0279

Erste Staatsprüfung
für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
an der Universität
Kennzahl:
Kennwort:
Arbeitsplatznummer:

Thema Nr. 1

1. Erläutern Sie den Begriff Kreiskegel! Gehen Sie dabei auf verschiedene Möglichkeiten der Erzeugung ein!

~~1. Definition Kreiskegel:~~

1.1. Definitionen

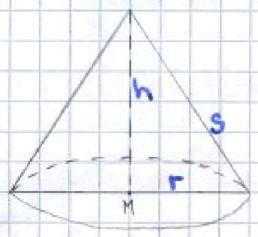
1.1.1 Definition eines Kegels:

Verbindet man alle Punkte einer ebenen Fläche ~~mit einem Punkt, der nicht in dieser Ebene~~, die von einer geschlossenen Linie begrenzt wird, mit einem Punkt, der nicht in dieser Ebene liegt, so ergibt sich aus den Verbindungsstrecken eine Punktmenge, die Kegel genannt wird.

1.1.2 Definition eines Kreiskegels:

Ein Kreiskegel ist ein Kegel mit einem Kreis als Grundfläche.

1.2. Eigenschaften eines Kreiskegels:



~~Bei~~
Bei Kreiskegeln unterscheidet
man zwischen geraden und ungeraden Kreiskegeln. Liegt die Spitze des Kreiskegels direkt über dem Mittelpunkt der Kreisgrundfläche, so spricht man von einem geraden Kreiskegel (Bedingung nicht erfüllt => schiefer Kreiskegel). Der Abstand zwischen der Spitze und der Grundfläche wird mit Höhe bezeichnet. Öffnet man die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels und legt sie flach in eine Ebene, so ergibt sich eine Kreisfläche, bei der ein Kreissegment fehlt. Das Volumen berechnet man mit der Formel $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$, den Oberflächeninhalt bekommt man mit der Formel $S = r\pi(r+s)$ und den Mantelflächeninhalt durch $M = r \cdot \pi \cdot s$.

0279

1.3. Möglichkeiten der Entstehung

Eine Möglichkeit der Entstehung eines geraden Kreiskegels ist es, wie bereits in der Definition erwähnt, wenn man alle Punkte einer Kreisgrundfläche mit einem Punkt, der über dem Mittelpunkt liegt, verbindet.

Eine andere Methode ist, mit Hilfe der Rotation einer Fläche, einen Kreiskegel herzustellen. Hierfür verwendet man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Scheitpunkt des rechten Winkels in M hat. ~~Dieses Dreieck~~ Die Hypotenuse ist mit Länge der Seitenkante s gleichzusetzen. Die Höhe h und der Radius r bilden die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks. Die Kathete h dient als Rotationsachse. Durch Rotation des Dreiecks um diese Achse ergibt sich ein gerader Kreiskegel.

2. Beschreiben sie Schüleraktivitäten, durch die der Begriff des geraden Kreiskegels und wichtige Eigenschaften einsichtig gemacht werden können!

Die Schüler sollten anhand von Modellen das Verständnis für den Begriff des geraden Kreiskegels und wichtigen Eigenschaften vertiefen. Diese Methode arbeitet nach dem Prinzip der Handlungsorientierung. Die Schüler nähern sich anschaulich dem Ergebnis. ~~Sie arbeiten selbstständig~~ Mit Hilfe der Modelle können sie* selbstständig den Begriff geraden Kreiskegel und seine Eigenschaften erarbeiten.

Eine wichtige Eigenschaft eines geraden Kreiskegels ist, dass die Höhe des Kreiskegels senkrecht auf der Grundfläche steht. Diese Eigenschaft kann man gut mit einem Rotationsmodell darstellen. ~~Die Schüler~~ Jeder Schüler zeichnet ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck. Dieses Dreieck klebt man nun so an einen Bleistift mit Tesafilm, dass die Hypotenuse die Seitenkante des Kreiskegels bildet. Durch Drehung

---

* sich

0279

erkennen die Schüler, dass ein Kreiskegel durch Rotations eines rechtwinkligen Dreiecks entsteht. Die Eigenschaft, dass es sich um einen geraden Kreiskegel handelt wird den Schülern während der Herstellung klar, ~~indem der zwischen Grundlin Radius und Höhe~~ *2 Der rechte Winkel liegt zwischen Höhe bzw. Rotations achse und Kathete bzw. Radius, das bedeutet, ~~der g~~ die Spitze des Kreis-kegels liegt senkrecht über dem Mittel-punkt der Grundfläche, dem Kreis.

Als Gegenbeispiel konnte ein Schüler ausgetreten von 9:29 bis 9:31 ~~einen schiefen~~ ein Rotationsmodell eines schiefen Kegels herstellen. Dabei ändert sich die Lage der Rotationsachse, die nicht mehr senkrecht zur Grundfläche verläuft.

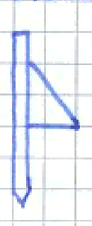
Ein weiteres hilfreiches Modell wäre ein aufgefalteter Kreiskegel, das in einer Ebene liegt. ~~Die Schüler stellen verschiedene Netze von Kreiskegeln her, die sie durch aneinander fügen der Seitenkanten~~ Es ergibt sich ein Kreis, dem ein Kreissegment fehlt. Der Radius entspricht der Seiten-

---

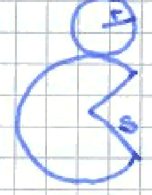
*2 denn

Kante s. ~~An diesem ersten Kreis~~
Dieser erste Kreis entspricht der Mantelfläche. Nun fehlt aber noch die Grundfläche. Dieser Kreis heftet sich an die Mantelfläche. Die Schüler können nun verschiedene Netze herstellen, die durch aneinander fügen der Seitenkanten s und das Hochklappen der Grundfläche ergibt. Hierbei verdeutlicht sich für die Schüler den Aufbau eines Kreiskegels: Kreis als Grundfläche und Kreisfläche mit fehlendem Segment als Mantelfläche. Auch die Herleitung der ~~Mantelflächeninhaltsberechnung~~*3 kann anschaulich gezeigt werden.

Rotationsmodell



Oberflächenmodell



*3 Oberflächeninhaltsberechnung

3. Entwickeln sie eine Unterrichtseinheit zum Thema Volumen des Kegels!

3.1. Einordnung in den Lehrplan

8. Jahrgangsstufe: Geometrie

~~Berechnungen von Oberflächeninhalt und Volumen von Kegel und Pyramide~~

- Grundkonstruktion mit Lineal und Zirkel
- Vielecke
- Schrägbilder; Ansichten
- Umfang und Flächeninhalt von Vielecken
- Umfang und Flächeninhalt vom Kreis
- Kreisbögen, Kreisausschnitt, Kreisring
- Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramide und Kegel

3.2 Sachanalyse

3.2.1 Definition (s. Aufgabe 1) & Eigenschaften

3.2.2 Volumen

3.3 Methodische Analyse

3.3.1 Lernziele:

- Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens der Schüler
- Schüler sollen mit der Volumenformel arbeiten können, um Berechnungen am Kreiskegel durchzuführen
- die Schüler sollen die Formel als Hilfsmittel wahrnehmen

3.4 Unterrichtseinheit: Volumen des Kegels

3.4.1 Wiederholung

Am Anfang einer Mathematikstunde steht die Wiederholung der Inhalte der letzten Stunde. Dies bietet eine Anknüpfungsstelle für die folgenden neuen Inhalten.

Der Lehrer bietet den Schülern am OHP unterschiedliche Aufgaben zur Berechnung verschiedener Oberflächeninhalte.

3.4.2 Einführung

3.4.2.1 Motivation

Um die Schüler auf den neuen Lerninhalt vorzubereiten, versucht man die Stunde motivierend für die Schüler zu beginnen, um das Interesse zu wecken.

~~Mittels einem stummen Impuls~~ Der Lehrer verwendet einen stummen Impuls. Auf dem Pult steht ein Kreiskegel der oben an der Spitze ein Loch besitzt. Ohne Worte füllt er diesen mit gefärbten Wasser aus einer Gießkanne.

Die Schüler beschreiben nun erstmal was sie beobachtet haben. Im Unterrichtsgespräch ~~kommt der Lehrer~~ kommen die Schüler auf die

Problemfrage.

3.4.2.2 Problemfrage

Wieviel Wasser passt in diesen Zylinder?

3.4.3 Erarbeitung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine Antwort auf diese Frage zu finden. Die Schüler stellen einen Lösungsplan auf. Sie erkennen, dass man entweder durch Messungen mit Hilfe eines Meßzylinders auf die Menge kommt oder durch Berechnung des Volumens. Die Schüler dürfen nun erstmal durch Umschütten auf ein Ergebnis schließen, welches dann durch Anwenden der Formel überprüft werden kann. ~~Nun mu~~ In der 7. Klasse berechnete man schon das Volumen eines Zylinders. Diese Vorkenntnis hilft den Schülern auf den Lösungsplan durch Berechnung mit der Formel zu kommen.

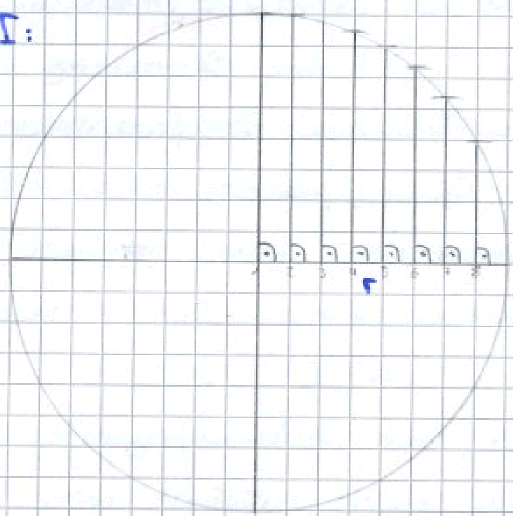
3.4.4 Sicherung

Die Sicherung erfolgt

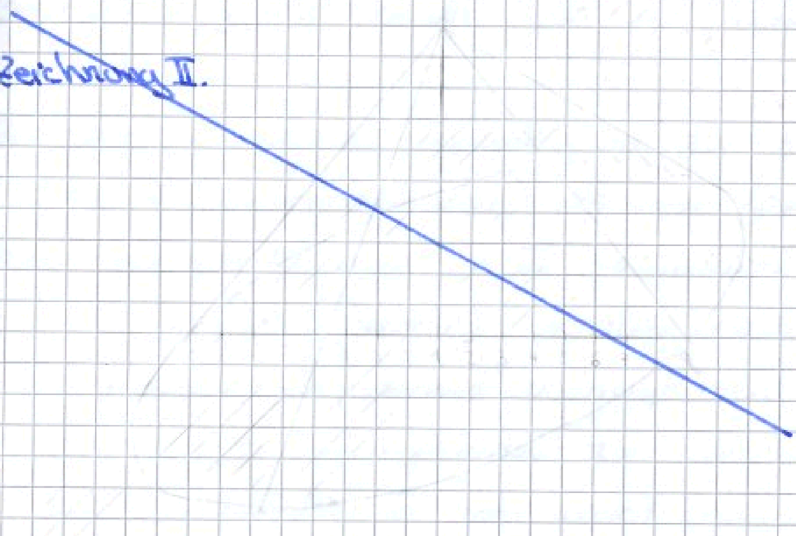
4. Erstellen Sie ein Schrägbild ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) eines stehenden geraden Kreiskegels (Grundkreisradius $r = 4cm$, Mantellinienlänge $s = 5cm$), dessen Grundkreisebene senkrecht zur Bildebene ist! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Zeichnung I:

1): $4 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 2$
2) $3{,}98 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 1{,}99$
3) $3{,}9 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 1{,}95$
4) $3{,}7 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 1{,}85$
5) $3{,}5 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 1{,}75$
6) $3{,}2 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 1{,}6$
7) $2{,}7 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 1{,}35$
8) $2 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 1$



Zeichnung II.



Vorgehensweise:

1. Zeichnen der Kreisgrundfläche mit $r = 4\,cm$ (= Zeichnung I).
2. Kreisfläche vierteln:
3. in einem Viertel Verbindungsstrecken von den Kreispunkten senkrecht auf den Radius r in regelmäßigen Abständen einzeichnen (hier: Abstand = 0,5 cm).
4. Einzeichnen des Durchmessers ($d = 8\,cm$) senkrecht zur Bildebene (= Zeichnung II).
5. Auch hier wird die Einteilung ~~in~~ mit gleichem Abstand vorgenommen (hier: Abstand = 0,5 cm)~~, aber~~.
6. Einzeichnen der Linien in den gekennzeichneten Punkten des Durchmessers, aber unter dem Winkel α ($\alpha = 45°$).
7. Abmessen der Verbindungsstrecken in Zeichnung I. Diese Werte müssen nun halbiert werden, da der Faktor $q = \frac{1}{2}$ vorgegeben ist.
8. Wert der berechneten Strecken in den Zirkel nehmen ~~(aus Zeichnung I)~~ und in Zeichnung II an den entsprechenden Punkten antragen ($1 \to 1$; $2 \to 2$; ...)
   → Schnittpunkte *4 ~~zwei S_1, S_2, S_3, usw~~
9. Verbinden der Schnittpunkte ergibt die elliptische Form der Grundfläche des Kreiskegels.

---

*4 S_1 & S_1'; S_2 und S_2' (auf beiden Seiten des Radius); ....
→ S_2'' und S_2'''

10. Im Punkt 1 einzeichnen der Senkrechten auf den Durchmesser ~~und Wert der berechneten Höhe antragen.~~

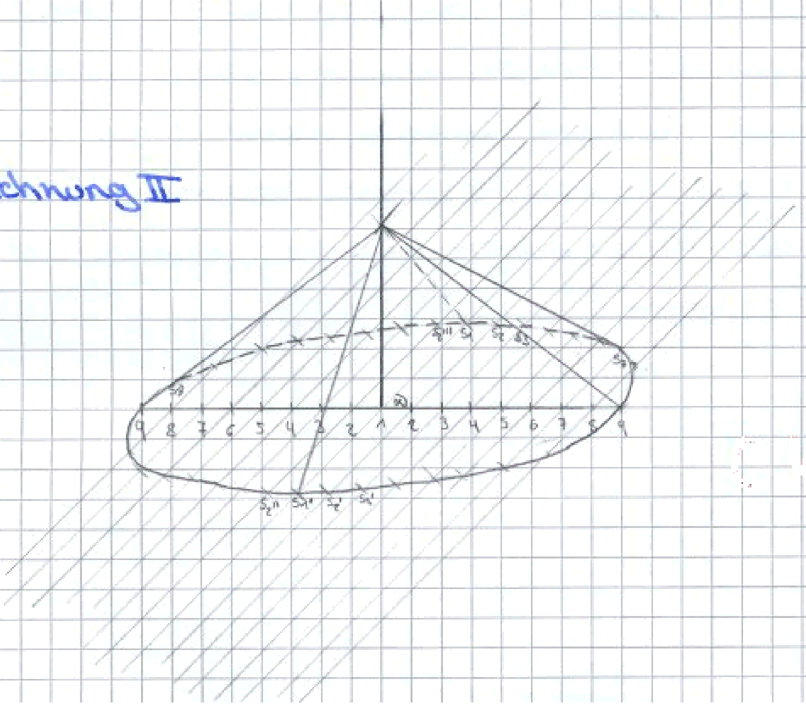
~~(h? Satz des Pythagoras:~~

$$\cancel{s^2 = h^2 + r^2}$$
$$\cancel{h^2 = s^2 + r^2}$$
$$\cancel{h = \sqrt{s^2 + r^2}}$$
$$\cancel{= \sqrt{5^2 cm^2 + 4^2 cm^2}}$$
$$\cancel{= \_\_\_\_\_ cm}$$

Die Senkrechte entspricht der Höhe h in einem Kreiskegel (gerade).

11. Im äußersten Punkt des Durchmessers (Punkt 9) einstechen und den Wert der Mantellinie m = 5 cm antragen.

Zeichnung II



12. Schnittpunkt von Höhe und Mantellinie entspricht der Spitze des Kreiskegels.

13. Verbinden ~~der~~ Spitze mit den Schnittpunkten ~~S_1, S_7, S_8 und~~ S_1, S_1', S_7, S_8 und den Randpunkten 9 und 9' ergeben ein räumliches Schrägbild des Kreiskegels

---

zu 3.

3.4.5 Vertiefung

In der Vertiefungsphase sollen die Schüler weitere Volumenberechnungen durchführen. Aber diesmal soll nicht das Volumen berechnet werden, sondern man verändert die gesuchte Größe, indem man zum Beispiel das Volumen ~~vorgibt, aber~~ und die Höhe vorgibt und der Radius ist unbekannt.