

Nr. 1

g) Definition Teiler einer natürlichen Zahl.

Seien a und b natürliche Zahlen und gibt es eine Zahl $q \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $q \cdot a = b$,

dann heißt a Teiler von b und b heißt durch a teilbar.

Wir schreiben $a|b$ und sagen „ a teilt b “. 1 und n sind ~~ste~~ Teiler von n . Sie heißen triviale Teiler sind echte Teiler.

Die Teilerrelation ist eine Ordnungsrelation, da sie reflexiv, identisch und transitiv ist.

Für ~~alle~~ eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ gilt: $a|a$

Beweis: $a|a \Leftrightarrow a \cdot m = a \quad m \in \mathbb{N} \quad m=1$

Beispiel: $3|3 \Leftrightarrow 3 \cdot m = 3 \quad m \in \mathbb{N} \quad m=1 \quad 3 \cdot 1 = 3$

Identivital bedeutet:

Für ~~alle~~ zwei natürliche Zahlen a und b gilt,
wenn $a|b$ und $b|a$ ^{daraus folgt} ~~dann ist~~ $a=b$.

Beweis:

$$a|b \Leftrightarrow a \cdot m = b \quad (\text{II}) \quad m \in \mathbb{N}$$

$$b|a \Leftrightarrow b \cdot n = a \quad (\text{I}) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(\text{I}) \text{ in } (\text{II}): \quad a \cdot m \cdot n = a \quad , \text{ also } m=1 \text{ und } n=1$$

$$m=1 \text{ in } (\text{II}) \quad a \cdot 1 = b \Rightarrow a=b$$

$$n=1 \text{ in } (\text{I}) \quad b \cdot 1 = a \rightarrow b=a$$

Beispiel:

3|3 und 3|3 dann gilt $3=3$, also

$$3 \cdot 1 = 3$$

Transitivität bedeutet:

Seien a, b und c natürliche Zahlen ^{dann gilt:} ~~und~~ $a|b$ und $b|c$
 daraus folgt ~~dann gilt~~ $a|c$.

Beweis:

$$a|b \Leftrightarrow a \cdot m = b \quad (\text{II}) \quad m \in \mathbb{N}$$

$$b|c \Leftrightarrow b \cdot n = c \quad (\text{I}) \quad n \in \mathbb{N}$$

(II) in (I):

$$a \cdot m \cdot n = c \quad m \cdot n = k \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a \cdot k = c \Rightarrow a|c$$

Beispiel:

3|6 und 6|12 dann gilt 3|12. ~~$3 \cdot 2 = 6$ und $6 \cdot 2 = 12$~~

Desßerdem gelten die spezielle Produktregel, die Summenregel, die Differenzregel und die allgemeine Produktregel.

Spezielle Produktregel bedeutet:

Seien a und b natürliche Zahlen ^{dann gilt} ~~und~~ $a|b$ ^{daraus folgt} ~~dann gilt~~ $a|b \cdot n$.

Differenzregel:

Seien a, b und c natürliche Zahlen ^{dann gilt} ~~und~~ $a \mid b$ und $a \mid c$
 daraus folgt
~~dann gilt~~ $a \mid b - c$, $b > c$.

Allgemeine Produktregel:

Seien a, b, c und d natürliche Zahlen ^{dann gilt} ~~und~~ $a \mid b$ und
 $c \mid d$ ^{daraus folgt} ~~dann gilt~~ $a \cdot c \mid b \cdot d$. * s. S. 3 unten

Nr. 1

b) Summenregel:

Seien $a, b, t \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid a + b$$

Beweis

$$t \mid a \Leftrightarrow t \cdot m = a \quad m \in \mathbb{N}$$

$$t \mid b \Leftrightarrow t \cdot n = b \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a + b = t \cdot m + t \cdot n = t(m + n) \quad m + n = k \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a + b = t \cdot k \Rightarrow t \mid a + b \text{ qed.}$$

*

zu 1a)

Diese Eigenschaften und Teilbarkeitsregeln gelten in allen Stellenwertsystemen, ~~mit~~ und nicht nur im Dezimalsystem.

a) Es gibt Endstellen-, Quersummen- und kombinierte Teilbarkeitsregeln im Zahlensystem

Endstellenregeln:

- Eine natürliche Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihre ^{dezimal-}darstellung auf der Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 endet.
- Eine natürliche Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre ^{dezimal-}darstellung auf der Ziffer 0 oder 5 endet.
- Eine natürliche Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ihre ^{dezimal-}darstellung auf der Ziffer 0 endet.
- Eine natürliche Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die von den letzten beiden Dezimalziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
- Eine natürliche Zahl ist durch 8 teilbar, ~~was~~ wenn die von den letzten drei Dezimalziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
- Eine natürliche Zahl ist durch 25 teilbar, wenn ihre Dezimaldarstellung auf den Ziffern 00, 25, 50 oder 75 endet.
- Eine natürliche Zahl ist durch 50 teilbar, wenn ihre Dezimaldarstellung auf den Ziffern 00 oder 50 endet.
- Eine natürliche Zahl ist durch 100 teilbar, wenn ihre Dezimaldarstellung auf den Ziffern 00 endet.
- Eine natürliche Zahl ist durch 100 teilbar, wenn ihre Dezimaldarstellung auf den Ziffern 000 endet.

Quersummenregeln:

5

- Eine natürliche Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre dezimale Quersumme durch 3 teilbar ist.
- Eine natürliche Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre dezimale Quersumme durch 9 teilbar ist.
- Eine natürliche Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende dezimale Quersumme durch 11 teilbar ist.

Bsp.: 62513 ist durch 11 teilbar, ihre alternierende dezimale Quersumme ist $3 - 1 + 5 - 2 + 6 = 11$.

- Eine natürliche Zahl ist durch 7 teilbar, wenn ihre dezimale Quersumme mit den Gewichten ^{-1 -3 -2} 1, 3, 2, 6, 4, 5 durch 7 teilbar ist.

Bsp.: 689934 ist durch 7 teilbar, ihre dezimale Quersumme mit den Gewichten 1, 3, 2, 6, 4, 5 ist

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 147$$

Kombinierte Regel:

- Eine natürliche Zahl ist durch 75 teilbar, wenn ihre Dezimaldarstellung auf den Ziffern 00, 25, 50 oder 75 endet und wenn sie durch 3 teilbar ist.
- Eine natürliche Zahl ist durch 6 teilbar, wenn ihre Dezimaldarstellung auf der Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 endet und sie durch 3 teilbar ist.
- s. Nr. 26

Kombinierte Regeln lassen sich auf viele verschiedene Arten formulieren.

Zu dieser Formulierung wird die Kombination am deutlichsten:

Eine natürliche Zahl ist durch 75 teilbar, wenn ihre Dezimaldarstellung auf den Ziffern 00, 25, 50 oder 75 endet und ihre dezimale Quersumme durch 3 teilbar ist.

Nr. 2

b) $1 \cdot 18 = 18$ Primfaktorzerlegung
 $2 \cdot 18 = 36$ $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$
 $3 \cdot 18 = 54$
 $4 \cdot 18 = 72$
 $5 \cdot 18 = 90$
 $6 \cdot 18 = 108$

Eine natürliche Zahl ist durch 18 teilbar, wenn ihre Dezimaldarstellung auf der Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 endet und wenn sie durch 9 teilbar ist.

Oder anders formuliert:

Eine natürliche Zahl ist durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.

Auch das ist eine kombinierte Teilbarkeitsregel.
 (* S.S. 15)

Nr. 3

Sachanalyse s. Nr. 1 und Nr. 2

~~Didaktische Analyse:~~

Lehrplanbezug

Diese Unterrichtseinheit ist für die 5. Klasse konzipiert.

Natürliche Zahlen und die Teilbarkeit von natürlichen Zahlen.

Didaktische Analyse:

Man kann die Teilbarkeitsregeln entweder gemeinsam erarbeiten, oder der Lehrer erklärt ~~sie~~ die Regeln und die Schüler prüfen die Regeln nach oder die Schüler ~~versuchen~~ erarbeiten die Regeln selbst, bei Schwierigkeiten bekommen sie natürlich Unterstützung vom Lehrer. Es können jede Unterrichtsstunde mehrere Teilbarkeits-

regeln behandelt werden, oder übergeordnete Unterrichtsstunde nur eine Regel.

Im folgenden Unterrichtseinheit leiten die Schüler die Teilbarkeitsregeln für 2, 5, 10, 3 und 9 in Gruppen selbst her. Da die Endstellenregeln für 2 und 10, eventuell auch für 5, meiner Meinung nach von der Grundschule schon bekannt sind, ist das nicht zu umfangreich. Auf die Quersummenregeln für 3 und 9 werden gemeinsam behandelt, da sie ähnlich sind. Meiner Meinung nach ist es auch sinnvoll die Endstellen- und die Quersummenregel in einer Unterrichtseinheit zu behandeln, da sie beide wichtig sind und sonst das Thema Teilbarkeit ^{regeln} zu sehr auseinandergerissen ist, außerdem sind die Schüler mit dem dividieren an sich ^{ja} schon vertraut.

Da die Schüler die Teilbarkeitsregeln selbst herleiten und ein Plakat aufstegen sind sie am Ende stolz auf ihr „Werk“ und darauf, dass sie selbst eine Regel entdeckt haben. Dies wirkt sehr motivierend.

Durch die Gruppen- und Stationenarbeit wird das soziale Lernen gefördert. ~~Bei der~~ Bei der Gestaltung des Plakats können die Schüler ihre Kreativität freien Lauf lassen.

Bei der Gruppen- und Stationenarbeit kommt Abwechslung und Bewegung in den Unterricht, dies wirkt sich ~~so~~ vor allem auch für auf jüngere Schüler ^(5. Klasse) positiv aus.

Teilbarkeitsüberlegungen spielen besonders beim Bruchrechnen (beim Kürzen) eine wichtige Rolle.

Wichtig sind ~~die~~ ~~den~~ ~~den~~

Schüler Voraussetzungen:

- Die Schüler sind mit den Grundrechenarten vertraut
- Die Schüler beherrschen das $\times$ Einmaleins.
- Die Schüler kennen den Begriff "Quersumme" bereits und können diese berechnen.
- Die Schüler sind mit Gruppen- und Stationsarbeit vertraut.

Lernziele (LZ):

LZ 1: Eine Schülergruppe soll die Endstellenregel für $\sqrt{2}$ herleiten

LZ 2: " " " " 5 "

LZ 3: " " " " 10 "

LZ 4: " " die Quersummenregel für $\sqrt{3}$ " ^{die Teilbarkeit}

LZ 5: " " " " 9 "

LZ 6: Jede Schülergruppe soll ein Plakat erstellen und dieses der Klasse vorstellen.

LZ 7: Die Schüler sollen die Endstellenregeln für die Teilbarkeit durch 2, 5 und 10 anwenden.

LZ 8: Die Schüler sollen die Quersummenregel für die Teilbarkeit durch 3 und 9 anwenden.

LZ 9: Die Schüler sollen möglichst selbstständig in Gruppen arbeiten

LZ: Die Schüler sollen Freude über die selbst entwickelten Regeln ~~haben~~ ^{entwickeln} und sie als sinnvoll und nützlich

Artikulationsmodell:

Artikulationsstufen	Unterrichtsverlauf	Medien / Sozialform
1. Einführung	Der Lehrer schreibt verschieden hohe Zahlen ^{an} die Tafel, die Schüler sollen Teile der Zahlen finden. Alle Zahlen sind durch 2, 5, 10, 3 oder 9 teilbar. (Dies ist aber ohne Wissen der Regel nicht bar. Einfach erkennbar, so lernen die Schüler ^{den} Nutzen der Regel)	Tafel Unterrichtsgespräch
Zilangabe	Wir lernen heute Regeln für die Teilbarkeit durch 2, 5, 10, 3 und 9!	
2. Bearbeitung LZ 1- LZ 6 LZ 9 LZ 10	Die Schüler werden in 5 Gruppen eingeteilt, jede Gruppe soll eine Teilbarkeitsregel herleiten, bei Schwierigkeiten hilft der Lehrer. Die Regel wird dann auf einem Plakat festgehalten und den anderen Schülern vorgestellt. (Jede Gruppe macht ein Plakat und stellt dies den restlichen Schülern vor.)	Gruppenarbeit Plakate
3. Durchführung / Anwendung LZ 10 LZ 7 LZ 8 LZ 9	In vier Stationen werden diese Teilbarkeitsregeln nun angewendet.	Stationenarbeit Arbeitsblätter
4. Sicherung	Die Teilbarkeitsregeln werden vom den Plakaten jedem Schüler von Plakaten ins Heft übertragen	Plakate Heft Einzelarbeit

5. Abschluss

Quiz:

Ein Schüler sagt eine Zahl ruft dann einen anderen Schüler auf, der dann sagt ob die ~~das~~ welche Zahl die genannte Zahl teilbar ist. Liegt er richtig, darf er sich eine Zahl ausdenken usw.

Nächste Beschreibung der Gruppenarbeit in der Erarbeitungsphase:

Die Schüler sollen das jeweilige Einmaleins bis ^{bis 50} 100 notieren und schauen, ob ihnen etwas auffällt. Bei der Endstellenregel werden sie die Regel bestimmt erkennen.

Wenn nichts auffällt sollen die Schüler die Quersummen der Ergebnisse ~~be~~ nehmen und nochmal nachdenken.

Bei ~~sehr unterschiedlichen~~ leistungsstarken einem sehr heterogenen Klasse ist es sinnvoll, dass leistungsfähigere Schüler die Quersummenregeln herleiten und leistungsschwächere Schüler die Endstellenregel.

Beschreibung der Stationen:

1. Station Arbeitsblatt:

① Kreise alle Zahlen, die durch 2 teilbar sind grün ein!

" 5 " blau ein!

" 10 " rot ein!

315

2832

8950

8

821

923

3254

518

3285

12

55

429

- ② Verbinde jede Zahl mit dem größtmöglichen Teiler der Zahl! (Jede Zahl soll nur mit einem Teiler

11

3252 10

8900 5

55 2

218 2

⋮

⋮

2. Station

- ① Berechne die Quersumme der Zahlen!

kreise Zahlen, die durch 3 teilbar sind blau ein!

12

"

9

"

grün ein!

9285 Quersumme: $5 + 8 + 2 + 9 =$

2856

5283

18

325

- ② Verbinde jede Zahl mit dem größtmöglichen Teiler der Zahl!

283 3

5247 9

⋮

⋮

3. Station

12

- ① Ergänze die Zahl so, dass sie durch 2 teilbar ist!

850□

325□

□325

8□58

8□

92□

Gibt es mehrere Möglichkeiten? Begründe deine Antwort!

- ② Ergänze die Zahl so, dass sie durch 5 teilbar ist!
(s.o.)

- ③ Ergänze die Zahl so, dass sie durch 10 teilbar ist!
(s.o.)

4. Station

- ① Ergänze die Zahl so, dass sie durch 3 teilbar ist! (s.o.)

- ② " " " 9 "

- ③ Überlege dir selbst Zahlen die durch 3 oder 9 teilbar sind!

Nr. 4 Definitionen S. 16

Möglichkeiten zur Bestimmung des größtmöglichen gemeinsamen Teilers (ggT):

- 1) Explizite Berechnung der Teilermenge. Das größte Element der Schnittmenge der Teilermengen ^{der beiden Zahlen} ist der ggT

Bsp.: $\text{ggT}(28; 68)$

$$T(28) = \{1; 2; \textcircled{4}; 7; 14\}$$

$$T(68) = \{1; 2; \textcircled{4}; 17; 34\}$$

$$\text{also } \text{ggT}(28; 68) = 4$$

- 2) Bestimmung des ggT mit Hilfe der Primfaktorzerlegung

Bsp.: $\text{ggT}(90; 75)$

$$90 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2$$

$$= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

$$\text{ggT}(90; 75) = \underline{2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1}$$

$$= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

Die kleinsten Potenzen der

$$= 15$$

Primfaktoren, die in beiden Primfaktorzerlegungen vorkommen, werden miteinander multipliziert.

Weiteres Beispiel: $\text{ggT}(68; 28)$

$$68 = 2 \cdot 2 \cdot 17 = 2^2 \cdot 17$$

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7$$

$$\text{ggT}(68; 28) = 2^2 = 4$$

3) S. 16

zu Nr. 2

b) Noch anders formuliert:

Eine natürliche Zahl ist durch 18 teilbar, wenn ihre
Dezimaldarstellung auf der Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 endet
und ihre digitale Quersumme durch 9 teilbar ist.

15

Fehler in der
Nummerierung: "14"
fehlt, Bearbeitung
aber komplett.

3) Bestimmung des ggT mit dem euklidischen Algorithmus

Beispiel: $\text{ggT}(68; 28)$

$$68 = 2 \cdot 28 + 12$$

$$28 = 2 \cdot 12 + 4$$

$$12 = 3 \cdot 4 + 0$$

$$\text{ggT}(68; 28) = 4$$

 $\text{ggT}(90; 75)$

$$90 = 1 \cdot 75 + 15$$

$$75 = 5 \cdot 15 + 0$$

$$\text{ggT}(90; 75) = 15$$

Erklärung:

Die größere Zahl wird durch die kleinere Zahl geteilt

$$68 : 28 = 2 \text{ Rest } 12$$

Dann wird die kleinere Zahl, die 28, durch den Rest (12) geteilt

$$28 : 12 = 2 \text{ Rest } 4$$

Nun wird die 12 durch den Rest 4 geteilt.

Dies wird solange weitergeführt bis der Rest 0 ist, dann kann der ggT abgelesen werden.

Definition:

Seien a und b natürliche Zahlen und $T(a)$ bzw. $T(b)$ ihre Teilmengen, dann besitzt die Schnittmenge $T(a) \cap T(b)$ ein größtes Element. Dieses größte Element ist der größte gemeinsame Teiler von a und b .