Thema Nr. 3

(1.) Erläutern Sie die Sätze der Satzgruppe des Pythagoras und die dafür erforderlichen Begriffe! Gegen Sie dabei auch auf die Umkehrungen der Sätze ein!

Der Satz des Pythagoras, benannt nach seinem griechischen Entdecker / Formulierer, bezieht sich auf die geometrische Form des Dreiecks, wenn es einen rechten Winkel enthält. Dieses Dreieck hat drei Seiten, die zur Formulierung und Bestimmung des Satzes des Pythagoras eine bestimmte Bezeichnung erhalten. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite bezeichnet man Hypothenuse, während die beiden Seiten rechts und links des rechten Winkels Gegenkathete und Ankathete genannt werden - oder einfach beide "nur" als Katheten. So ordnet man diesem Dreieck nicht einfach die Seiten "a", "b" und "c" nach ihrer jeweiligen dargestellten Lage, sondern benennt die Hypothenuse immer mit "c" und die beiden Katheten entsprechend mit "a" und "b". Des Weiteren wird die Höhe "h" des Dreiecks immer senkrecht auf der Hypothenuse "c" konstruiert, welche wiederum die

Seite "c" in die Strecke q und p teilt,
da nun in das ursprüngliche Rechtwinklige Dreieck zwei weitere rechtwinklige Dreiecke ~~entstand~~ "konstruiert" wurden. (Rechtwinklig deshalb, weil die Höhe senkrecht auf der Hypothenuse steht und dadurch zu beiden Seiten / Dreiecken ~~ein~~ je ein rechter Winkel entstanden ist.)
Der Grieche Pythagoras hat nun - durch Probieren und Rechnen - herausgefunden, dass das Quadrat der Hypothenuse der Summe der Katheten jeweils im Quadrat entspricht, also gleich ist.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$

Formuliert man die Gleichung um, so kann man den Satz des Pythagoras für "a" ist gleich.. und b ist gleich... anwenden.
Spricht man aber von Pythagoras, dann meint man immer die Sätze der Satzgruppe, denn die Höhe und die beiden Strecken "q und p", welche die Hypothenuse bilden sind ebenfalls in (~~jedem~~ allen) Dreiecken enthalten und folgendermaßen formuliert:

Höhensatz : $h^2 = p \cdot q$

Kathetensatz : $a^2 = c \cdot p$

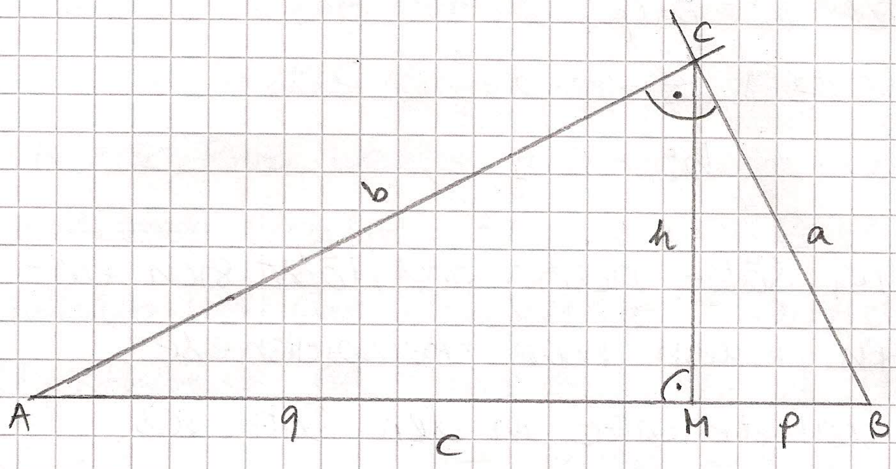
$b^2 = c \cdot q$

Ob diese drei Sätze richtig sind, lässt sich einfach beweisen, indem man beispielsweise die beiden Kathetensätze in den Satz des Pythagoras einsetzt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{I}$$
$$a^2 = c \cdot p \quad \text{II}$$
$$b^2 = c \cdot q \quad \text{III}$$
$$\Rightarrow \text{II} + \text{III} \text{ in } \text{I}$$
$$c \cdot p + c \cdot q = c^2$$
$$c \cdot (p+q) = c^2 \quad | : c$$
$$\underline{p+q = c} \quad \text{q.e.d.}$$

(≙ was zu beweisen war)

Als Ergebnis erhält man eine wahre Aussage, den die Hypothenuse "c" wird durch die Höhe "h" in "p" und "q" aufgeteilt, d.h. die Länge der Strecke "p" plus (+) die Länge der Strecke "q" ergibt (=) "c".
Um das ganze anschaulich zu zeigen, wird im Folgenden ein rechtwinkliges Dreieck mit ~~einen~~ den Bezeichnungen konstruiert.



Stimmt der Höhensatz!

$h^2 = a^2 - p^2$ ($\sphericalangle$ CMB)

$h^2 = b^2 - q^2$

gleichsetzen

$a^2 - p^2 = b^2 - q^2$

$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$

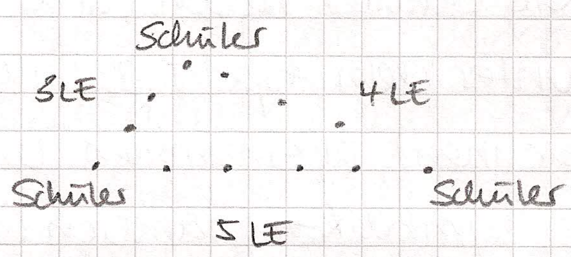
$a^2 - b^2 =$

2. Diskutieren Sie verschiedene unterrichtliche Zugangsweisen zum Satz des Pythagoras!

Damit man den Schülern der 9. Klasse Hauptschule die Satzgruppe des Pythagoras zugänglich machen kann, muss zuvor das Dreieck mit der Bezeichnung und Benennung wiederholt werden; genauso auch ~~der~~ das wichtige Element des Themas, nämlich der rechte Winkel bzw. 90 Grad Winkel. Die Eigenschaften der rechtwinkligen Dreiecke haben die Schüler bereits in den vergangenen Jahrgangsstufen durchgenommen, dennoch ist es unumgänglich als Vorstufe des Pythagoras die Vorzüge solches Dreiecke noch einmal zu wiederholen. Psychologisch gesehen sind die Jugendlichen in der 9. Klasse in der Lage komplexe Zusammenhänge zu erkennen und zu verstehen. Ferner wird ~~ther~~ innen mit diesem Thema aufgezeigt, dass Mathematik aufeinander aufbaut und vorher gelerntes wieder gebraucht wird, um damit neue Sachverhalte in erweitester Form zu lesen und zu beantworten. Die ~~Psy~~ pädagogische Analyse begründet ~~der~~ die Behandlung des Themas damit, dass ~~das~~ es im Lehrplan ~~verankert ist~~ der 9. Jahrgangsstufe verankert ist und sie darüberhinaus auf das Problem lösen im künftigen Leben als selbständiges Bürger vorbereiten soll. Sowohl im Alltag (unhandliche Gegenstände in Paket verpacken [siehe Aufg. 3.] als auch im Berufsleben ~~mit~~ treffen die Schüler bereits oder bald auf Schwierigkeiten, die mit dem Wissen der Formel des Pythagoras gelöst werden können.

Für die Zugangsweisen wählt man zunächst bekannte Formen und Flächen, die sie in einem anderen Zusammenhang kennen gelernt haben, nun aber neu entdecken und ihr Wissen nicht auf eine Sache beschränken, sondern offen für neue, aber richtige Sichtweisen sind. z.B. Dreiecke. An Vierecken, Rechtecken, Quadraten, sowie Quader, Würfel und auch Kegel werden sie enaktiv ~~an~~ herausgefordert, rechtwinklige Dreiecke zu finden. Als Hilfsmittel dient ein Geodreieck. Die Tatsache, dass nun auch der Satz des Pythagoras in jedem Dreieck mit 90°-Winkel gilt zeigt man ihnen am Besten, ~~mit~~ indem man die Formel mit dem sogenannten 12 Knoten-Seil herleitet.

Die Schüler sind hierbei aktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligt, indem sie das lange, mit 12 Knoten vorbereitete Seil im Plenum halten (3 Schüler) und ein ~~Q~~ Dreieck damit bilden. Das Schema soll zeigen, wie es funktioniert

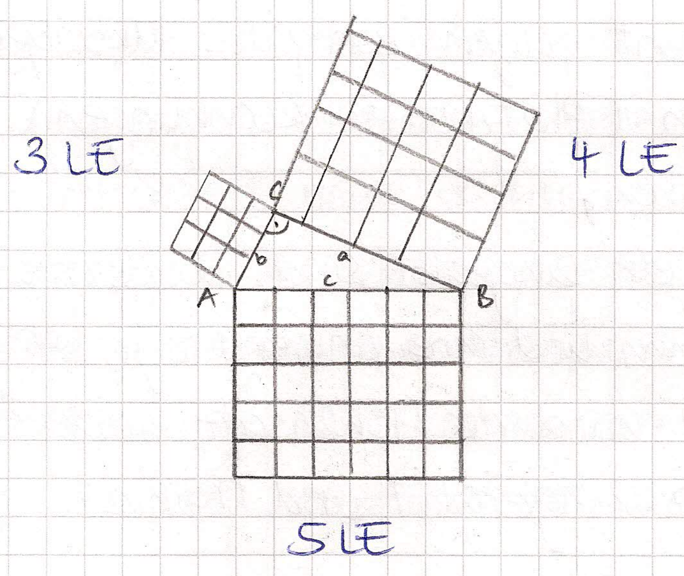


$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$

Eine weitere Möglichkeit wäre, ihnen zu veranschaulichen, dass die Quadratefläche des jeweiligen Seiten, die dem rechten Winkel angeschlossen sind, gleich der Quadratfläche der Seite, die dem rechten Winkel gegenüber-liegt.

Veranschaulichung (~~Sk~~ Skizze)



mittels Rechnung bzw. ~~übers~~ wenn man die Kästchen nachzählt ist die Behauptung des vorangegang Versuchs mit dem 12 Knoten-seil belegt. Die Schüler haben diese Skizze in ihr Heft unter dem Aspekt des ikonischen Handlung (zeichnen) übernommen und sind nun für die symboli~~sch~~, nämlich die Rechnung bereit.

Behauptung:
die beiden kurzen/kleinen Seiten/Flächen seien genau so groß/lang als die des dem rechten Winkel gegenüberliegende Fläche/Seite.

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 5 \cdot 5$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$
$$b^2 + a^2 = c^2$$

Als nächsters Schritt folgen ein paar Übungen in x-Gleichungen (Platzhalter-Rechnungen) oder Sachaufgaben.
Sobald die Regeln eingeübt sind, umformuliert werden können und ihre Anwendung gefunden haben, wird der Höhensatz und der Kathetensatz eingeführt und trainiert.

3. ~~Wenn~~ Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zur Anwendung des Satzes des Pythagoras im Raum.

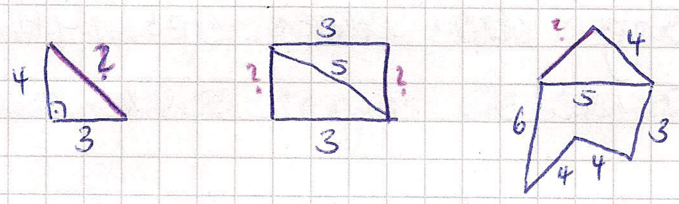
~~8~~ Wenn das Rechnen mit der Thematik in der Fläche eingeübt ~~ist~~ und allen Schülern verständlich ist, so dass sie kognitiv in der Lage sind den Satz des ~~Pythagog~~ Pythagoras anzuwenden, könnte die folgende Unterrichtseinheit in Form einer Doppelstunde zum Einsatz kommen. Hierfür werden die einzelnen Unterrichtsschritte in Phasen ausgeführt und genauer darauf eingegangen.

Einstieg:

Eine Kopfrechenphase soll die Schüler auf die nachfolgende Thematik hinführen, bekanntes Wissen, welches zur Erweiterung in der Unterrichtsstunde gebraucht wird, wiederholen oder der Motivation dienen (wenn es ~~ti~~ als Wettbewerb gestaltet ist).

Hier sollen die Schüler schriftlich, aber ohne Taschenrechner Aufgaben lösen, wie sie in vorangegangenen Stunden geübt wurden. Denkbar wäre folgende OHP-Folie:

Skizze (!)



usw.

Ziel ist es in verschiedenen Formen ~~das~~ Dreieck mit dem 90°-Winkel zu erkennen und aber einfache, im Kopf rechenbare Längeneinheiten die fehlende Seitenlänge zu ermitteln (natürlich verschiedene Längeneinheiten, nicht wie im Beispiel oben!) Hierbei können sie, abhänig von der Leistungsstärke der Klasse und Vorübung, schriftlich ~~aus~~ nach Formel ausrechnen oder nur das Ergebnis notieren. Diese Kopfrechenphase soll nicht länger als ca. 5 Minuten dauern.

Erarbeitungsphase:

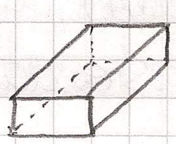
Das das Rechnen und die Vorstellung in der Ebene funktioniert, werden die Schüler mit folgender Sachaufgabe in die Anwendung des Satzes des Pythagoras im Raum eingeführt.

(1)

Frau Meier möchte ein Paket verschicken.
Die Maße des Pakets dürfen 16 x 30 x 120
[LE in cm] nicht überschreiten.
Erfreulicherweise hat Frau Meier eine Paketgröße gefunden. Es ist 16cm hoch, 25cm breit und 32 cm lang.

Der Lehrer zeigt eine Schachtel mit diesem Maßen und klärt ~~um~~ Unstimmigkeiten des (enaktive Handlung) Textes. Die Schüler messen nach und konstruieren im Heft, ~~gemeinsam~~ während der Lehrer an der Tafel ebenfalls eine Zeichnung anfertigt. Hierbei trainieren und üben sie erneut bereits vorhandenes Wissen.

Skizze Paket



ikonische Handlung

Das Anschauungsbeispiel wird nun nochmals mit der Zeichnung verglichen und der 3-dimensionale Blick der Schüler geschult.
Die verbale Auseinandersetzung - kommunikatives Prinzip sollte die Schüler auf Kommunikation und „sich ausdrücken" können" vorbereiten und schulen.

Um beim Thema zu bleiben, werden die Schüler aufgefordert nach rechten Winkeln zu suchen. Dabei tragen sie sie mit ihrem Geodreieck ab.

②

Frau Meier möchte darin nun eine Wurst (o.ä.) an ihre Schwester in Norddeutschland verschicken.

Wie lang darf die Wurst sein, damit sie ins Paket passt?

Mögliche Schülerantwort wird sein, dass die Wurst nur so lange sein ~~kan~~ darf, wie das Paket lang ist.

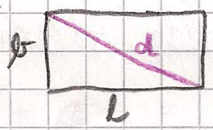
Zur enaktiven Förderung erhalten ~~verschi~~ einzelne Schüler verschiedene ~~Hol~~ lange Holzstäbe (der Stärke 4x4 cm), die symbolisch für die Wurst stehen sollen. Sie dürfen ~~n~~ nun testen ~~ut~~ und ausprobieren, welche hineinpasst und erfahren dabei in ihrer eigenen Handlung warum einige hinein passen und andere ~~zu kurz sind~~ noch länger sein dürften:

Die Schüler denken nun an die Diagonale des Paket~~bogens~~bodens "d" und die Diagonale des gesamten Pakets.

③ In einzelnen ~~tb~~ Zerlegungsschritten, zeigt der Lehrer das vorbereitete ~~o~~ gesuchte Dreieck mit der Paketdiagonalen "D", um damit der 3-dimensionalen Blick "herauszunehmen" bzw. zu markieren.

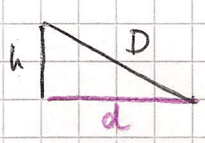
Tafelbild / Hefteintrag: (Skizze)

Bodenplatte



$$d^2 = b^2 + l^2$$
$$= 25^2 + 32^2$$
$$= 625 + 1024$$
$$= 1649$$
$$d = \sqrt{1649}$$
$$d \approx \underline{40{,}6\text{ cm}}$$

diagonale Ebene

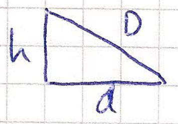


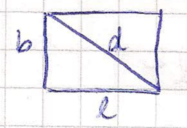
$$D^2 = h^2 + d^2$$
$$= 256 + 1649$$
$$= 1905$$
$$D = \sqrt{1905}$$
$$D \approx 43{,}7\text{ cm}$$

Anwendungsphase:

Weitere Variationsmöglichkeiten, die an das Vorwissen und eben hergeleitete Wissen anknüpft.

Wurst ist nun 50 cm lang und das Paket hat die Maße: $h = 16\,cm$; $b = 30\,cm$
Wie lang muss da Paket sein, damit die Wurst hinein passt?





$$D^2 = h^2 + d^2$$
$$50^2 = 16^2 + d^2$$
$$d^2 = 50^2 - 16^2$$
$$d^2 = 2500 - 256$$
$$d^2 = 2244$$
$$d \approx 47{,}4\,cm$$

$$d^2 = b^2 + l^2$$
$$l^2 = d^2 - b^2$$
$$l^2 = 2244 - 900$$
$$l^2 = 1344$$
$$l \approx 36{,}7\,cm$$

Vertiefungsphase:

Hausaufgabenstellung / Übung

Wurst ist 50 cm lang; Paket hat die Maße $h = 16\,cm$; $b = 30\,cm$, $l = 37\,cm$
Passt die Wurst hinein?

(4.) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras und seine Umkehrung!

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = h^2 + p^2$$
$$a^2 = h^2 + q^2$$
$$c^2 = (q+p)^2$$

$$\Rightarrow h^2 + q^2 + h^2 + p^2 = (p+q)^2$$
$$2h^2 + q^2 + p^2 = q^2 + 2pq + p^2$$

$$2h^2 = 2qp \quad | :2$$
$$h^2 = q \cdot p \quad \text{q.e.d.}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = cq$$
$$a^2 = cp$$

$$\Rightarrow cp + cq = c^2$$
$$c(p+q) = c^2 \quad | :c$$
$$\underline{p+q = c} \quad \text{q.e.d}$$