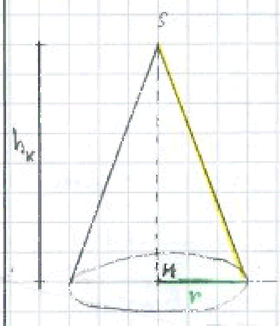
Erste Staatsprüfung für ein
Lehramt an öffentlichen Schulen

Prüfungsort:

1. Erläutern sie den Begriff Kreiskegel!
Gehen sie dabei auch auf verschiedene Möglichkeiten der Erzeugung ein!

Ein Kreiskegel ist ein spitzer Volumenskörper. Seine Grundfläche ist ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.



Die Kanten gehen von der Kreislinie bis zur Spitze S; Die Körperhöhe ist h_K.
Man spricht von von einem geraden Kegel, wenn die Spitze S über dem Kreismittelpunkt M liegt.
Von einem schiefen (Kreis)kegel spricht man, wenn die Projektion der Spitze auf die Grundfläche nicht mit M zusammen fällt.

Das Volumen berechnet sich aus den Produkt:

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h_K$$
$$= \frac{1}{3} G \cdot h_K \qquad G \text{ sei Grundfläche}$$

Die Mantelfläche berechnet sich aus dem Produkt:

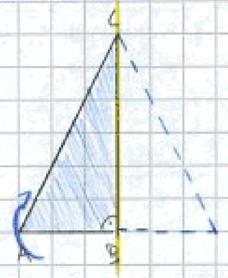
$$M_K = r \cdot \pi \cdot s \qquad s \text{ sei Seitenkante}$$

Die Oberfläche berechnet sich aus:

$$O = G + M_K \qquad M_K \text{ sei Mantelfläche des Kegels}$$
$$= r^2 \pi + r \cdot \pi \cdot s$$
$$= r \cdot \pi (r + s)$$

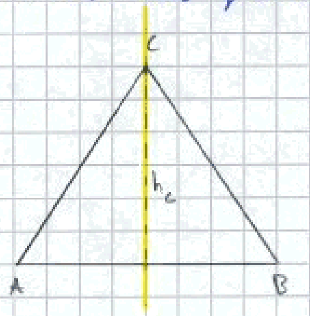
Erzeugt werden können Kreiskegel auf folgende Arten:

- Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks.



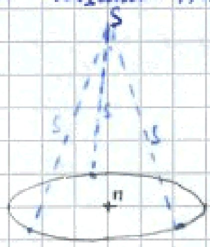
Die Rotationsachse sei $[\overline{BC}]$

- Rotation eines gleichschenkligen Dreiecks



Die Rotationsachse sei h_c

- Eine Kreisscheibe als Grundfläche kann an drei Punkten der Kreislinie mit Schnüren gleicher Länge verknotet werden. Wenn man die freien Enden der Schnüre nimmt und zusammenbringt erhält man die Spitze S;



dreht man jetzt um die Spitze S, wird die Mantelfläche durch die Schnüre beschrieben

2. Beschreiben Sie Schüleraktivitäten, durch die der Begriff des geraden Kreiskegels und wichtige Eigenschaften einsichtig gemacht werden können!

- Alltagswelt:

Schüler (SS) sollen Alltagsgegenstände, Figuren oder Bauwerke mit Kreiskegelform finden; zum Beispiel

Sektgläser

Spielfiguren (Kegel + Kugel)

Türme (Zylinder + Kegel)

Trichter

Faschings-/Geburtstagsmützen

Sanduhr (2× Kreiskegel)

wichtig hierbei wäre die Abgrenzung des geometrische Begriffs Kegel zum Alltagsbegriff Kegel (bei der Sportart).

- Formenkundlich

Beschreiben des Körpers (sollte bekannt sein):

- Kreis als Grundfläche (Umranden auf Papier)
- Körper mit Spitze
- keine Ecken

Analogie zu anderen Körpern herstellen

- Vergleich Pyramide und Kegel (Gemeinsamkeiten, Unterschiede)

Körper zerschneiden (Netz)

Seite: - 4 -

- Konstruktion

Modelle herstellen

- aus vorgegebenen Netz einen Kreiskegel basteln
  Schwierigkeit wären die Klebefalze ein zu zeichnen
- wie oben beschrieben (S. 2):
  Einen Kreis aus Karton ausschneiden in den Mittelpunkt einen Schaschlikstab (als Höhe h_k) einstecken u. mit Schnüren die Mantelseite verdeutlichen.
  zur Stabilität sollte man mindesten drei Schnüre einbauen.

Zeichnen

- Schrägbilder Skizzieren
- Konstruktion in der 2-Tafelprojektion
- Netze konstruieren (mit Berechnungen)

- Berechnung

- Volumen bestimmen durch Umschüttversuche mit Zylinder und höhengleichem geraden Kreiskegel (Grundseite der beiden Körper gleich groß)

  $V_Z = 3 \cdot V_K$

- Teilstrecken berechnen über Pythagoras
  r, s, h_K sollen als Üb

r	geg.	geg.	?
s	geg.	?	geg.
h_K	?	geg.	geg.

...

- Oberfläche berechnen.

ausgetreten
9:05 - 9:08

4 -

F05/473

Durch den Vergleich mit Alltagsgegenständen, soll den Schüler der praktische Bezug einsichtig werden. Man sollte dabei auch auf den Nutzen der Konstruktion eingehen. (Zylinder als Grundform eines Hauses => Kegel als Dach)

Durch beschreiben der Form sollen mathematische Grundbegriffe (Fachsprache) in die Sprache des Schülers einfließen. Auch werden durch Betrachten erste Eigenschaften deutlich

Analogieschlüsse sind eine Möglichkeit um auf die Vermutung zu kommen $V = \frac{1}{3} G \cdot h_k$; hierbei wäre die Analogie zur Pyramide hilfreich.

Beim zerschneiden, Bauen aus Netzen oder bei der Konstruktion der Netze müssen 2-dimensionale mit 3-dimensionalen Vorstellungen verknüpft werden.

In der 2-Tafelprojektion werden zur Berechnung benötigte Teile deutlich.

Die Berechnung schließt alle Kenntniss zusammen.

3. Entwickeln Sie eine Unterrichtseinheit zum Thema „Volumen des Kegels"!

Sachanalyse (siehe oben)

$V_K = \frac{1}{3} G \cdot h_K$ $\quad G \hat{=}$ Kreisfläche

$= \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h_K$

außerdem

$V_Z = 3 \cdot V_K$

$V_Z = r^2 \pi \cdot h_K$ (Volumen Zylinder)

$V_Z = 3 \cdot V_K \quad | : 3$

$V_K = \frac{1}{3} V_Z$

$= \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h_K$ bei gleicher Grundfläche und Höhe

Lernvoraussetzungen:

Vorausgesetzt wird das Verfahren zur Volumenberechnung bei Pyramiden* und deren Zusammenhang mit dem Quader (Quadratsäule)

$V_Q = 3 \cdot V_P$

Weiter wird die Volumensformel des Zylinders vorausgesetzt

$V = r^2 \pi \cdot h_K$

Das oben genannte Verfahren, das in der Hauptschule oft angewendet wird ist der Umschüttversuch der Inhalt (Sand, Wasser) der Pyramide wird in den Quader geschüttet.

Nach 3 maligem Umschütten ist der Quader gefüllt.

Formenkundliche Benennungen / Namen von Körpern soll vorausgesetzt sein, genauso wie deren Eigenschaften.

* quadratische

Methodenanalyse

Der Analogieschluß, der hier nahe liegt, wird mittels Versuch verifiziert.
So kommt der Schüler auf die Allgemeinaussage, daß sich spitze Volumenskörper mit der Formel

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Körperhöhe}$$

berechnen lassen. Für Volumenkörper mit kongruenter Grund- und Deckflächen gilt:

$$\text{Volumen} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Körperhöhe}$$

Wenn so der Schüler die Volumenformel beherrscht, kann er sich die Formel für einen bestimmten Körper „herleiten".

Lernziele:

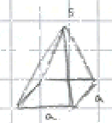
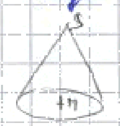
- Grobziel:
  Der Schüler soll das Volumen eines Kreiskegels (gerade) berechnen können

- Feinziele: Die SS sollen ...
  - Unterschiede und Ähnlichkeiten von Spitzen Körpern erkennen.
  - Analogie zwischen Quader und Quadratpyramide und Zylinder und Kegel erkennen.
  - Vermutung durch Ausprobieren verifizieren.
  - Allgemeine Formel für spitze Körper aufstellen.
  - Allgemeine Formel auf Kegel übertragen.

Unterrichtseinheit „Volumen des Kegels"

Artikulationsphase	Unterrichtsverlauf	Medien / Sozialform
Einstieg	- Kopfgeometrie / -rechnen Flächenberechnungen: gegeben a, b gesucht $A_{\square}$ gegeben $A_{\square}, a$ gesucht b gegeben r gesucht d, A_{o} gegeben d gesucht r, A_{o} anhand Aufgaben ~~oben~~ genannten Typs werden SS auf Geometrie eingestimmt, wiederholen grundlegende Berechnungen und wiederholen Grundformen für die Unterrichtsstunde, welche im weiteren Verlauf nochmals benötigt werden. Hier können evtl. Unklarheiten geklärt werden. - Wiederholen Eigenschaften des Quaders ($V = G \cdot h_k$, 8 Ecken, 12 Kanten, 4 Raumdiagonalen, 12 Flächendiagonalen, 6 gegenüberliegende Seiten kongr. ||). Eigenschaften der Pyramide ($V = \frac{1}{3} G \cdot h_k$, Mantel, Spitze, gleich lange Seitenkanten ...)	L-S Gespräch Folie + OH

	Eigenschaften des Zylinders ($V = G \cdot h_k = r^2 \pi \cdot h_k$, Grund- und Deckfläche kongruent und parallel ...)	
Problemstellung	Wir wollen das Volumen dieses Körpers berechnen (Kegel)!	Modell eines Kegels
	Wie heißt der Körper? SS-Antwort: Kegel	
Erarbeitung 1	Schüler sollen Eigenschaften in Partner-arbeit anhand des Modells sammeln	PA
	erwartete Ergebnisse: - GF ist ein Kreis	
	- hat eine Spitze	
	- hat keine Ecken ...	
	Sammeln der Antworten / Eigenschaften an der Tafel	Tafel
	Kennen wir ähnliche Körper?	L-S Gespräch
	erwartete Antworten: Pyramide	
	Vertiefen der ähnlichen Eigenschaften (haben eine Höhe und Spitze, stehen auf einer Grundfläche)	Modell Pyramide
Zwischensicherung	anhand beider Modelle und Sicherung an der Tafel.	Tafel

Erarbeitung 2	kann uns die Ähnlichkeit der Körper Pyramide (quadratisch und gerade) und Kegels von Nutzen sein? In Gruppenarbeit sollen die SS versuchen die Berechnung des Pyramiden-volumens auf die des Kegels zu übertragen und Vorschläge zur Über-prüfung überlegen. Erwartete Volumenformel: $V_K = \frac{1}{3} G \cdot h$ $G = r^2 \pi$ Erwartete Überprüfung: Umschüttversuch Differenzierung: Sollte eine Gruppe schneller sein als die anderen können Sie einen Vergleich mit Skizze zwischen Pyramide und Kegel auf eine Folie schreiben Pyramide  $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ $G = a^2$ $\xrightarrow{\text{Vermutung}}$ Kegel  $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ $G = r^2 \pi$	GA Folie

	Die Vorschläge der einzelne Gruppe werden gesammelt, verglichen und diskutiert. Nun kann die Musterlösung an Overhead erstellt werden, falls sie nicht von einer Gruppe schon gemacht wurde	L-S Gespräch OH
	Jetzt wird die Vermutung dass $V_{Kegel} = \frac{1}{3} V_{Zylinder}$ ist durch umschütten von Sand oder Wasser von Kegel in den Zylinder überprüft Diese Vorgang sollte von Schülern übernommen werden und vielleicht mehr-mals wiederholt werden.	Modell Zylinder, Kegel Wasser/Sand
Ergebnissicherung	Jetzt werden die einzelnen Schritte wiederholt und ggf. Probleme beseitigt. Die Schritte werden an der Tafel vom Lehrer fixiert und von den SS ins Heft übernommen.	L-S Gespräch Heft Tafel

Berechnungen

Falls man noch Zeit hat sollte die oben vollzogenen Handlung des Umschüttens noch mathematisch überprüft werden.
Hierzu müsst die Schüler die benötigten Größen aus den Modellen

$$V_Z = r^2 \pi \cdot h_K = 5cm^2 \cdot \pi \cdot 20cm = 1570{,}80\ cm^3$$
$$V_K = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h_K = \frac{1}{3}(5cm^2 \cdot \pi \cdot 20cm) = 523{,}60\ cm^3$$

$$V_Z = 3 \cdot V_K = 3 \cdot 523{,}\ cm^3 = 1570{,}80\ cm^3$$

Diese Berechnung sollte aber auf alle Fälle durchgeführt werden (nächste Std.)

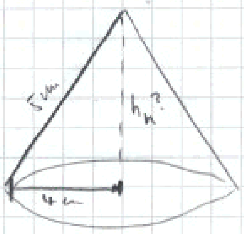
Erste Staatsprüfung für ein
Lehramt an öffentlichen Schulen

F05/473

Prüfungsort: Universität Augsburg

4. Erstellen Sie ein Schrägbild ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) eines stehenden geraden Kreiskegels (Grundkreisradius $r = 4$cm, Mantellinienlänge $m = 5$cm) dessen Grundkreisebene senkrecht zur Bildebene ist! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise

Skizze:



h_k mit PYTH:

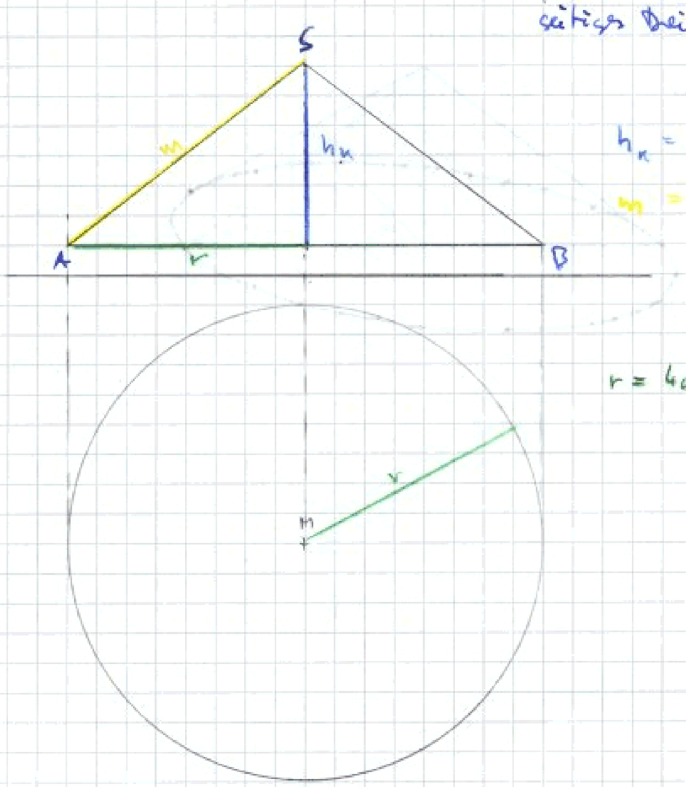
$5^2 = 4^2 + h_k^2$ (3 da pyth. Zahlen)

$25 = 16 + h_k^2 \quad | -16$

$\sqrt{25-16} = \sqrt{h_k}$

$\sqrt{9} = \sqrt{h_k}$

$h_k = 3$ [Konstruktion über gleichseitiges Dreieck ABS]

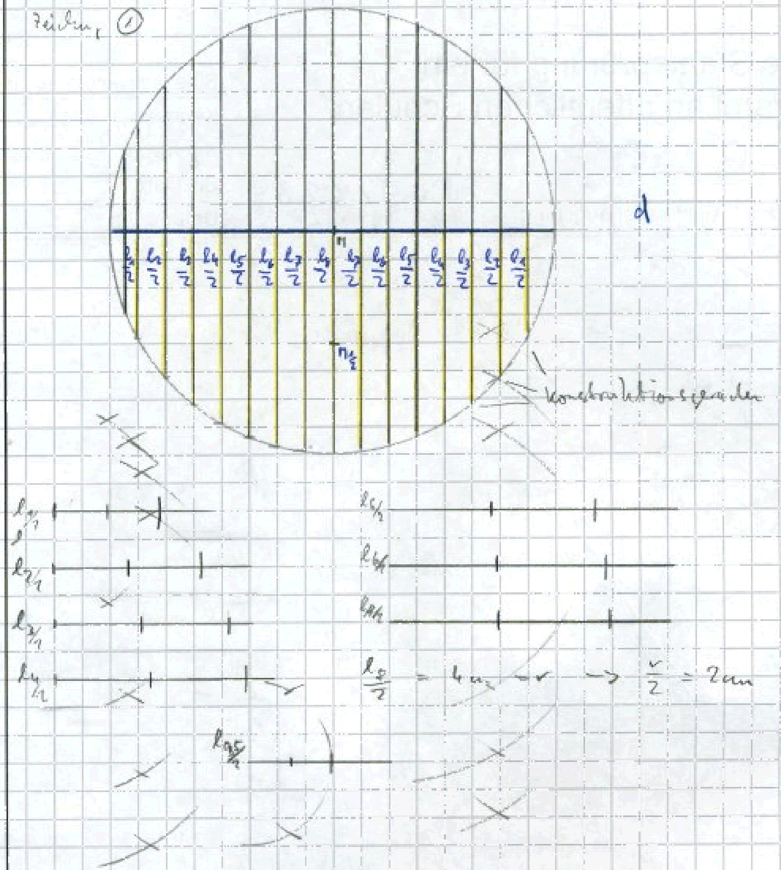


$h_k = 3$cm

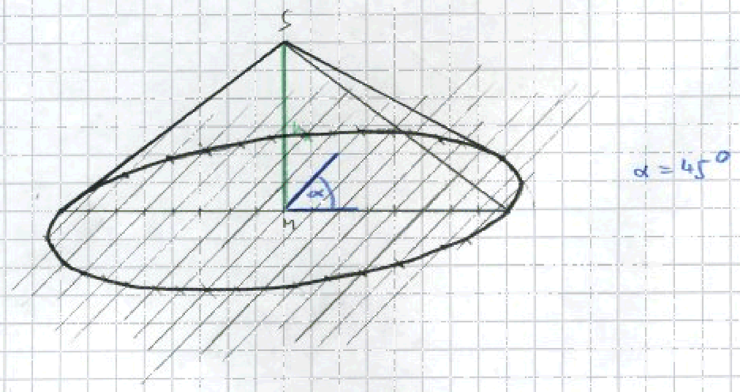
$m = 5$cm

$r = 4$cm

Zeichnung 1



Zeichnung 2



$\alpha = 45^0$

Erläuterung:

1. Kreis (Grundfläche) mit Radius $r = 4cm$ zeichnen
2. Kreis einteilen in Streifen (Senkrechte im Abstand 0,5 cm auf d)
3. Durchmesser $d = 8cm$ in Zeichnung ② waagrecht antragen und auch in 0.5 cm Abstände unterteilen.
4. Da $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 45^\circ$ konstruktionsgerecht in Zeichnung zwei um 45° geneigt antragen.
   $q = \frac{1}{2} \rightarrow l_1\ l_2 \ldots l_8$ halbieren und da sie mit dem Zirkel abgetragen werden müssen, werden sie noch mals halbiert
5. $\frac{l_1}{4}\ \frac{l_2}{4} \ldots \frac{l_8}{4}$ in Zeichnung ② übertragen (von d aus nach oben und unten)
6. da Übergang von d auf $\frac{l_1}{4}$ zu stark erneute Teilung
   $\rightarrow$ Zeichnung ① $l_{0,5/2}$
7. Verbinden der Schnittpunkte zur Kreislinie
8. Antragen der Höhe in M senkrecht auf d -> Spitze S
9. Verbinden der äußersten Punkte der Kreislinie mit S

ausgetreten: 11.32 - 11.36 Oha

Bemerkung fast korrekt