hypothenuse und Kathete nachmessen und in eine Tabelle auflisten. Die Frage nach dem Zusammenhang von Hypotenuse und Kathete müsste aufkommen.

Nr. 2c) • <u>Zugang über Auslegen der Quadrate mit Einheitsquadraten</u>

Die Schüler sollen die Quadrate über Hypotenuse und Katheten eines passenden rechtwinkligen Dreieck mit passenden Einheitsquadraten auslegen und die Anzahl der Einheitsquadrate vergleichen. Zusammenhang müsste durch Abzählen klar werden.

Nr. 2d) • <u>Zugang über messen und nachrechnen</u>

Nachdem die Vermutung $a^2+b^2=c^2$ im rechtwinkligen Dreieck aufgekommen ist, sollen die Schüler diese Vermutung anhand von mehreren beliebigen rechtwinkligen Dreiecken rechnerisch nachprüfen. Daraus wird der Zusammenhang eindeutig klar.

Nr. 2e) • <u>Zugang über dynamische Geometriesoftware</u>

Über Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks und markieren der Flächen ~~in~~ der Quadrate über den Dreiecksseiten wird beim dynamischen Verändern ~~be~~ einzelner Dreieckspunkte bei gleichbleibenden rechten Winkel der Zusammenhang sehr klar.

Nr. 2f) • <u>Zugang über wiegen</u>

~~A~~ Aus Pappe ausgeschnittene Quadratsflächen eines rechtwinkligen Dreiecks werden gewogen und verglichen.

Nr. 2g, Diskussion der Zugänge

Es ist sehr schwierig konkrete Aussagen über die Effizienz der verschiedenen Zugänge zu treffen, da diese individuell vom Schüler abhängig sein dürfte. Da es verschiedene Lerntypen unter den Schülern gibt ist es wichtig einen ~~mögli~~ möglichst ganzheitlichen Weg zu finden. Die enaktiven Zugänge über Nachmessen, Auslegen und Wiegen dürften eher kinästhetischen Lerntypen zu Gute kommen. Die Zugänge ~~d~~ Nachrechnen, Tabelle und die Formel ist eher etwas für kognitive Lerntypen.
Wichtig ist, dass alle möglichen Zugänge behandelt werden und aus einer enaktiven über eine ~~sym~~ ikonische ~~zu~~ hin zu einer symbolischen Darstellungsform die Schüler die Möglichkeit haben aus der Anschauung die Berechnungsformel möglichst selbsttätig und operativ zu entwickeln.

Nr. 3a, Satz des Pythagoras in der Hauptschule

Der Satz des Pythagoras hat als eine elementare Erkenntnis der Geometrie ~~ihren P~~ seinen Platz in der 9. Klasse der Hauptschule. Aus der immensen Wichtigkeit für vorallem den beruflichen Alltag in Vielerlei Berufen ergibt sich die hohe Relevanz für die Hauptschule.

Nr. 3b Fachmathematische Analyse

Die fachmathematische Analyse ergibt sich aus Aufgabe 1 und ~~5~~ 4 dazu gehören sämtliche Begriffe sowie Definition, Umkehrung und Beweise.

3c, Didaktische Analyse

Zur Unterrichtseinheit zur Anwendung des Satzes des Pythagoras im Raum ist vorauszusetzen, dass der Satz des Pythagoras in vorherigen Stunden bereits erarbeitet und auch bereits in der Ebene angewendet wurde. So kann man voraussetzen, dass die Formel bereits von den Schülern beherrscht wird und eine adäquate Anschauung in der Ebene bereits besteht. Außerdem ~~ha~~ ist bei den Schülern die ~~Fag~~ Fähigkeit einen 90° Winkel in der Ebene zu messen vorhanden. So dient vorliegende Übungsstunde vor allem dem operativen und mechanischen Üben im Hinblick auf eine räumliche Vorstellung des Sachverhalts.
Die Lerngruppe ist eine neunte Klasse eines bayerischen Hauptschule.

3d, Lernziele

- Die Schüler den Satz des Pythagoras im Raum anwenden können
- Die Schüler sollen rechte Winkel im Raum erkennen.
- Die Schüler sollen rechte Winkel im Raum messen können
- Die Schüler sollen den Satz des Pythagoras ~~at~~ anhand eines Körpers rechnerisch anwenden können.

3e, Unterrichtsentwurf

Phase / Zeit	L-S-Aktivitäten	Sozialform / Medien
Kopfgeometrie ca. 5 Min	• L legt Folie mit Bsp. Fachwerkhäusern auf, S sollen rechten Winkel suchen. Wenn keine rechten Winkel durch Schüler mehr auffindbar legt L zweite Folie drüber, ~~so dass~~ in der sämtliche rechte Winkel ~~auf~~ ~~die~~ von erster Folie hervorgehoben werden.	L-S Gespräch, OHP, Folie
Rückgriff auf vorige Stunde 10 Min.	• Hausaufgaben zum Satz des Pythagoras in der Ebene werden verbessert. fertige Folie zu HA Auf ~~??~~ Fehler der S. wird durch L eingegangen • Wiederholung Satz des Pythagoras	L-S-Gespräch, Heft, ~~Tafel~~ OHP

Phase / Zeit	L-S-Aktivitäten	Sozialform / Medien
~~Erarbeitung~~	• S sollen mit einem ~~Drei~~ Geodreieck rechte Winkel im Klassenzimmer finden.	
	• Beim Anlegen des Geodreiecks z.B in der Ecke fällt auf, das es unglaublich viele Möglichkeiten gibt das Geodreieck in einem rechten Winkel anzulegen.	
Stundenthema ~~Zielangabe~~ 10 Min.	• Frage nach Anwendung im Raum kommt auf → Tafelanschrift "Pythagoras im Raum"	
	• L zeigt Kantenmodell eines Quaders	
	• ~~L~~ S sollen Schrägbild eines Quaders ins Heft zeichnen. Maße und Winkel wird von L vorgegeben.	
Aufgabenstellung 2-3 Min.	• Aufgabe (Folie) Seitenlängen des Quaders sind gegeben. Kannst Du mit Hilfe des Satz von Pythagoras ~~die~~ die Diagonale im Raum berechnen? Sammle zusammen mit deinem Banknachbarn Lösungsideen.	Partnerarbeit, OHP
	• L sammelt Lösungsideen an der Tafel	Tafel
	• ~~L und S bearbeiten gemeinsam entwickelnd Aufgabe~~	L-S-Gespräch
Aufgabenbearbeitung 10-15 Min.	• L und S bearbeiten gemeinsam entwickelnd Aufgabe, durch Berechnen der Grundflächendiagonale und daraus der Raumdiagonale über den Satz des Pythagoras im Raum.	Tafel
	• L und S vergleichen Lösungsweg mit Lösungsideen an der Tafel und identifizieren falsche und richtige Ideen.	
Generalisierung 5 Min.	• Frage nach weiteren Berechnungsmöglichkeiten über den Satz des Pythagoras im Raum und Lebensweltbezug (Alltag, Beruf)	
	• Hausaufgabenstellung Schüler sollen Seitenlängen eines Kegels mit Hilfe des Radius und der Körperhöhe berechnen.	

Nr. 3f) Resümee

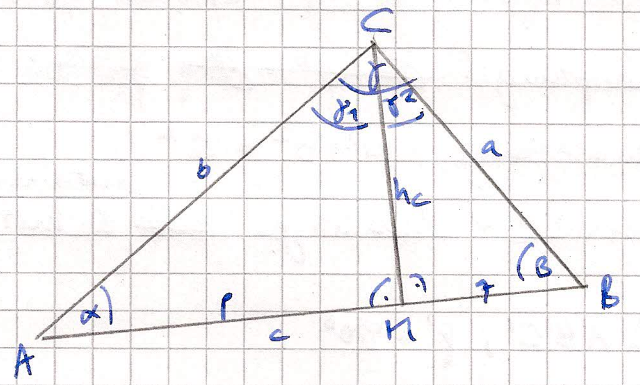
Der Satz des Pythagoras wird in vorliegender Unterrichtsstunde im Raum angewendet. Kernstück der Anwendung ist die Bearbeitung eines Aufgabe, die sehr ~~An~~ anschaulich die Möglichkeiten des Pythagorassatzes im Raum aufzeigt. Die Sozialform ist eher Lehrerzentriert, so dass der Lehrer direkt auf Fehlvorstellungen der Schüler eingehen kann.

Nr. 4a) Beweis Satz des Pythagoras

Behauptung: ~~Wenn $\gamma > 90°$, dann~~ $a^2 + b^2 = c^2$ in Dreieck

Voraussetzung: $\gamma = 90°$

Lösungsidee: Ähnlichkeit Teildreiecke AHC, HBC



~~AHC ~ ABC~~

1) $\alpha + \gamma^1 + 90° = 180°$ (Innenwinkelsumme Dreieck)

2) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (")

3) $\beta + \gamma^2 + 90° = 180°$ (")

$\Rightarrow$ 3) in 2) $\quad \alpha - \gamma^2 + 90° = 90° \quad | -90° - \gamma^2$

$\underline{\alpha = \gamma^2}$

$\Rightarrow$ 1) in 2) $\quad \beta - \gamma^1 + 90° = 90° \quad | -90° + \gamma^1$

$\underline{\beta = \gamma^1}$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ACM \sim \Delta CBM$

I) $\Delta ABC \sim \Delta ACM \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{p}{b} \Rightarrow b^2 = cp$ (Kathetensatz)

II) $\Delta ABC \sim \Delta CBM \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{q}{a} \Rightarrow a^2 = cq$ (Kathetensatz)

$\Delta ACM \sim \Delta CBM \Rightarrow \frac{h_c}{p} = \frac{q}{h_c} \Rightarrow h_c^2 = pq$ (Höhensatz)

I + II $\Rightarrow a^2 + b^2 = cp + cq$

$a^2 + b^2 = c(p+q) \quad | \; (p+q) = c$

$\underline{a^2 + b^2 = c^2}$ q.e.d.

Nr. 4b) <u>Beweis Umkehrung</u>

Umkehrung ~~der~~ Satz des Pythagoras

Wenn in einem Dreieck gilt $a^2+b^2=c^2$, dann besitzt das Dreieck bei C einen rechten Winkel.

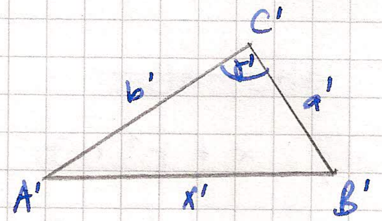
Behauptung: ~~$a^2+b^2=c^2$~~ $\gamma = 90°$

Voraussetzung: $a^2+b^2=c^2$

Beweisidee: Beliebiges ~~recht~~ rechtwinkliges Δ mit $a'^2+b'^2=x'^2$ $A'B'C'$

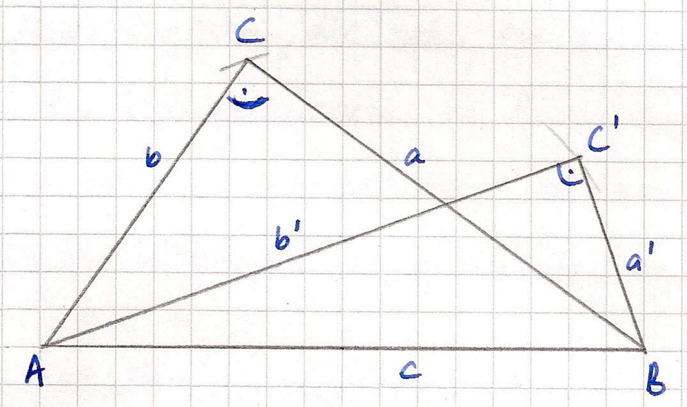
1) $\Delta A'B'C'$, $\gamma' = 90°$

$\Rightarrow$ für alle ~~beliebigen~~ möglichen x' ist $a'^2+b'^2=x'^2$ bei $\gamma' = 90°$



$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow$ gilt in einem Dreieck $a^2+b^2=c^2$ dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.



Thalessatz: Liegt ~~C an~~ der Punkt C eines Dreiecks auf dem ~~Halbg~~ Halbkreis über $\overline{AB}$, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel

$\Rightarrow$ rechnerischer Beweis: für alle möglichen a und b ~~liegt~~ gilt $a^2+b^2=c^2$