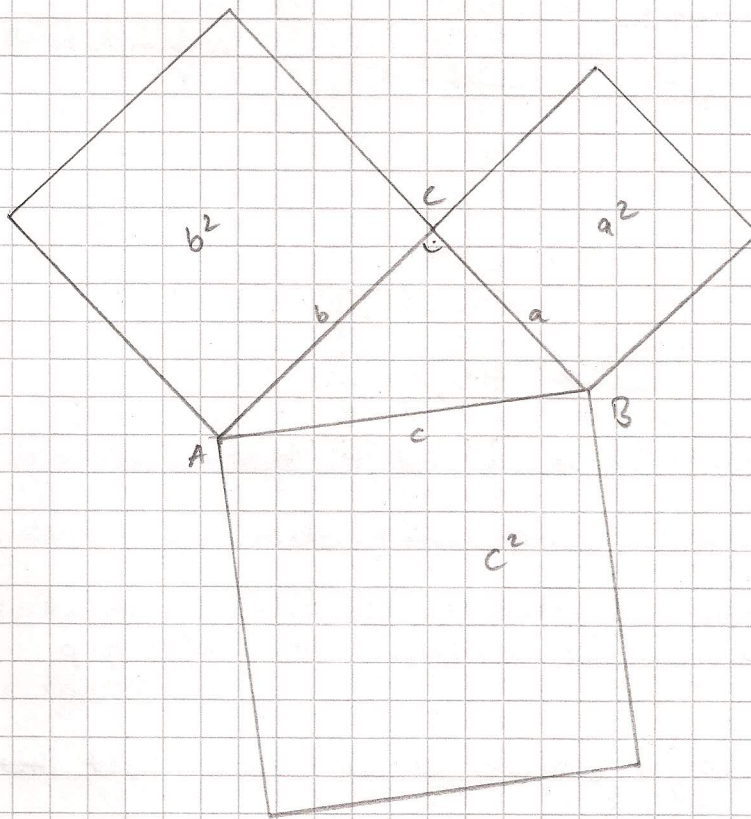


- ① Für nachstehende Ausführungen soll folgende Zeichnung und Begriffe verwendet werden.



> Der Satz des Pythagoras:

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten, gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypothenuse.

Mit Bezeichnung der oben gezeichnet Skizze gilt für das

Dreieck ABC : $a^2 + b^2 = c^2$

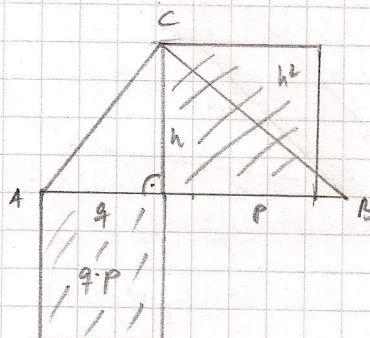
Voraussetzung der rechte Winkel an C.

Begriffe in diesem Zusammenhang:

- rechter Winkel = sind an einer Geradenkreuzung alle vier Winkel gleich groß, so spricht man von vier rechten Winkeln. Das Winkelmaß beträgt 90°

(*)

> der Höhensatz



Mit Bezeichnungen der Abbildung gilt: $h^2 = q \cdot p$

Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt ~~des~~ des Quadrats über der Höhe auf der Hypotenuse, gleich dem Flächeninhalt der beiden Hypotenusenabschnitte.

Die Höhe im rechtwinkligen Dreieck ABC teilt die Hypotenuse in zwei Abschnitte p und q.

(*)

- Flächeninhalt = Bezeichnung $F(S)$ einer Figur für die folgenden Axiome zählen:

1. Positivität: $F(S) > 0$

2. Additivität: $F(S) \cap F(X) = \emptyset \rightarrow F(S \cup X) = F(S) + F(X)$

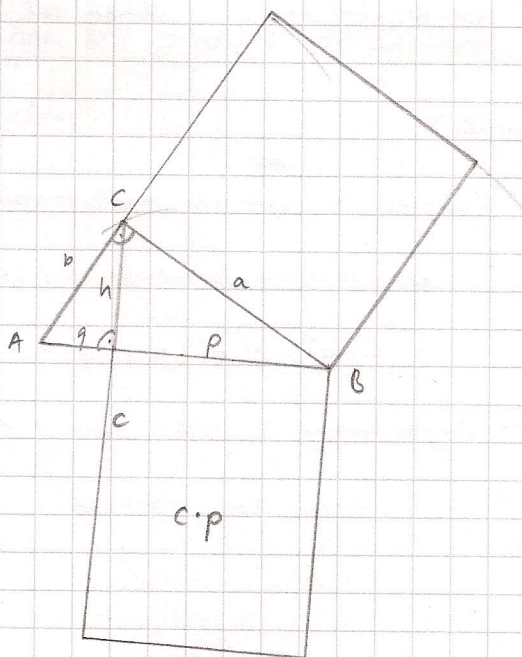
→ Fortsetzung S. 18

> der Kathetensatz

3

Mit den Bezeichnungen:

$$a^2 = c \cdot p$$



Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über einer Kathete, gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks des angrenzenden Hypotenusenabschnitts und der Hypotenuse

> Die Umkehrung der Sätze:

Satz d. Pythagoras: Ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich dem Produkt der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten, dann ist ein Dreieck rechtwinklig.

Höhensatz: Ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Höhe gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte, dann ist das Dreieck rechtwinklig

Kathetensatz: Ist der Flächeninhalt des Quadrates über einer Kathete gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks

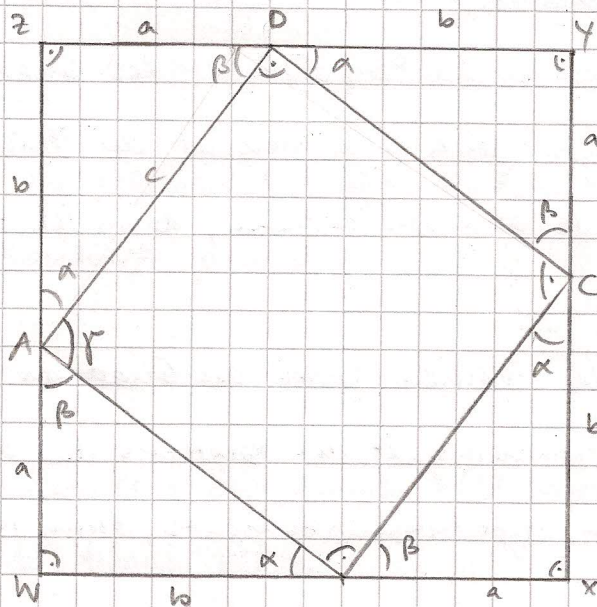
des angrenzenden Hypothenusenabschnitts ~~mit~~ multipliziert mit der Hypothense, dann ist das Dreieck rechtwinklig

Begriffe:

- Kathete = ~~die im rechtwinkligen Dreieck~~ der Schenkel des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck, d.h. es gibt zwei Katheten
- Hypotenuse = die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite im Dreieck

④ > Beweis d. Satzes von Pythagoras

Vorüberlegung: Konstruktion eines Quadrates mit den Seitenlängen der Summe aus den Katheten (für Abb auf Seite 1: $a+b$)



- (1) $\square WXYZ$ ist Quadrat mit Seitenlänge $a+b$ (Idee)
- (2) Flächeninhalt $F_{WXYZ} = (a+b)^2$ (1)
- (3) $\triangle ADZ$ ist rechtwinklig (1)
- (4) $\triangle ADZ \sim \triangle AWR \sim \triangle BXC \sim \triangle CYD$ (3), (1), (SWS-Satz)
- (5) $\square ABCD$ ist Raute (4) (entspr. Seiten im $\triangle$ kongr. Dreiecken haben die gleiche Länge)
- (6) Im Dreieck ADZ gilt: $\alpha + \beta = 90^\circ$ (3), (Winkelsumme im Dreieck)
- (7) $\gamma = 90^\circ$ (4), (6) (gestreckter Winkel)
 $\rightarrow$ analog Winkel $\angle ADC$, $\angle DCB$, $\angle CBA$
- (8) $\square ABCD$ ist Quadrat (7), (5)
- (9) Flächeninhalt $F_{WXYZ} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab\right) + c^2$
 mit (2): $(a+b)^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab\right) + c^2$
 $a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab\right) + c^2$
 $\underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$

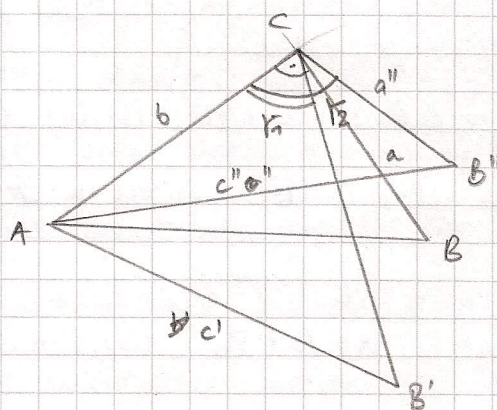
> Umkehrung:

Vorüberlegung: bewiesen soll die Umkehrung mit dem Gedanken, dass gezeigt wird das Dreieck nicht rechtwinklig ist. Somit würden sich zwei Fälle ergeben: ~~Wahrheit~~

$\gamma > 90^\circ$, ~~Falsch~~ $\gamma < 90^\circ$ (vgl. Seite 6)

Man setzt die Flächenformel des Pythagoras voraus und versucht zu zeigen, dass es auch für nicht-rechtwinklige Dreiecke gilt.

Voraussetzung in diesen Fällen:



1. Fall $\gamma_1 < 90^\circ$

2. Fall $\gamma_2 > 90^\circ$

Beweis 1. Fall: (1) $a^2 + b^2 = c^2$ (mit $\gamma = 90^\circ$)

(2) $\gamma_1 < 90^\circ$ (Vor.)

(3) $\alpha + \beta > 90^\circ$ (2) (Winkelsumme im Dreieck)

(4) ~~Winkelsumme~~ $a'^2 + b'^2 > c'^2$ (3) (2)

↳ Voraussetzung

Beweis 2. Fall: (1) $a^2 + b^2 = c^2$ (mit $\gamma = 90^\circ$)

(2) $\gamma_2 > 90^\circ$ (Vor.)

(3) $\alpha + \beta < 90^\circ$ (2) (Winkelsumme im Dreieck)

(4) $a'^2 + b'^2 < c'^2$

↳ Voraussetzung

→ Nur mit einem Winkel $\gamma = 90^\circ$ funktionieren die Flächenverhältnisse der Quadrate. Bei Abweichungen gelangt man zu Ungleichungen.

② Unterrichtsliche Zugänge:

- Beispieldreiecke, an denen die S jeweils Seiten messen sollen, die Ergebnisse in eine Tabelle der Form:

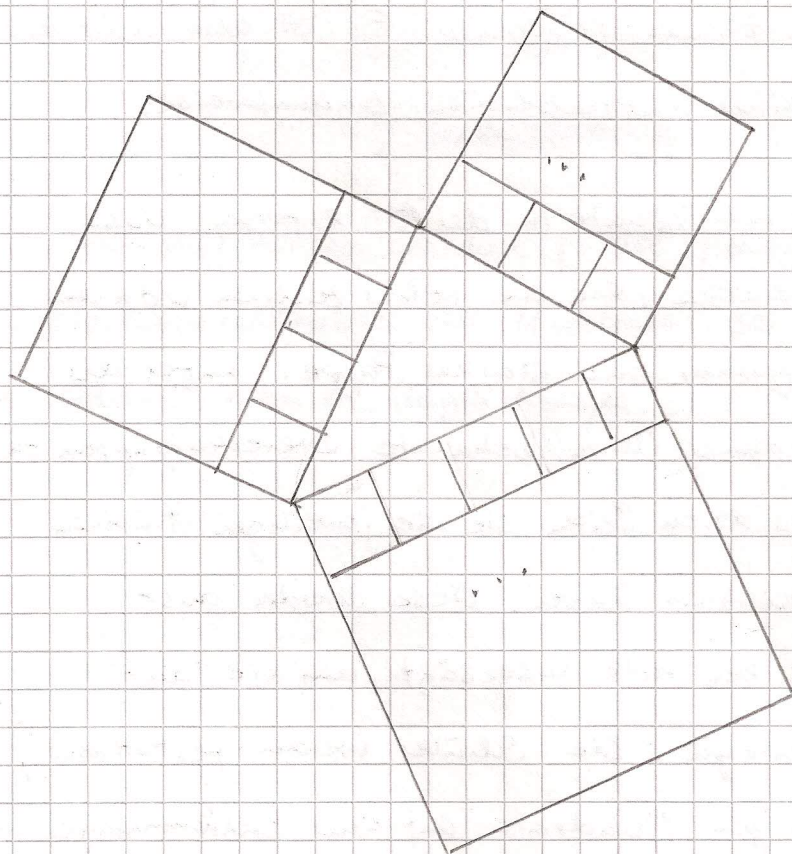
a	b	c	a ²	b ²	c ²	a ² +b ²

übertragen und die jeweils vorgegebenen Spalten errechnen sollen. Die Möglichkeit ist sicherlich gut geeignet um bei S die Kontinua und das Genaue abmessen in Abbildungen und Zeichnungen zu erweitern, sowie die Einübung in strukturiertes, übersichtliches Arbeiten durch Verwenden von Tabellen. Dennoch wird das explorative Lernen, das verstehende Lernen oder das selbsttätige Erkennen und Erfahren der ~~g~~ Gegebenheiten nicht geweckt oder gefördert. Den S wird im Schema vorgegeben, das es auszufüllen gilt. Ein Zusammenhang wird nur aus Zahlen ersichtlich. Es ist also nicht der ideale Weg einer unterrichtlichen Zugangsweise.

- Ein zweiter Zugang könnte in der Art erfolgen, dass die S Beispieldreiecke, die sie selber zeichnen können auf bspw Moosgummi oder starker Pappe. unter der Angabe verschiedener ihnen bekannte Dreiecksgruppen zu verwenden, über deren Seiten sie die jeweiligen Flächen (Quadrate) zu zeichnen haben. Diese werden ausgeschnitten oder bei Holz ausgesägt, um sie anschließend zu wiegen. Die Schüler werden feststellen, dass die jeweiligen Quadrate auf einer Balkenwaage im

Gleichgewicht sind, wenn die Quadrate der Katheten auf der einen Seite und das Quadrat der Hypotenuse auf der anderen Seite liegen. Zudem werden sie die Besonderheit feststellen, dass es nur bei rechtwinkligen Dreiecken der Fall ist. Diese Methode als enaktive Fähigkeit lässt die S durch selber zeichnen, ausschneiden und das tätige Answiegen entdeckend am Satz des Pythagoras herankommen. Die Schüler werden für dieses Vorgehen viel Zeit benötigen, eine Ausstattung der Schule mit Balkenwaage und bspw Sägen ist notwendig. Die Materialkosten sind zu beachten. Dennoch ist der Ertrag, das Verstehen der S durch Selbsttätigkeit vorhanden.

- Ein weiterer Zugang für die S ist der Weg über bereits Bekanntes und Bewährtes: das Anlegen mit Einheitsquadraten. Auch hierbei können die S selbsttätig werden,

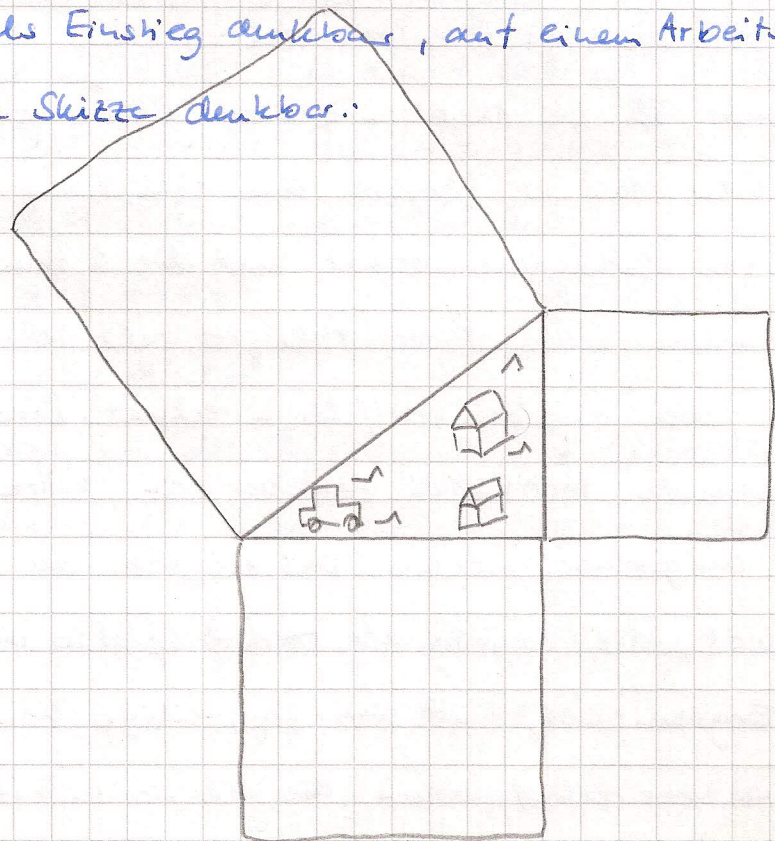


es baut auf Vorerfahrungen auf und das Ergebnis ist für den Spezialfall Pythagoras sichtbar. Durch Abzählen der Quadrate in den Flächeninhalten wird der Zusammenhang sichtbar, der für nicht-rechtwinklige Dreiecke eben nicht gilt. Grundlagen des Abzählens und des Addierens werden keine großartige Differenzierung verlangen, es sollte für alle S der Klasse verständlich und leicht nachzuvollziehen sein. Die S können erst selbst aktiv werden, unterschiedliche Ergebnisse zeigen dann den Allgemeinen Fall die Allgemeingültigkeit des Falls "rechtwinkliges Dreieck" an. Eine abschließende Zusammenfassung kann über Overheadfolie schnell und gut visualisiert werden.

- ein weiterer Zugang: der L kann provokativ der Klasse vorstellen, dass er bei rechtwinkligen Dreiecken kinderleicht, ~~er~~ bei Angaben zweier Seiten berechnen, die Dritte kann. Oder dass er ~~vorgibt~~ die Gleichung des Satzes von Pythagoras vorgibt und die S ihm das Gegenteil beweisen sollen. Erster Fall ist sehr lehrerzentriert, die S geben Angaben vor, der L rechnet. Dies könnte als ängstliche Motivation denkbar sein, sollte aber nicht zu weit aufgeblasen werden. Das Vorgehen der zweiten Möglichkeit, die Vorgabe der Formel (= also des eigentlichen Ergebnisses) und der gegenseitige Beweisen ist nur dann vorstellbar, wenn die Klasse in der Arbeit und in dem Vorgehen geübt ist. Meines Erachtens in eher wenigen Fällen in den Hauptschulen der Fall.

Vorstellbar wäre bei einer Einführungsstunde zur Winkelsumme im Dreieck, wo der Klasse der Arbeitsauftrag gegeben wird, ein möglichst Dreieck zu konstruieren, das die größtmögliche Innenwinkelsumme hat.

- Ein für mich am besten geeigneter Vorschlag ist, dass auf die Realität der S oder ihrer Vorstellungskraft aus dem Alltag aufgebaut wird. Verpackt wird die Situation in eine Geschichte. Zum Beispiel bekommen zwei Söhne Ländereien vererbt. Die Grundstücke um die es geht liegen um das nicht-keibare Grundstück auf dem Hof, Stall, Scheune etc stehen. Die drei Ländereien sind zu bewirtschaften und jeder soll die gleiche Fläche zum Anbau zur Verfügung haben. Ein Bild eines amerikanischen Farm oder eines kaysischen Bauernhofs wäre als Einstieg denkbar, auf einem Arbeitsblatt ist folgende Skizze denkbar:



Im Schreiben über das Erbe liegt die Bitte um gerechte Aufteilung. Nach der Skizze wäre nicht der erste Gedanke der Schüler eines das Große, der andere die beiden unbedingt sofort zu erwarten. Eher ist mit dem Vorschlag zu rechnen, dass alle drei Felder jeweils geteilt werden...

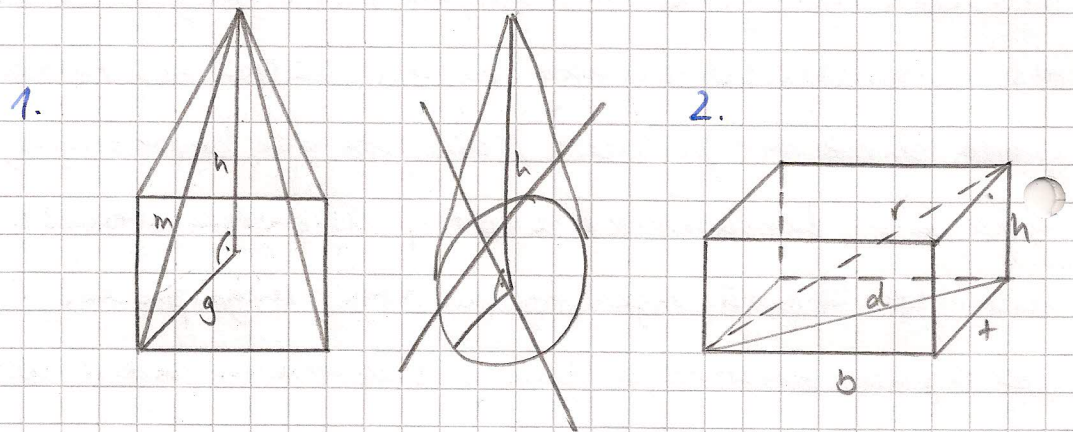
Eine weitere Ausführung der Einführungsstunde zum Satz des Pythagoras wird an der Stelle abgebrochen.

Als unterrichtlicher Zugang zu den Sätzen des Pythagoras wäre diese Möglichkeit, die von mir bevorzugte, da hier Lebenswirklichkeit, Vorstellungsvermögen und das selbständige Problemlösen angesprochen wird. Der eigene, selbsttätige Zugang zum Problem selbst durchdacht werden kann, um nachvollziehbar zur Lösung zu gelangen.

③. Auf Basis der eben unter 2. aufgeführter unterschiedlicher Zugangsweise über Realbezug, Vorstellungsvermögen und selbstentdeckendes Lernen wird der Unterrichtseinheit entworfen.

Die Anwendung des Satzes des Pythagoras setzt die Kenntnisse und das Anwenden des Satzes voraus:

Ergänzend zur Sachanalyse in Nr. 1 werden zwei Skizzen zur Vorstellung im Raum gegeben:



Die Anwendung des Satzes von Pythagoras findet auch im Raum seine Gültigkeit: In dem 1. Fall $m^2 = g^2 + h^2$

im zweiten Fall kann die Raumdiagonale über Breite b , Tiefe t und Höhe h berechnet werden:

$$(1) \quad d^2 = b^2 + t^2$$

$$(2) \quad r^2 = d^2 + h^2$$

Mit Bezeichnungen der Skizze wobei d Diagonale der Grundfläche und r Diagonale des Raumes, des Körpers.

Didaktische Überlegungen: gut zur Vorstellung von Strecken oder Verbindungen im Raum eignen sich Schulkartons oder ein altes Aquarium. Mit Wollfäden als Verbindungen lassen sich räumliche Vorstellungskraft der S. schulen.

Auch bei der Unterrichtseinheit wird ein Beispiel der Realität verwendet, so dass die S merken, dass mathematische Gegebenheit ihre Anwendung im Leben finden und im Begründung für die Situation liefern.

Im Unterrichtsbeispiel wird eine Situation geliefert, in der sich die S der Problematik des Aufstellen eines unzerlegbaren Schrankes im Raum annehmen müssen.

Die Maße des Schrankes machen ein Aufstellen unmöglich, das bleibt jedoch den S vorzuenthalten und soll von ihnen entdeckt und begründet werden.

Lernvoraussetzungen: Dazu ist es unabdingbar, dass die Klasse die Satzgruppe des Pythagoras neben dem kennen, auch Anwenden kann. Eine Vorstellung von räumlichen Gegebenheiten, der Kenntnis ^{sind} von und Unterscheidung von Körpern ist als weitere Voraussetzungen zu unterstellen.

In der Unterrichtseinheit handelt es sich um das ~~An~~ Erkennen und das Anwenden bereits gesicherten Lernstoffs, eine Verallgemeinerung des erarbeiteten Stoffes ist nicht notwendig, es handelt sich nicht um eine Einführung, sondern das Anwenden eines mathematischen Gesetzes in einem Beispiel, Aufgabe mit mathem. Rechnung.

Lernziel ist somit das Erkennen und Anwenden des Satzes von Pythagoras an Körpern (Großziel)

S sollen an Körpern den Satz des Pythagoras erkennen und anwenden.

- Feinziele:
- S sollen räumliches Vorstellen üben
 - S sollen ~~Pythagoras~~ Dreiecke klassifizieren um auf Satz des Pythagoras zu gelangen
 - S sollen

Unterrichtseinheit:

Als Motivation bzw. Hinführung zum Thema wird nach der eingehenden Kopfrechenphase, ein Bild eines antiken Schrankes präsentiert. Medium: Folie od Bild

Die Kopfrechenphase zur Vervollständigung, gilt als warm-up und aktiviert die S für den Mathematikunterricht.

- an Dreiecken die nicht dem Standard $a^2 + b^2 = c^2$ bzw der Bezeichnung ABC entsprechen, werden die Beziehungen der Satzgruppe wiederholt, in dem die S entspr. Verhältnisse formulieren sollen.
- da bei Pythagorasberechnungen quadrieren und Wurzel ziehen an der Tagesordnung ist, können Rechenaufgaben der Art 8 zum Quadrat, 12^2 , Wurzel aus 121 usw erfolgen (jeweils im L-S-Antw Frage - Antwort - Gespräch)

Mit Präsentation des Bildes erklärt L im Problem der Stellung sein Anliegen einen antiken Schrank kaufen zu wollen.

Er habe diesen im Internet gefunden, wisse ihn in 300 km Entfernung holen, um ihn in seinem Haus aufzustellen. Dazu braucht er helfende Hände, die ihm beim Transport, beim Tragen und Aufstellen unterstützen, da er nicht mehrmals alleine gehen kann, da der Schrank nicht zu zerlegen sei. Im L-S-Gespräch werden Freiwillige gesucht, die ggf mit einem kleinen Stundenlohn

gehört werden können. Im Verlauf des Gesprächs erwartet man Fragen aus der Klasse über den Transport und das wie, ob es denn überhaupt möglich ist den Schrank aufzustellen, wohin er getragen werden muss und so weiter.

Der L gibt Arbeitsblatt aus, auf dem neben der Situationsdarstellung auch Maße des Schrankes gegeben sind.

Die Überschrift des AB stimmt mit der an der Tafel überein, die präsentiert wird.

AB

Können wir einen Schrank im Raum aufstellen?

1. Diskutiere in GA über mögliche Situation: - Situationsbeschreibung - Der Schrank hat die Maße $h = 220 \text{ cm}$, $b = 90 \text{ cm}$, $t = 70 \text{ cm}$. Das Zimmer ist $2,30 \text{ m}$ hoch.
 Platz für Deine Überlegungen



2. Berechne ob der Schrank aufgestellt werden kann
 - Welche Angaben werden benötigt
 - Wie löse ich das Problem

3. Berechnung

← Untertüberschrift frei und wird abschließend mit vervollständigt
 "Die Anwendung des Satzes von Pythagoras an Körpern"

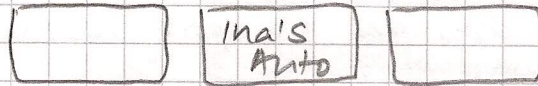
← erst Überlegungen verschriftlichen

← Berechnen über math. Weg

Zur Differenzierung wird aufgeführt

4. Findest Du keinen Berechnungsweg, kannst Du Dir am Pult Ideen holen (vgl. Skizze S. 16)

5. Für Schnelle: Löse folgende Situation:



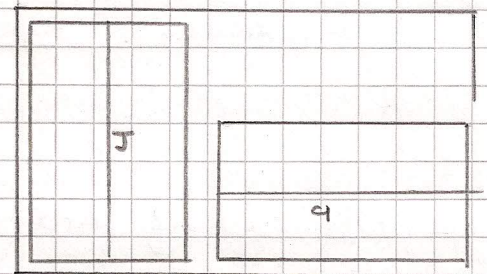
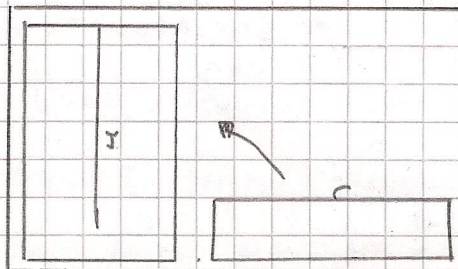
Ina kommt mit ihrem Freund zu ihrem Auto zurück.
Sie sagt ihm, dass sie niemals da ausparken kann.
Ihr Freund, der noch nicht Autofahren kann, sagt ihr dass er es sogar berechnen kann und ihr beweist, dass es möglich ist.

Du misst die Länge von Ina's Auto und die Abstände zum vorderen / hinteren PKW...

Auch hier geht der Weg über die Diagonale des Autos. Einen Fall wählen, bei dem es nicht möglich ist, den anderen so wählen, dass er formuliert werden kann: „Wäre es möglich, wenn der Abstand zum hinteren Auto... beträgt“

Ideen am Pult:

Folgende Skizzen helfen Dir weiter:



→ also auch keinen vorgegebenen Weg, sondern nur Skizzen die den S auf die Sprünge helfen...

Die beiden Skizzen sind auch die erwarteten Schülerantworten, die in der anschließenden Vorstellung im Raum erläutert werden.

Dazu die Berechnungen: über die Diagonalen, da sie längste Verbindung des Korpus sind.

Beim Aufstellen über Bodenseite:

$$h = 220 \text{ cm}, t = 70 \text{ cm}$$

$$d = h^2 + t^2$$

$$d = 230,87 \text{ cm}$$



keine Lösung

Bei Aufstellen Eckseite:

$$h = 220 \text{ cm}, b = 90 \text{ cm}$$

$$d = h^2 + b^2$$

$$d = 237,7 \text{ cm}$$



keine Lösung

Natürlich wird festgestellt, dass es nicht möglich ist, den Schrank im Zimmer aufzustellen und es sehr ärgerlich wäre, hätte er den Schrank geholt und kann ihn nicht aufstellen. Wichtig ist aber ebenso, dass die Schüler für zu beiden Lösungsmöglichkeiten gelangen.

Dies findet über die Ergebnissicherung im Heft statt. Die Überschrift an der Tafel: "Können wir den Schrank..."

wird ergänzt mit dem Satz Seite 15 neben AB.

Die beiden Skizzen werden als Arbeitsblatt verteilt, mit der Bitte um Ausschneiden und einheften zum Thema.

Darunter werden die beiden Berechnungen erläutert.

Die Hausaufgabe der Stunde ist die Situation

"Iha's Auto" zu lösen, da nun auch alle S Pythagoras in Körpern erkennen und Berechnungen, d.h. Anwenden können, durchführen können i

Zur weiteren Vorstellung des Schrankaufstellens kann ein Schrankkasten als Zimmer präsentiert werden, der in Art einer Theatersbühne (ohne vordere Seitenwand) ~~mit~~ ^{mit} Playmobilmännchen inkl eines Schrankes zum darstellen herangezogen werden kann (hepthischer Ansatz)

Im Nachgang bedarf es noch einer Reflexion der Stunde.

zu Seite 2:

3. Invarianz

4. Normiertheit: Für das Quadrat mit Flächeninhalt $F(\delta) = 1$, ist die Seitenlänge $l = 1$
