

Aufgabe 1

Bevor ich die Fragestellung eingehe, möchte ich zunächst die natürlichen Zahlen und die Bruchzahlen definieren:

Eine natürliche Zahl gehört zur Zahlenmenge $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ und beinhaltet alle positiven ganzen Zahlen (bei $\mathbb{N}_0$, einschließlich der Null).

Eine Zahl nennt man Bruch, oder auch rationale Zahl, wenn diese durch $\frac{a}{b}$ mit $b \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ darstellbar ist. Das Symbol der Zahlenmenge für rationale Zahlen ist $\mathbb{Q}$.

In der sechsten Jahrgangsstufe werden die Schüler mit den positiven rationalen Zahlen konfrontiert.

Die erste Schwierigkeit besteht darin, dass eine Zahl durch die Form $\frac{a}{b}$ dargestellt werden kann. Die Schüler müssen wissen, dass ein Bruch aus dem Zähler a und dem Nenner b besteht.

Beispielsweise drücken sie sich dann nicht mathematisch korrekt aus, da sie entweder die Namen Zähler und Nenner

verwechseln oder sogar nicht gelernt haben wie diese heißen.

Neben den formalen Problemen können bei den Schülern Schwierigkeiten beim Vergleichen der Brüche auftreten.

z.B. $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$.

Der bekannte Aufbau der natürlichen Zahlen ändert sie daran dies zu verstehen, da $5 < 8$ und nicht anders herum. Somit ist es wichtig, dass den Schülern von Anfang an klar gemacht wird, dass ein Bruch einen Teil von einem Ganzen beschreibt und nicht ~~das~~ mit den natürlichen Zahlen gleichzusetzen ist.

Die nächste Schwierigkeit ist die der Rechenoperation bei Brüchen. Ungleichnamige Brüche müssen gleichnamig gemacht werden bevor sie addiert bzw. subtrahiert werden.

z.B. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$.

Viele Schüler wenden anfangs die Addition zweier Brüche wie folgt an:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} \frac{2}{7}$$

Dieser Denkfehler muss schnell mittels

Erklärungen und
zusätzliche 1. Übungen aufgehoben werden.

Für die Subtraktion gilt analog bzw. Definition:

$$\frac{8}{5} - \frac{4}{3} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{2 \cdot 5}$$

Hier tritt ein weiteres Problem für die Schüler auf, da $2-5 = -3 < 0$. Mit den negativen Zahlen sind bei dieser Zeit noch nicht vertraut, „nicht erlaubt“

Eine nächste Schwierigkeit ist die Division durch Null. Die Schüler müssen erkennen, dass $\frac{a}{a}$, für $a \neq 0$, die Zahl Null ergibt, aber $\frac{a}{0}$ nicht definiert ist.

Nicht zu vernachlässigen ist die Tatsache, dass ein Bruch einen Quotienten darstellt, also $\frac{a}{b} = a : b$ wobei a der Divident ist und b der Divisor.

Die Schüler kennen z.B. die Mengenangabe $\frac{1\text{l}}{2}$ aus ihrem Alltag, aber dass es somit $1\text{l} : 2$ bedeutet ist ihnen nicht bewusst.

Dieses Verständnis ist sehr wichtig beim Kürzen, bzw.

beim sinnvollen Rechnen: $\frac{8}{4} = 2$.

Manche Schüler werden $\frac{8}{4}$ in einem langen Rechen-
term am z.B. $\frac{8}{4} + \frac{7}{12} + \frac{3}{3} + \frac{4}{9} =$

unverändert lassen und müssen ^{sich} somit mit einem gemeinsamen Nenner plagen.

Ein weiterer Aspekt der Schwierigkeiten von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen ist die Darstellung der Zahl „1“. Bei den Bruchzahlen herrscht die Äquivalenz von $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

Das bedeutet, dass der Bruchzahlwert, in der Form $\frac{a}{a}$, $a \neq 0$ dargestellt werden kann.

Ein Schülerfehler ^{kann} ~~hervor~~ dann folgender sein:

$$\frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 2$$

Ein ähnliches Problem tritt ~~bei~~ in der Situation zu, wenn eine natürliche Zahl als Bruch dargestellt werden soll.

z.B. $2 \stackrel{?}{=} \frac{2}{1}$, anstatt $2 = \frac{2}{1}$.

Die Schüler sind mit dem Begriff „Einzel“ nicht vertraut und müssen ihr Zahlenverständnis somit erweitern.

Zum Schluss sind die Begriffe „gemischter Bruch“ und „unechter Bruch“ zu nennen. Den Schülern fällt

häufig die Umwandlung von z.B. $\frac{9}{2}$ in

bzw. anders herum schwer. Ein Schülerfehler kann der folgende sein: $4 \frac{1}{2} = \frac{5}{3}$.

Den Schülern muss klar sein, dass $4 \frac{1}{2}$, $4 + \frac{1}{2}$

$$\text{also } \frac{4}{1} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Aufgabe 2

Die erste Möglichkeit, Brüche miteinander zu vergleichen ist der Einsatz des Zahlenstrahls, sowie ^{den} der Stammbrüche ($\frac{1}{a}, a \neq 0$).

Hier wird den Schülern ein Zahlenstrahl von z.B. Null bis zwei vorgegeben und ihre Aufgabe ist es, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ einzutragen.

Vorteile sind die Anschaulichkeit und das Verständnis, dass $\frac{1}{5}$ tatsächlich kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Nachteilig ist, dass der Zahlenstrahl bei größeren Brüchen nicht mehr ausreicht. z.B. $\frac{1}{578}$

Die Nenner gleichnamig machen, also durch Erweitern und oder Kürzen ist eine nächste Möglichkeit zum Vergleich. Hier können die Schüler den Größenvergleich der natürlichen Zahlen anwenden: $\frac{1}{2} \square \frac{1}{4}$
 $\frac{2}{4} > \frac{1}{4}$. Diese Methode empfiehlt sich da ^{diese} $\frac{1}{4}$ bei der Addition bzw. Subtraktion auch angewendet wird.

Als Nachteil kann genannt werden, dass nicht sofort der „gleiche Nenner“ gefunden wird und somit ein „Liches“ Produkt aus beiden Nennern gebildet werden

$$\text{muss: } \frac{3}{13} \square \frac{4}{29} \Rightarrow \frac{3 \cdot 29}{13 \cdot 29} > \frac{4 \cdot 13}{29 \cdot 13}$$

$$= 377$$

Eine weitere Möglichkeit, Brüche miteinander zu vergleichen ist die Gleichnamigkeit der Zähler. Die Schüler erweitern die Brüche beispielsweise wie

$$\text{folgt: } \frac{4}{7} \square \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} \Rightarrow \frac{4}{2} < \frac{4}{6}$$

Positiv hieran ist, dass die Schüler ihr Verständnis der Bruchzahlen festigen, das heißt, dass $\frac{4}{7}$ tatsächlich kleiner ist als $\frac{4}{6}$.

Negativ hieran ist, dass die Schüler möglicherweise verwirrt werden, da sie bei der Addition und Subtraktion den Nenner „gleich machen“. Zusätzlich treten sicher wieder Fehler auf, wie $\frac{3}{5} < \frac{3}{10}$.

Somit eignet sich diese Vergleichsmöglichkeit erst, wenn die Schüler ihr Wissen über rationale Zahlen „verinnerlicht“ vertieft haben.

Als letzte Möglichkeit möchte ich die nennen, bei der der Nenner auf eine Zehnerpotenz erweitert wird. Die Vor- und Nachteile sind nun zuerst zu nennen: Positiv daran ist, dass den Schülern

dann der Übergang zu den Dezimalzahlen leichter fallen wird, da sie ^{schon} somit mit $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ... kennengelernt haben. (Die Dezimalzahlen sind 1 Teil des Lernstoffs in der sechsten Jahrgangsstufe)

Negativ dazu ist, dass nicht alle Brüche auf eine 10-er-Potenz erweiterbar sind.

Bsp.: $\frac{1}{9} \neq \frac{1}{3}$; $\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} \not\equiv \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} \Rightarrow \frac{2}{10} < \frac{5}{10}$

Aufgabe 3

1. Mathematisch - Didaktische Analyse:

Die wesentlichen Merkmale und Rechenverfahren sind bereits in Aufgabe 1 und 2 genannt worden.

Ich möchte hier lediglich kurz auf die Division zweier Brüche eingehen. Zwei Brüche werden wie folgt

$$\text{dividiert: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} \quad (a \neq 0, d \neq 0)$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Der Bruch $\frac{a}{c}$ stellt den Kehrwert von „ $\frac{c}{d}$ “ dar.

2. Lernvoraussetzungen:

Die Schüler sind mit dem Umgang der Grundrechenarten $(+, -, \cdot, :)$ der natürlichen Zahlen vertraut.

Sie kennen die „Grundeinheiten“ wie Liter, Meter und Kilogramm (um diese in alltäglichen Beispielen wie $\frac{1}{2}$ l, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{2}$ kg anwenden zu können).

Die Schüler kennen ^{erst} die Rechenarten der Brüche: ^{die} Addition, ^{und die} Subtraktion, Multiplikation.

3. Lernziele:

Die Großziele: Die Schüler können

und der Aufgabe angepasst mit den Rechenoperationen der rationalen Zahlen umge

Die Schüler verwenden Brüche, um geschickter und schneller im Alltag zu rechnen.

Feinziele: Die Schüler können einen Bruch durch eine natürliche Zahl teilen.

Die Schüler kennen die Bezeichnung „Kreuzbruch“ und „Doppeltbruch“.

Die Schüler können ihr gelerntes Wissen über die Division von Brüchen in ähnlichen Aufgaben anwenden.

4. Unterrichtszeit:

In der aktiven Phase der Einheit sollen die Schüler anhand von Grafiken, wie Pizzaschnitten, Tortenschnitten, Schokoladenstücken (die ^{jeweils} zusammengefügt ein Ganzes ergeben) ihr Grundwissen über Brüche wiederholen.

Dies kann an der Tafel im Plenum oder in Partnerarbeit geschehen. ^{Letzteres} ~~zweiteres~~ Bedarf ein Arbeitsblatt, das Aufgaben stellt, wie: „Stelle als Bruch das:  $\Rightarrow \frac{2}{3}$ “

Danach werden die bereits erlernten Rechenarten wiederholt.

Chen kann dies mit den Grafiken kombinieren:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{A circle divided into 8 equal sectors, with 3 sectors shaded with horizontal lines.} \\ \frac{1}{8} \end{array} & + & \begin{array}{c} \text{A circle divided into 3 equal sectors, with 2 sectors shaded with horizontal lines.} \\ \frac{1}{3} \end{array}
 \end{array}$$

Im ^{nun folgenden} ikonischen Phase kann die Fragen gestellt werden, welche Rechenart die Schüler noch nicht beherrschen. Somit kann das folgende Problem gestellt werden: „Was ist das Ergebnis von $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$?“

Zur gemeinsamen Erarbeitung an der Tafel wähle ich das Vergleichen der Permanenzreihe. Das stützende didaktische Prinzip ist das vom Einfachen zum Schwierigen.

Also folgt zunächst die Division eines Bruchs durch eine natürliche Zahl.

Ich werde hier schülerorientiert konkrete Zahlen annehmen und gehe somit induktiv vor (vom Speziellen zum Allgemeinen): $\frac{2}{1} : 2 = \frac{2}{2}$ a) $\frac{1}{1} : 2 = \frac{1}{2}$

$$\frac{a}{1} \quad b) \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9} \quad c) \frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$$

Die Division „ $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$ “ können sich die Schüler noch vorstellen: „Die Hälfte von $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{4}$ “. Die Lösungen werden im Lehrer-Schüler-Gespräch ermittelt.

Schwieriger wird es, wenn zwei Brüche miteinander dividiert werden:

„Wen ist die Hälfte von nun $\frac{1}{2}$ durch sich selbst dividiert?“

Man kann die Schüler darauf aufmerksam machen, dass sie bereits Zahlen „durch sich selbst“ geteilt haben und als Brüche geschrieben haben. z.B.: $\frac{3}{3}$; $\frac{4}{4}$

Somit ist der Ansatz möglich $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ als „Doppelbruch“ zu schreiben, da der Bruchstrich die Operation „geteilt durch“ ausdrückt. Also:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

~~guter~~ Nun stellt sich die Frage, wie dieses Ergebnis zu Stande kommt:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

Der Lehrer gibt einen Denkanstoß mit dem Hinweis des Kürzens, um bei der Rechnung auf 1 zu kommen.

Nach dem explorativen Verfahren der Schüler wird nun das Ergebnis, dass der zweite Bruch als Kehrbrech dargestellt wird und mit dem ersten multipliziert wird, an der Tafel⁴ und im Heft festgehalten.

kleine
X₁ | Tafelschritt

Die Division zweier Brüche

Bsp.: $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Vergleich: $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{9}{9} = 1$

oder: $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$

$\swarrow$ Multiplikation
 $\nwarrow$ Kehbruch bilden

5. methodische Begründung:

Bei der Division zweier Brüche empfinde ich es für schwierig, einen schüler- und handlungsorientierten Unterricht zu gestalten.

zur Veranschaulichung von Addition / Subtraktion
 mögliche Modelle sind lebenswert

Da das hier schwer umsetzbar ist, entschied ich mich für die Form des erarbeitenden Unterrichts, bei der der Lehrer die Schüler als Berater ans Ziel bringt.