

Thema 1

①

1. Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus lassen sich definieren durch

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

wobei der Winkel im Bogenmaß als Argument x eingesetzt wird. Damit sind sie Lösungen der Differentialgleichungen

$$y'' + y = 0$$

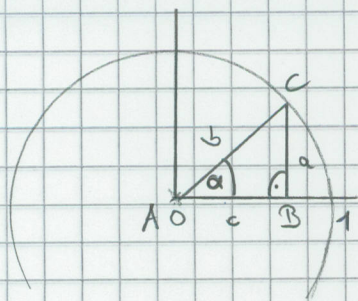
Diese Definition bringt die Vorteile:

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Ableitung des Sinus den Cosinus ergibt: $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \frac{1}{2i} (ie^{ix} - (e^{-ix} \cdot (-i))) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Durch diese Definition ist es möglich, komplexe Lösungen von Differentialgleichungen ~~zu~~ zu rekombinieren, dass reelle Lösungen entstehen. Die Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ lässt sich leicht folgern. Insbesondere für den Schulgebrauch ist diese Definition unbrauchbar, denn der Körper der komplexen Zahlen wird in der Realschule nicht behandelt. Da im Allgemeinen in der Schule Wert auf Plausibilität gelegt wird, ist diese Definition ebenfalls sehr un schön, weil sie unanschaulich ist.

(2)



Definition über den Einheitskreis:

Mit nebenstehenden Bezeichnungen gilt:

$$\sin \alpha = \frac{a}{b} \quad \cos \alpha = \frac{c}{b}$$

wobei $b = 1$ also

~~sin~~

$$\sin \alpha = a \quad \text{und} \quad \del{\cos} \cos \alpha = c$$

Im Einheitskreis wird ein Winkel α eingezeichnet (wie in der Skizze). Das entstandene Dreieck ist eindeutig definiert und somit auch die Länge der Seiten a und c .

Vorteil dieser Methode: Sie ist in der Schule anwendbar, da keine komplexen Zahlen vorkommen. Sie ist anschaulich, die Figur des Einheitskreises gibt dem Ausdruck ein Bild. Die Definition lässt sich auf die Funktionen erweitern, indem man den Winkel des Dreiecks größer als 90° werden lässt.

Nachteile sind, dass einige Eigenschaften nicht berücksichtigt werden (Ableitung, DGL).

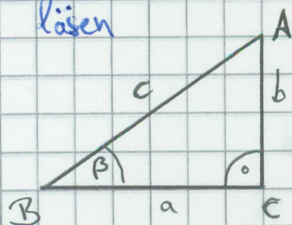
Für den Schulgebrauch in der Realschule kann nur die zweite Definition verwendet werden. Erstens würde die Definition des Sinus nicht die Einführung der komplexen Zahlen begründen können. Zweitens wird in der Schule der Wert auf anwendungsorientierten Einsatz des Sinus gelegt. Drittens werden Ableitungen in der Realschule sowieso nicht behandelt, womit sich die Nachteile der zweiten Definition erübrigen.

③

2. Zunächst wird der Sinus über den Einheitskreis

definiert. ~~Damit lässt sich die~~ Die Länge der entsprechenden „Seite im Dreieck“ ist also im Taschenrechner gespeichert und kann berechnet werden, ebenso ~~wie~~ kann über die Umkehrfunktion der Winkel berechnet werden. Die Umkehrfunktion $\arcsin x$ wird zwar erklärt (also wie man sie verwendet), aber nicht explizit eingeführt.

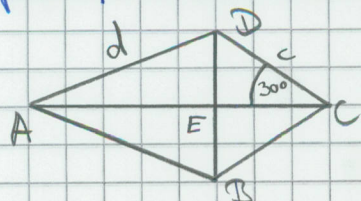
Es folgt die Erweiterung auf alle rechtwinkligen Dreiecke über die Ähnlichkeit zu einem passenden Dreieck im Einheitskreis (W: rechter Winkel und der gegebene). Die Verhältnisse der Seiten ähnlicher Dreiecke sind gleich, damit bleibt das Verhältnis $\frac{a}{1} = \frac{a'}{b'}$ (a' und b' seien die Seiten im beliebigen rechtwinkligen Dreieck) gleich. Damit wird eine Bezeichnung der Dreiecksseiten im rechtwinkligen Dreieck notwendig: Die Seite gegenüber des bekannten (oder gesuchten) Winkels α nennt man Gegenkathete, die längste Seite Hypotenuse und die andere Kathete Ankathete. Der Sinus wird verallgemeinert als das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse. Damit lassen sich folgende Aufgaben lösen



a) Geg.: $\beta = 30^\circ$, $c = 7 \text{ cm}$; Berechne die Länge der Seite b !

b) Geg.: $c = 7 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$; Berechne das Maß des Winkels β !

Der Sinus wird dann zur Berechnung von fehlenden Seiten und Winkeln in verschiedenen Figuren wie allgemeinen Dreiecken, Trapezen, Drachenvierecken verwendet:



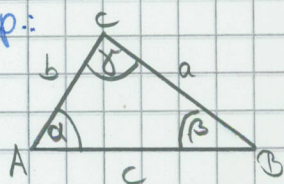
Geg.: $c = 5 \text{ cm}$

Berechne $\overline{BD}$!

④

Durch den Sinussatz wird es möglich, ohne Zwischenschritt (über Einzeichnen der Höhe) im allgemeinen Dreieck Berechnungen anzustellen. Wenn zwei Seiten und ein passender Winkel gegeben sind, lässt sich das Maß eines anderen berechnen.

Bsp.:



a) $a = 4 \text{ cm}$ $b = 2,5 \text{ cm}$ $\beta = 20^\circ$

Berechne das Maß von α !

b) Auch Umstellen des Sinussatzes kann trainiert werden

$b = 3 \text{ cm}$ $\beta = 20,5^\circ$ $\alpha = 40^\circ$; Berechne die Seitenlänge von a

Schließlich wird die Sinusfunktion behandelt. Aus Graphen wird die Amplitude oder Frequenz einer Schwingung abgelesen.

Graphen werden gezeichnet und verglichen.

Der Sinus wird oft zur Definition (oder als Folgerung aus einer äquivalenten Definition) des Tangens verwendet: $\tan \varphi := \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$.

3. I Fachliche Überlegungen und Umfang: siehe 1. & 2.

II Lernvoraussetzungen

Die Schüler brauchen Kenntnisse über Ähnlichkeit und Kongruenz von Dreiecken:

WW-Satz für Ähnlichkeit; ähnliche Dreiecke haben gleiche Verhältnisse von entsprechenden Seiten.

WWS-Satz für Kongruenz; ein Dreieck ist durch eine Seite, einen Winkel und dem Winkel gegenüber der längsten Seite eindeutig definiert.

Da die Berechnungen in den Aufgaben, die gelöst werden sollen, auch andere Lösungswege diktiert werden sollen, wird auch der Satz des Pythagoras und Kenntnis über die Innenwinkelsumme im Dreieck vorausgesetzt. Das rechtwinklige Dreieck als besonderes Dreieck ist bekannt.

III Lernziele

GZ: X. Die Schüler kennen den Kosinus als Quotient aus Ankathete zur Hypotenuse.

Feinziele:

- 1.1 ~~Begriffe~~ Schüler können im rechtwinkligen Dreieck die Begriffe Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse abgrenzen.
- 1.2 Die Schüler können in Dreiecken mit beliebigen Bezeichnungen den Kosinus eines Winkels ^{rech.} ~~bestimmen~~ ^{aus den Seiten} (Reorganisation)
2. Die Schüler lernen Anwendungsmöglichkeiten des Kosinus kennen.
- 2.1 Die Schüler können mithilfe des Taschenrechners und geg. Seiten den Winkel berechnen (und umgekehrt) (Reorganisation).

- 2.2. Die Schüler sehen in Figuren Anwendungsmöglichkeiten wie die Berechnung fehlender Seiten und Winkel (Transfer) ⑥
- 2.3. Die Schüler erschließen sich den Kosinussatz (Problemlösen)
- 2.4. Die Schüler grenzen die Verwendung des Kosinus im allgemeinen und rechtwinkligen Dreieck ab. (Transfer)

IV Didaktische Überlegungen

Bei der Einführung muss besonders Wert darauf gelegt werden, dass der Sinus eindeutig definiert ist.

Die Schüler zeichnen den Einheitskreis und tragen an der x -Achse den Winkel an (jedenfalls keinen Sonderfall, irgendetwas $0 < \varphi < 90^\circ$ wählen).

Die Schüler messen die Seiten und stellen fest, dass alle zum gleichen Ergebnis kommen. Hier muss nachgehakt werden, warum das so ist; Schüler sehen oft nicht ein, warum etwas bewiesen werden muss. Nur wenn klar ist, dass es hier zu jedem Winkel eine feste Seitenlänge gibt, ~~dann~~ ergibt es Sinn fortzuführen. Eventuell empfiehlt es sich also, in der Stunde vorher eine kleine Aufgabe, in der Kongruenz vorkommt zu behandeln.

Ebenso sollte auf den ~~den~~ „Beweis“ (der ja sehr kurz ist), dass man ~~das~~ den Kosinus auf das allg. rechtw. Dreieck übertragen kann, entsprechend eingehen. ~~Die Beweisidee~~ Die Beweisidee kann durchaus aus der Klasse kommen.

Bei den folgenden Aufgaben, dem einüben des Taschenrechnergebrauchs, sollten „Kolonnen von Aufgaben“ vermieden werden. Es genügen wenige, man sollte allerdings wichtige Werte hervorheben ($0^\circ, 90^\circ, \sin \varphi = \cos \varphi \dots$) Immer wichtig ist eine klare Abgrenzung eines neuen Begriffs:

Hier ist gemeint, dass man den Kosinus nur im rechth. Dreieck verwenden darf! Das Umstellen der Gleichung sollte ausreichend trainiert werden. Verknüpfungen erleichtern das Lernen; ^{auch} Lernen ist das Aufbauen von Verknüpfungen zwischen Begriffen. Den Schülern muss also gezeigt werden, dass sie mit dem trig. Funktionen Aufgaben lösen können, die sie ~~noch~~ entweder vorher nicht lösen konnten oder dass sie einen alternativen Rechenweg darstellen, der auf das gleiche Resultat führt. Seltsamerweise ist der Satz des Pythagoras bei den Schülern sehr beliebt, doch mithilfe des Kosinus lassen sich mit weniger Umformungen (also weniger Fehlerquellen) oft die gleichen Sachen berechnen. Insbesondere zum Sinus und Tangens hat der Kosinus ja eine besondere Beziehung, sie sollten entsprechend gewürdigt werden. Um einen abwechslungsreichen Unterricht zu gestalten, sollten Aufgaben verschiedenartiger Natur gewählt werden. Zwar wird der Kosinus erst in der 10. Klasse behandelt (und damit sind die Schüler schon kurz vor ihrer Abklausurprüfung), einen Alltagsbezug sollte man dennoch versuchen herzustellen. Zumindest muss auf technische Anwendungen und die Bedeutung der Funktionen in anderen Wissenschaften eingegangen werden (z.B. Physik: Wechselstrom, alle möglichen Schwingungen).

Um sich den Kosinussatz erschließen zu können, werden die Schüler eventuell einige Hilfestellungen benötigen. Man kann beispielsweise den Tipp geben, geeignete Hilfspunkte in ein Dreieck einzzeichnen. Das ist eine typische heuristische Strategie in der Geometrie. Man kann ~~man~~ vorher zeigen, wohin der Beweis gehen soll, also die Formel aufschreiben, sozusagen als Leitfaden zum Buchen der Beziehung.

V ~~Die~~ Ausführung der Unterrichtseinheit

~~Minuten~~

Begonnen wird die Einheit mit der Zeichnung des Einheitskreises, ~~und~~ der Konstruktion des in IV beschriebenen Dreiecks und anschließender Messung der Dreiecksseiten. Es wird gemeinsam nach einer Erklärung für die Eindeutigkeit dieser Konstruktion gesucht. (Medien: Tafel, ~~Heft~~; Schüler-Lehrer-Gespräch)

Es folgt die Erklärung, dass die Seitenlänge im Taschenrechner gespeichert ist (es folgen kurze Übungsaufgaben zur Handhabung). Dann wird der Kosinusbegriff erweitert auf das allg. rech. Dreieck. Die Begriffe Hypothenuse, Ankathete und Gegenkathete werden definiert aus der Notwendigkeit der schnellen Erkennung des Verhältnisses. Es folgt wieder eine kurze Übungseinheit (zuerst ~~mit~~ dann mit konkreten Zahlenwerten). Einige Aufgaben aus der Geometrie können nun gelöst werden. Ich würde eine gemeinsame Aufgabe vorschlagen (an der Tafel) und dann Aufgaben in Partnerarbeit.

Aus ~~meinen~~ didaktischen Überlegungen heraus würde ich nun die Unterrichtseinheit unterbrechen, um den Sinus analog (abgekürzt) zu behandeln: Es soll gleich der Zusammenhang deutlich gemacht werden. Auch eine Einführung des Tangens könnte an dieser Stelle erfolgen, wenn der Sinus bereits vor dem Kosinus eingeführt wurde. Der Zusammenhang $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ wird numerisch begründet und für einige Aufgaben verwendet.

Nun folgt die Sequenz zum Beweis des Kosinussatzes. Mit den vorgeschlagenen Lösungshilfen aus IV erarbeiten sich die Schüler in kleinen Gruppen den Beweis selbstständig.

⑨

Es folgen wieder Anwendungsbezogene Aufgaben. Am Schluss der Einheit soll die Kosinusfunktion noch in ~~eine~~ ein Koordinatensystem übertragen werden. Dazu werden vom Einheitskreis die Ankathetenlängen von versch. Winkeln in ein Kof übertragen, bei dem der Winkel in $x \rightarrow$ Richtung angetragen wird. Die ~~so~~ entstandene Wellenfunktion wird auf Eigenschaften untersucht und techn. Anwendungen gezeigt (Periodenlänge einer Schwingung im ~~der~~ Oszilloskop).