

- ③ Unterrichtseinheit; Division eines Bruches durch einen Bruch

3.1 Sachanalyse

Die Division von Brüchen erfolgt durch die Multiplikation des Teilerbruchs vom Divisor mit dem zu dividierenden Bruch.

$$\text{Bsp.: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Da den Schülern bei der Einführung der Division von Brüchen bereits die Multiplikation von Brüchen bekannt sein dürfte, könnte folgende Schwierigkeiten auftreten:

→ Der Schüler vergisst den Kehrwert zu nehmen

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

→ Der Schüler versteht nicht weshalb der Kehrwert multipliziert werden ~~soll~~ muss, oder weshalb er multiplizieren muss, wenn es eine Division geht.

(Verwechslungen ...)

Die Multiplikation mit dem Kehrwert ist eine Vereinfachung des Rechenwegs

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{\frac{a}{\cancel{c}}}{\frac{b}{\cancel{d}}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Damit dieser Rechenschritt "weggelassen" werden kann, wird die Verknüpfung von Zähler und Nenner herangezogen.

$$\frac{\frac{a}{d} : \frac{b}{c}}{\frac{a}{d} : \frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

3.2 Lernvoraussetzungen

Die Brüche (als rationale Zahlen & rationale Zahlen im allgemeinen) werden in der 6. Jahrgangsstufe eingeführt.

Die Schüler kennen zunächst die Brüche als rationale Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl zwischen den natürlichen Zahlen liegen. Abschließend werden auch Größenvergleiche von Brüchen ($>$, $<$, $=$) eingeführt.

Die Schüler kennen ebenfalls verschiedene Arten von Brüchen kennen, wie unechte Brüche (z.B. $\frac{15}{3}$), echte Brüche (z.B. $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, ...), gemischte Brüche (z.B. $3\frac{3}{4}$), endliche Brüche (z.B. $4\frac{7}{8}$) und unendliche Brüche (z.B. $9\frac{3}{17}$).

Abschließend werden Brüche mit den 4 Grundrechenarten verknüpft, also Addition, Subtraktion und Multiplikation von zwei Brüchen.

Die 4. Grundrechenart - die Division eines Bruches durch einen Bruch soll in der folgenden Unterrichtseinheit behandelt werden.

3.3 Lernziele

Grobziel: Die Schüler sollen die Division eines Bruches ~~mit~~ durch einen Bruch verstehen und anwenden können

Feinziel 1: Die Schüler sollen den Kehrwert bilden können

Feinziel 2: Die Schüler sollen die Division eines Bruches mit einem ~~echten, unechten~~ ~~echten, unechten~~ Brüche verstehen und anwenden können

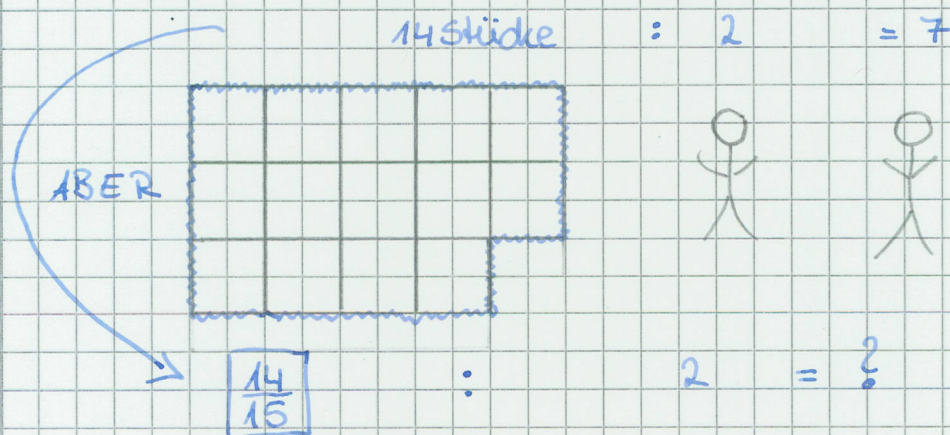
Feinziel 3: Die Schüler sollen die Division eines Bruches durch einen gemischten Bruch berechnen können

3.4 Unterrichtsseinheit

3.4.1 Einführung / Motivation

Es wird eine Folie auf den Overheadprojektor gelegt:

Verteile die ausgepackte Schokolade:



Vermutung: $\frac{7}{15} \Rightarrow$ warum?

Während des Lehrer - Schüler - Gesprächs wird die Folie ergänzt (Farbstift!)

Frage kommt auf: „Jeder bekommt 7 Stücke, wieviel ist das aber, wenn die ganze Schokoladentafel gesehen wird?“

3.4.2 Problemstellung / Problemlösung

Die Schüler werden darauf hingewiesen, dass in den letzten Stunden die Multiplikation durchgeführt wurde und sie dies Kenntnisse hier benötigen.

Es wird den Schülern gesagt, dass sie die Zahl zwei zunächst ~~als~~ in einen unechten Bruch umwandeln sollen und herausfinden mit ihrem Bausteinbaukasten ausprobieren sollen, wie Brüche mit DIVIDIERT werden könnten. Es wird die Hilfestellung:

$$\frac{14}{15} : \frac{2}{1} = ? \quad \text{auf die Folie geschrieben.}$$

Nach ca. 5 Minuten wird nachgefragt, ob ein Schüler einen Lösungsvorschlag hat und diesen zeigen muss.

Es wird der Rechenschritt

$$\frac{14}{15} : \boxed{\frac{2}{1}} = \frac{14}{15} : \frac{2}{1} = \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{14 \cdot 1}{15 \cdot 2} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

$\frac{14}{15} : \frac{2}{1}$

erarbeitet.

Die Schüler werden darauf aufmerksam gemacht, dass sich bei der Berechnung der unechten Brüche $\frac{2}{1}$ in den Brüche $\frac{1}{2}$ „verwandelt“ hat. (Feinziel 1)

Es wird der Begriff Kehrwert eines Bruches eingeführt.

3.4.3 Sicherung

Hefleintrag: (Sicherung)

Brüche werden dividiert, in dem man den **Kehrwert** eines Bruches mit dem zu dividierenden Bruch **multipliziert**.

Beispiel:

$$\boxed{1} \quad \frac{4}{9} : 8 = \frac{4}{9} : \frac{8}{1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$\boxed{3}$ (soll zunächst von den Schülern frei gehalten werden)

Wie bilde ich den Kehrwert?

Der Kehrwert wird gebildet, indem ich den **Zähler** mit dem **Nenner** vertausche

Brüche: $\frac{6}{7} \Rightarrow$ Kehrwert des Bruchs: $\frac{7}{6}$

3.4.4 Vertiefung

Den Schülern werden Aufgaben gegeben (aus dem deskriptiv-schreibenden oder erstelltes Arbeitsblatt)

zumindest in der Form:

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{4} : \frac{3}{7} = \square \quad \frac{2}{5} : \frac{6}{11} = \square$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{15}{30} : \frac{8}{16} = \square \quad \frac{4}{12} : \frac{25}{70} = \square$$

Hinweis: ~~hier~~ Vereinfache vorher!

③ Ableitung

$$1 \frac{7}{9} : 3 \frac{4}{7} = \square$$

Bei Aufgabe Nr. 3 werden die Schüler gebeten nochmal zu erklären; diese Aufgabe wird gemeinsam erarbeitet und als Beispiel ③ ins Arbeitsblatt übertragen

$$\textcircled{3} \quad 1 \frac{7}{9} : 3 \frac{4}{7} = \frac{16}{9} : \frac{22}{7} = \frac{16}{9} \cdot \frac{7}{22} = \frac{56}{99}$$

als weitere Vertiefung:

Hausaufgaben mit den Aufgabentypen aus ~~den~~ Division mit ^{Brüchen} und gemischten Brüchen.

3.4.5 Didaktische Analyse

als Einstieg in die Division von Brüchen würde zunächst die Division eines Bruches mit einem unechten Bruch (bzw. einer natürlichen Zahl) gewählt, um die Hilfführung zu erleichtern und den Rechenweg zu vereinfachen.

Statt würden „größere Zahlen“ (z.B. 10) gewählt, um auch das große Einmaleins zu üben und die Kopfrechnung zu fördern.

Um auf Besonderheiten hinzuweisen (z.B. Kennzeichnung des Kehrwerts in grün) fällt es in der 6. Jahrgangsstufe leichter, verschiedene Farben einzusetzen.

(Achtung nicht zu viele Farben verwenden!)

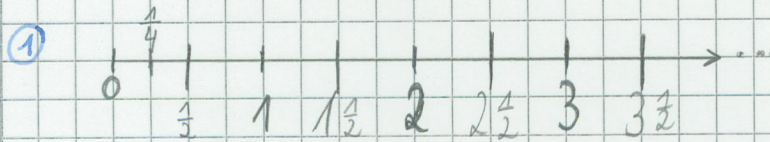
als Aufbau können in der nächsten Unterrichtseinheit Aufgaben gestellt werden, um die Punkt-vor-Strich-Rechnung zu wiederholen (z.B. $\frac{2}{3} + \frac{9}{11} \cdot \frac{4}{5}$)

② Möglichkeiten zum Größenvergleich von Brüchen

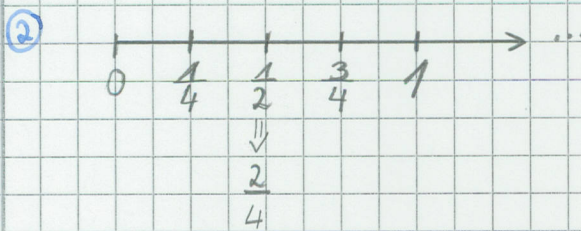
7

2.1 Zahlenstrahl

Besonders in der 5. und 6. Jahrgangsstufe werden bei der Einführung neuer Zahlenbereiche ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ...) gerne der Zahlenstrahl verwendet:



In den Zahlenstrahl kann beliebig "hineingezogen" werden, also vom groben Zahlenstrahl, in immer feiner aufgeteilten Bereiche



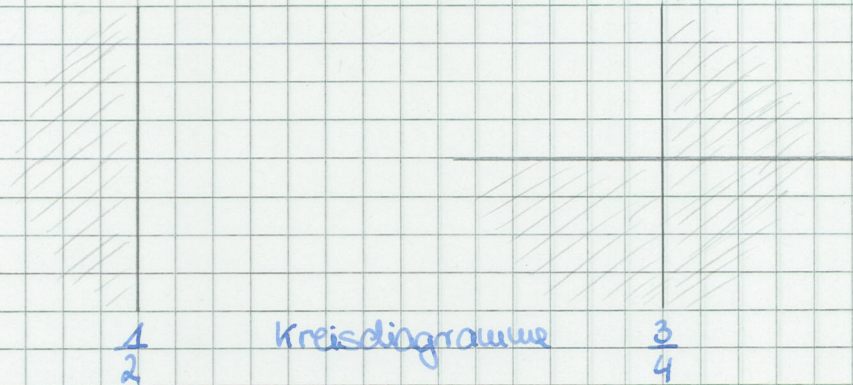
Brüche die weiter links im Zahlenstrahl liegen, sind kleiner, Brüche die weiter rechts im Zahlenstrahl liegen, sind größer.

Der Zahlenstrahl erweist sich als recht praktisch, da er beliebig ergänzt werden kann. (z.B. bei der Einführung von neg. Zahlen) Es können auch Abschnitte angedeutet werden, die gerade benötigt werden. (siehe Beispiel ②)

Nachteilig ist jedoch, dass nicht alle Brüche auf dem Zahlenstrahl übersichtlich dargestellt werden können, wenn der Bereich größer ist. (aus Zeitgründen kann auch nicht immer im Zahlenstrahl gezeichnet werden)

2.2 Diagramme

Brüche können auch mit Hilfe von Diagrammen dargestellt werden (z.B. Kreisdiagramme oder Balkendiagramme)



Nebeneinander dargestellt kann der Schüler gut den Größenunterschied erkennen.

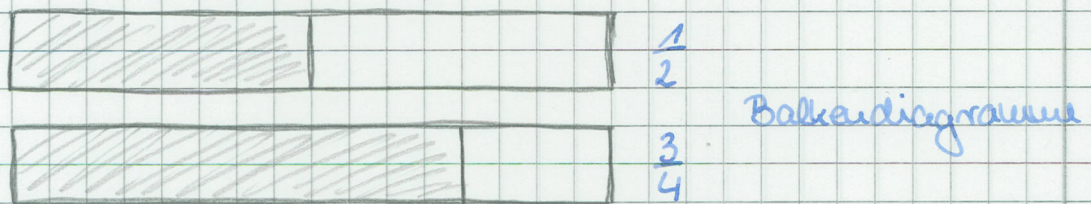


Diagramme sind für Schüler sehr anschaulich;

Die Erstellung eines Kreisdiagramms erfordert jedoch Kenntnisse aus der Geometrie und auch Winkel der Schüler dafür bereits kennen. Sehr kleine Brüche lassen sich nur schwer darstellen (z.B. $\frac{3}{97}$)

2.3 Ausmalen von Flächen

(Beispiel siehe Schokoladentafel S. 3)

Mit Hilfe von karierten Blätter können Brüche mit ausgewählten Flächen dargestellt werden. (z.B. Fläche von Faux

entsprechend 252 Kästchen, werden von den Kästchen 117 Kästen ausgewählt entspricht dies einem Bruch von $\frac{117}{252}$ mit dieser Darstellung kann auch gezeigt werden, dass $\frac{117}{252} = \frac{13}{28}$ entspricht (mit Hilfe von Flächenrechnung). Dies ist jedoch eine recht aufwendige Konstruktion bei größeren Zahlen. Die Vorzüge sind wie bei ^{den} Diagrammen.

2.4 andere Hilfsmittel

Hilfsmittel aus dem Alltag wie z.B. Messbecher z.B. $\frac{1}{2}$ Liter > $\frac{1}{4}$ Liter hilft den Schülern, Brüche als alltäglich zu sehen und greift aus Gegenständen aus dem Leben zurück.

Diese sind (sorry, hatte keine Zeit mehr dies weiter auszuführen)

① Schwierigkeiten beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Brückzahlen

Abstrakte Brüche wie $\frac{7}{19}$ können sich den Schülern als 7 Teile von 19 Teilen gut vorstellen, diese abstrakte kommt jedoch in ihrem Alltag jedoch wenig vor. Brüche, die den Schülern geläufiger sind z.B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ usw. sind jedoch kaum schwierig.

Oft sehen die Schüler in höheren Klassen die Brüche als Dezimalzahlen $\frac{1}{3} = 1,333...$ und es entstehen Rundungsfehler.

Schüler empfinden es oft als abstrakt das es zwischen den natürlichen Zahlen noch „andere Zahlen“ gibt.