Thema 1

Aufgabe 3)

Sachanalyse

Kreise kommen in der Alltagswelt der Schülerinnen und Schüler sehr oft vor. Man findet sie beispielsweise bei Rädern (Fahrrad, Auto etc), bei Tellern, Uhren, etc vor ~~un~~. Aufgrund dieser Tatsache ist den meisten Schülern der Begriff Kreis bereits bekannt und sie können sich unter dem Begriff etwas vorstellen.

In der folgenden Unterrichtsstunde soll ~~der~~ die Formel für den Umfang des Kreises gefunden werden und der proportionale Zusammenhang zwischen dem Umfang und dem Durchmesser des Kreises herausgestellt werden.

~~Notwendige~~ Die Formel für den Umfang des Kreises lautet: $U = 2r\pi$, bzw $U = d\pi$, wobei r den Radius des Kreises ~~und~~, d den Durchmesser und U den Umfang bezeichnet. Eventuell kann auch noch wiederholt werden, was unter dem Begriff Kreis zu verstehen ist (= Menge aller Punkte x, die von einem gegebenen Punkt M gleichen Abstand besitzen).

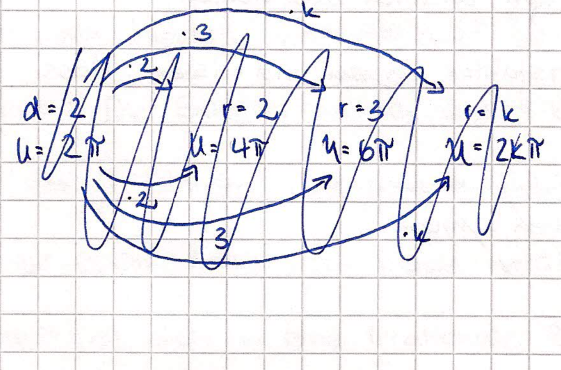
Wichtig ist ebenfalls nochmals kurz den Unterschied zwischen der Fläche und dem Umfang herauszustellen. * (ganz hinten)

Unter Proportionalität, hier ~~direkte~~ Proportionalität versteht man ~~den~~ einen speziellen Zusammenhang ~~zwissen~~ zwischen ~~dem~~ U und d, der Proportionalitätsfaktor ist π, $\frac{U}{d} = \pi$

Man erkennt die Quotientengleichheit des Quotienten $\frac{U}{d}$, der immer π ergibt.

Verdoppelt man hier beispielsweise ~~den Radius~~ den Durchmesser, so verdoppelt sich auch der Umfang. Also die ~~Ver~~ Vervielfachung von d um k ~~[illegible]~~ führt auch eine Verfielfachung von U ~~bzw~~ um k herbei ~~[illegible]~~ man schreibt:

$U \sim d$



$d = 1 \xrightarrow{\cdot 2} d = 2 \quad d = 3 \; \ldots \; d = n$ (·n)

$U = \pi \xrightarrow{\cdot 2} U = 2\pi \quad U = 3\pi \; \ldots \; U = n\pi$ (·3, ·n) π ist eine irrationale Zahl und hier der Proportionalitätsfaktor ~~von~~ $\frac{u}{d}$. Den Schülern sind bislang ~~nur~~ keine irrationalen Zahlen bekannt, weshalb man kurz erwähnen sollte, dass es irrationale Zahlen gibt. Genaueres zu diesem Thema wird erst später besprochen.

Lernvoraussetzungen

- Die Schülerinnen u. Schüler ~~sollen w~~ müssen wissen, das jede ebene Figur einen Umfang besitzt und erklären können, was man darunter versteht (evtl. im Gegensatz zum Flächeninhalt)
- Die Schüler können den Umfang bei anderen geometr. Figuren bestimmen (Rechteck, Quadrat, allg. Viereck, Dreieck etc.)
- Die Schüler kennen den Begriff d. Proportionalität und erkennen an ~~Graphen~~ Funktionsgraphen ~~für~~ proportionale Zusammenhänge
- Schüler können im Team arbeiten und selbständig Lösungswege aufzeigen.
- Schüler können mit Zeichenmaterial umgehen

Lernziele

- Schüler wissen, was man unter den Begriffen Umfang, Radius, Kreis versteht und können diese erklären
- Die Schüler tragen selbständig zur Lösungsfindung bei
- ~~Die Schüler leiten eine Formel~~
- Formel für den Umfang wird hergeleitet
- S erkennen proportionalen Zusammenhang zwischen u und d
- S können den ~~Graph des~~ u-d-Graph zeichnen und deuten
- S kennen π als den Proportionalitätsfaktor ~~kennen~~ und wissen, dass π eine irrationale Zahl ist
- ~~S müssen mit Zeichenmittel umgehen können~~
- ~~S müssen im Team arbeiten~~

Vorletzte Seite

(*)[1]

Unterrichtseinheit

Für die Unterrichtseinheit hat der Lehrer große Lineale, dünne aber reißfeste Schnur ~~dabei~~ und einige kreisförmige Gegenstände dabei. Vorbereitet hat er außerdem eine Folie, auf der eine Tabelle vorgefertigt ist mit den Spalten: Expertenteam, Objekt, Durchmesser, Umfang. und außerdem eine Folie, auf der ein Koordinatensystem vorgezeichet ist.

Zu Beginn der Stunde startet der Lehrer mit der Aussage, dass die Schüler bereits wissen, wie man den Umfang von Rechtecken etc. bestimmt., ~~dass diese Formel~~ Dass to mit Hilfe dieser Formel der Umfang eines Kreises nicht zu bestimmen ist, leuchtet den Schülern wohl sofort ein.

Der Lehrer bildet nun sogenannte Expertenteams und schickt sie mit dem Auftrag ins Schulhaus, kreisförmige Gegenstände zu finden. Ausgestattet sind die Gruppen, welche ca 4 Schüler umfassen, mit großen Linealen und der dünnen reißfesten Schnur. Die Aufgabe der Schüler besteht darin, ~~die Kreisfo~~ den Durchmesser und den Umfang der Gegenstände zu bestimmen. Bestehen Unklarheiten darüber, was unter diesen Begriffen zu verstehen ist, so sollte der Lehrer unterstützend eingreifen und erklären. Diese Einheit sollte nicht zu lange dauern (ca 10 min) da sie nur die Vorarbeit leistet.

Anschließend legt der Lehrer die Folie mit der Tabelle auf und lässt die Schülergruppen ihre Ergebnisse eintragen. Ist dies geschehn, so ergänzt der Lehrer eine Spalte und beschriftet sie mit U/d. Die einzelnen Gruppen berechnen nun den Zusammenhang zwischen den Größen. Ist die Tabelle nun fertig gefüllt, ~~wird~~ gibt der Lehrer, falls es die Schüler nicht sofort bemerkt haben, den Impuls „, Was fällt auf? Ist irgendetwas sonderbar an dem Ergebnis? Die Schüler werden schnell bemerken, dass sich der errechnete Wert ~~ein~~ jd. Gruppe ~~der gleichen Zahl annähert~~ sehr ähnelt.

Nun ist es am Lehrer, die Klasse darüber aufzuklären, dass sich diese Zahl π nennt, es sich um eine irrationale Zahl handelt (d.h eine Zahl, die sich nicht ~~aus einem~~ durch einen Bruch ganzer Zahlen darstellen lässt, und die einen nicht abbrechenden Dezimalbruch darstellt).

π in Tabelle ergänzen bei $U/d \boxed{= \pi}$

Die Spalte wird vom Lehrer angegeben, da nicht zu erwarten ist, dass die Schüler von selbst auf den Zusammenhang kommen.

Falls den Schülern der Zusammenhang der direkten Proportionalität nicht sofort auffällt, sollte der Lehrer wieder einlenken und das Augenmerk auf die letzten Stunden lenken, in denen die Proportionalität besprochen wurde.

Abschließend wird ein Koordinatensystem gezeichnet, ~~welches~~ dessen Achsen ~~mit~~ U und d besitzen und der zugehörige Graph wird gezeichnet. Hierbei wird noch einmal deutlich herausgestellt, dass der Zusammenhang zwischen U und d direkt proportional ist und der Proportionalitätsfaktor π.

Die Schüler sollen noch einmal kurz erläutern, was für eine Proportionalität vorliegt und wie sich diese nachweisen lässt (→ Quotientengleichheit). Der Proportionalitätsfaktor π sollte klar hervorgehoben werden.

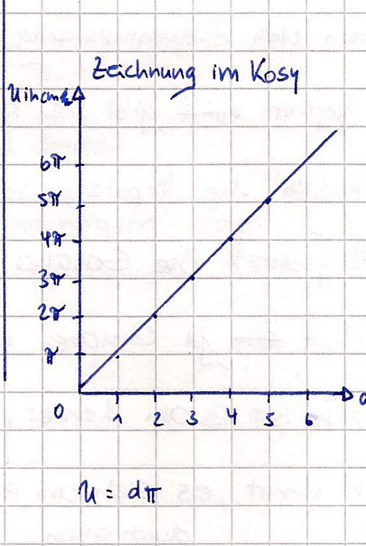
Da die Schüler über Vorwissen verfügen, sollten ihnen dieser Abschluss nicht allzu schwer fallen, zumal zuvor der proportionale Zusammenhang durch die Tabelle deutlich wurde. Wichtig ist die Achsen richtig zu beschriften und geeignete Zahlen ~~zu f~~ für die Achsen zu finden, so bietet es sich an die U-Achse mit π, 2π, 3π usw zu beschriften

Tabelle

Expertenteam	Objekt	~~Radius~~ Durchmesser	Umfang	$U/d \boxed{= \pi}$
	Teller Glas Säule ⋮			

d = 2cm
→ U = 4cm π

Zeichnung im Kosy



$U = d\pi$

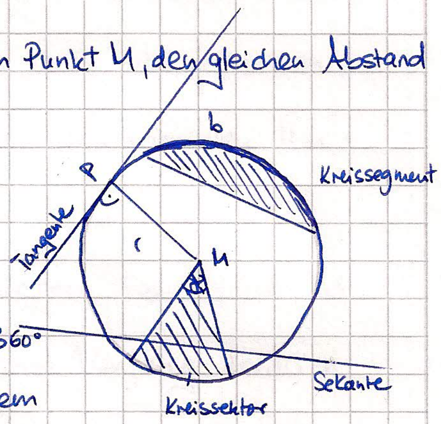
~~Mögliche Schwierigkeiten~~

Abschließend, sollte ~~der~~ die Formel für den Umfang noch ins Heft übernommen werden. Der Hefteintrag besteht also aus dem Graphen der U-d-Funktion, ~~der Formel~~ und der Formel $U = d\pi$ $= 2r\pi$. Wichtig ist auch, dass mit π ins Heft übernommen wurde, dass eine direkte Proportionalität mit Proportionalitätsfaktor π vorliegt und woran man dies erkennt.

Als Hausaufgabe kann der Lehrer nun Aufgaben geben, die sich ~~aus~~ mit Hilfe der erarbeiteten ~~Folie~~ Formel berechnen lassen, beispielsweise den Umfang bei gegebenen Radius und umgekehrt berechnen lassen. ~~Schafft der Lehrer es n~~ und nochmals zum Vertiefen den Graphen dazu zeichnen lassen.

Aufgabe 1

Die Menge aller Punkte x, die von einem gegebenen Punkt M den gleichen Abstand haben nennt man Kreis ~~[illegible]~~



Kreissektor

Der Flächeninhalt eines Kreises $A = r^2\pi = \frac{360°}{360°} r^2\pi \rightarrow \varphi = 360°$

Ein Kreissektor ist die Fläche des Kreises zu einem zugehörigen Mittelpunktswinkel φ und beträgt den Flächeninhalt $\frac{\varphi}{360°} r^2\pi$

~~Kreis~~ Spezialfall $\varphi = 360° \rightarrow$ komplette Kreisfläche $A = r^2\pi$

Kreissegment

~~Der Krei~~ Ein Kreissegment ist die Fläche über einer Sehne, die durch ~~den~~ die ~~Kreislinie begrenzt wird~~ den zugehörigen Kreisbogen begrenzt wird.

Tangente

~~Die~~ Eine Gerade nennt man Tangente, wenn sie den Kreis k in einem Punkt P berührt und ~~senkrecht~~ senkrecht zur ~~die~~ Strecke PM ~~steht~~ ist

Sekante

Wenn eine Gerade ~~durch 2 Punkte des Kreis~~ die Kreislinie in 2 Punkten schneidet, so nennt man sie Sekante (Spezialfall durch M = Passante)

~~Eine Strecke von~~

Wenn eine Strecke ihren Anfangspunkt P_1 und ihren Endpunkt P_2 auf der Kreislinie hat und $P_1 \neq P_2$, dann nennt man sie Sehne des Kreises

Spezialfall: Sehne geht durch M -> Sehne = Durchmesser

Aufgabe 2

Unterrichtliche Zugänge zur Bestimmung vom Umfang eines Kreises

- -> man schickt die Schüler los ~~zu~~ mit Linealen u. Schnur und lässt sie experimentell verschiedene kreisförmige Objekte in Hinblick auf Durchmesser und Umfang bestimmen. Durch Bilden des Quotienten $\frac{u}{d}$ fällt dessen Proportionalität auf und aus dem gefundenen Proportionalitätsfaktor π lässt sich der Umfang U aus der Formel $U = d\pi$ $(= 2r\pi)$ herleiten.

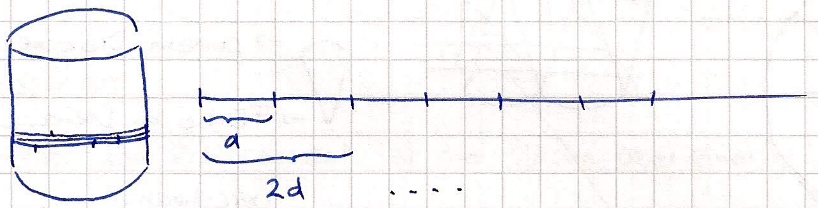
  vgl. Unterrichtseinheit

- -> man bringt kreisförmige verschiedene Dosen mit in den Unterricht und Schnur. Die Schüler wickeln die Schnur um die Dosen (in gleicher Höhe, nicht schief wickeln). Auf dieser Schnur wurde vorher ~~d~~ einige Male der Durchmesser der Dose abgetragen. Die S sollen feststellen,

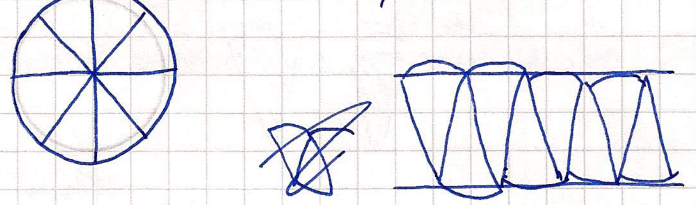
2. ~~Unterrichtliche Zugänge~~ ~~wann zwei~~ nach wievielen Um-

Der ~~Kreis und di kommt in unserem Alltags~~

wicklungen die Markierungen wieder aufeinanderliegen. Somit wird der Zusammenhang zwischen Durchmesser der Dose und Umfang deutlich und es ergibt sich wieder bei allen Dosen als Proportionalitätsfaktor π. Wiederum kann der Umfang aus π und d gewonnen werden

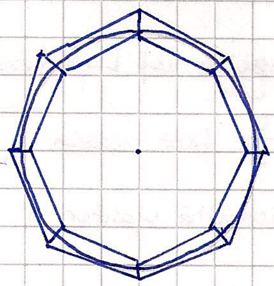


-> • Der Umfang kann auch durch Näherung bestimmt werden, indem man den Kreis in beliebig viele Sektoren zerteilt und diese aneinanderlegt und ~~d~~ so einem Rechteck annähert



allerdings sehr ungenau

- \- der Umfang lässt sich auch durch Intervallschachtelung annähern, indem man dem Kreis n-Ecke einbeschreibt und umschreibt

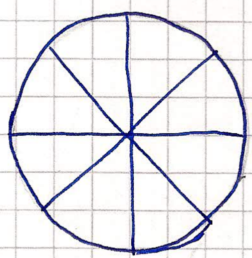


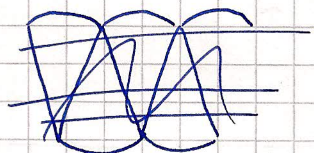
der Umfang des Kreises liegt zwischen dem Umfang des einbeschriebenen und dem umbeschriebenen n-Eck und durch ~~toe~~ ~~immer~~ ~~mehreckige~~ beliebige Vergrößerung von n kann man ~~d im~~ den Kreisdurchmesser beliebig genau annähern $U_{n\text{-Eck}_{außen}} > U_{Kreis} > U_{n\text{-Eck}_{innen}}$

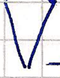
- Will man nur den Umfang einer ~~Fi~~ kreisförmigen Figur, so kann man mit einer Schnur diesen nachlegen und messen.

zur Bestimmung des Flächeninhalts

- mann kann den Kreis wieder in beliebig viele Sektoren teilen und den Flächeninhalt durch das Flächeninhalt vom Dreieck nähern, Diese Methode ist allerdings wieder ziemlich ungenau. Für die ~~Schüt~~ Schüler ist sie allerdings leicht nachvollziehbar.

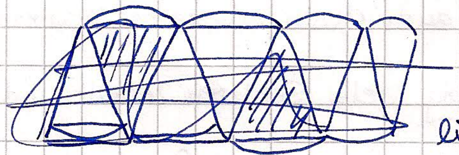




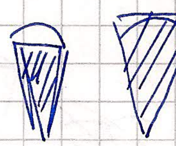


→ ähneln Dreiecken

→ Fläche d. Dreiecke berechnen.



einmal großes einer kleines im Wechsel addieren



- bei der Bestimmung des Flächeninhaltes des Kreises bietet sich erneut die Methode der Intervallschachtelung an. Auch hier kann man durch ~~einto~~ den Flächeninhalt einbeschriebenes und umbeschriebenes n-Ecke (siehe Zeichnung Seite vorher) den Flächeninhalt des Kreises beliebig genau annähern

$$A_{\text{n-Eck außen}} > A_{\text{Kreis}} > A_{\text{nEck innen}}$$

~~Diese Methode ist allerdings erst für höhere Jahrgangsstufen geeignet, die~~

- Eine andere Möglichkeit, den Flächeninhalt zu bestimmen ist durch das Wiegen. Der Lehrer bereitet Quadrate unterschiedlicher Flächen vor und schneidet diese aus starkem Karton aus. Auch Kreise verschiedener Flächen werden so vorbereitet. Bei den Kreisen ist der Radius bekannt, bei den Quadraten die Seitenlängen. Es stehen Waagen mit hoher Messgenauigkeit bereit.

Zuerst ~~wiege~~ rechnen die ~~S der~~ Schüler den Flächeninhalt der Quadrate aus und ~~messen~~ wiegen diese anschließend. Es stellt sich heraus dass das Gewicht der Quadrate proportional zur Fläche ist, der Faktor wird „Papierfaktor" „p" genannt und meint ~~Gewi~~ Gewicht pro Fläche, er wird hier also in Gramm pro Zentimeter angegeben. Durch diesen Faktor lässt sich nun auch die Fläche der Kreise berechnen. Das Gewicht (in Gramm) können die Schüler wieder messen und daraus und dem Papierfaktor p lässt sich die Fläche errechnen:

$$\cancel{p = g/cm^2 \rightarrow p \cdot cm^2 = g \rightarrow}$$

$$p = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Fläche}} \rightarrow \text{Fläche} = \text{Gewicht}/p$$

Danach wird der Zusammenhang A/r ausgerechnet und man stellt anhand eines Graphen fest, dass der Zusammenhang nicht proportional ist. Es wird nun geklärt, warum das so ist → verschiedene Einheiten A in cm^2 in r in cm

Daraus ergibt sich die Idee, den ~~Graphen~~ ~~A/r~~ Zusammenhang $\frac{A}{r^2}$ zu betrachten und einen $A-r^2-$ Graphen zu zeichnen. Es wird festgestellt, dass $A \sim r^2$ und es wird erneut festgestellt, dass der Proportionalitätsfaktor π ist.

So lässt sich die Formel $A = r^2 \pi$ herleiten.

~~Eine weitere M~~

Aufgabe 2

Kreis

Die Menge aller Punkte x_i, die von einem gegebenen Punkt M, den gleichen Abstand haben, nennt man Kreis k (~~M, $\overline{XM}$~~) mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{MX}$;
= Strecke $\overline{MX}$

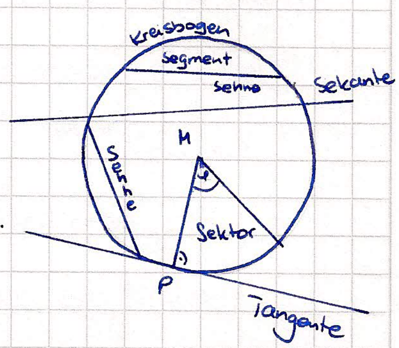
Kreissektor

Die Fläche eines Kreises über ~~einem~~ einen zugehörigen Mittelpunktswinkel φ nennt man Kreissektor (→ falls $\varphi = 360°$ → komplette Kreisfläche)

Kreissegment

Die Fläche eines Kreises, die durch eine Sehne und den zugehörigen Kreisbogen begrenzt wird, nennt man Kreissegment.

Tangente



Eine Gerade nennt man Tangente, wenn sie den Kreis k ~~ein~~ ~~ein~~ in genau einem Punkt P berührt und senkrecht zur ~~PM ist~~ Strecke $\overline{PM}$ ist.

Sekante

Wenn eine Gerade die Kreislinie in zwei Punkten schneidet, so nennt man sie Sekante (Sekante durch M nennt man Passante)

Sehne

~~Eine Strecke nennt man Sehne, we~~

Hat eine Strecke ~~ihren An~~ $\overline{P_1P_2}$ ihren Anfangspunkt P_1 und ihren Endpunkt P_2 auf der Kreislinie ~~hat~~ und ist $P_1 \neq P_2$, so nennt man sie Sehne. (Falls Sehne durch M geht = → Durchmesser)

<u>mögliche Schwierigkeiten</u> u. Hilfe

- Die Schüler arbeiten zu ungenau
  -> Augenmerk darauf lenken, dass für das Ergebnis sehr genaues Arbeiten wichtig ist.
- Die Schüler erkennen Unterschied zwischen Flächeninhalt u. Umfang nicht
  -> an Beispielen wie Rechteck kurz Unterschied klar machen
- Schüler erkennen proportionalen Zusammenhang nicht
  -> an letzten Stunden appellieren
  -> Proportionalität kurz wh. lassen

Allgemein sollte der Lehrer bei Problemen individuell unterstützen und bei öfter auftretenden Fragen, diese im Plenum klären.

* Unter Proportionalität versteht man hier den speziellen Zusammenhang zwischen U und d. Man schreibt $U \sim d$ (sprich U ist direkt proportional zu d). Das heißt die Vervielfachung von d um k (also $k \cdot d$) ~~f~~ zieht eine Ver~~f~~vielfachung von d um den Faktor k nach sich ($k \cdot U$). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von ~~g~~ Quotientengleichheit, da der Quotient $\frac{U}{d}$ immer π ergibt. π ist in diesem Fall der Proportionalitätsfaktor.