

Und so weiter... Annäherung an das Unendliche – Lösungshinweise –

1 Numerisch und graphisch

1.1 Umfang einer Quadratischen Flocke

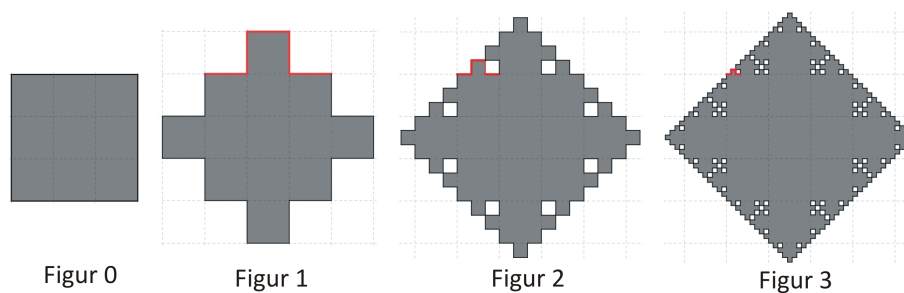


Abbildung 1: Quadratische Flocke mit Seitenlänge $s = 9$.

Der Umfang U_1 der Figur 1 beträgt aufgrund der Seitenlänge $s = 9$ der Figur 0

$$\begin{aligned} U_1 &= 4 \cdot \left(\frac{s}{3} \cdot 5 \right) \\ &= \frac{5}{3} \cdot U_0 = 60. \end{aligned} \quad (1)$$

Für den Umfang U_2 der Figur 2 ergibt sich, wenn das Veränderungsverfahren erneut auf jede Seite von Figur 1 angewandt wird

$$\begin{aligned} U_2 &= 4 \cdot \left(\frac{s}{3^2} \cdot 5^2 \right) \\ &= \frac{5}{3} \cdot U_1 \\ &= \left(\frac{5}{3} \right)^2 \cdot U_0 = 100. \end{aligned} \quad (2)$$

Analog zu Figur 2 gilt für den Umfang U_3 der Figur 3

$$\begin{aligned} U_3 &= 4 \cdot \left(\frac{s}{3^3} \cdot 5^3 \right) \\ &= \frac{5}{3} \cdot U_2 \\ &= \left(\frac{5}{3} \right)^3 \cdot U_0 = \frac{500}{3} \approx 166,67. \end{aligned} \quad (3)$$

Somit kann aus den ersten Folgengliedern die allgemeine Formel für den Umfang U_n einer Figur n mit $n \geq 0$ hergeleitet werden:

$$U_n = 4 \cdot s \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n = U_0 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n, \text{ für alle } n \text{ mit } n \geq 0. \quad (4)$$

In Formel (4) wächst $\left(\frac{5}{3}\right)^n$ für „sehr große n “ über alle Grenzen. Daher existiert für den Umfang U_n keinen Grenzwert.

1.2 Fläche einer Quadratischen Flocke

Im Gegensatz zum Umfang U_n der Figur n lässt sich anhand der Grafiken (siehe Abbildung 1) beim Flächeninhalt A_n auch für „sehr große n “ ein Grenzwert $2 \cdot s^2 = 162$ vermuten.

Aus den Berechnungen der Flächeninhalte der Figur 1

$$\begin{aligned} A_1 &= s^2 + 4 \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^2 \\ &= 117, \end{aligned} \quad (5)$$

Figur 2

$$\begin{aligned} A_2 &= s^2 + 4 \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\left(\frac{s}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 \cdot 5\right) \\ &= 137 \end{aligned} \quad (6)$$

und Figur 3

$$\begin{aligned} A_3 &= s^2 + 4 \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\left(\frac{s}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 \cdot 5\right) + 4 \cdot \left(\left(\left(\frac{s}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^2 \cdot 5\right) \cdot 5\right) \\ &= \frac{1333}{9} \approx 148,11 \end{aligned} \quad (7)$$

lässt sich eine allgemeine Formel für den Flächeninhalt A_n herleiten: Mit $A_0 = s^2$ gilt

$$\begin{aligned} A_n &= s^2 + 4 \cdot s^2 \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^2}\right)^k \cdot 5^{k-1} \\ &= s^2 + \frac{4}{9} \cdot s^2 \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}, \text{ für alle } n \geq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Dies enthält eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{5}{9} < 1$ und damit ist A_n konvergent. Es gilt folgende Grenzwertformel:

$$\begin{aligned} A &:= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \\ &= s^2 + \left(\frac{4}{9} \cdot s^2\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{5}{9}}\right) \\ &= 2 \cdot s^2 = 162. \end{aligned} \quad (9)$$

Somit stimmt der berechnete Grenzwert A mit der intuitiven Lösung $2s^2$ überein.

1.3 Geometrische Reihe

Die Reihe

$$g_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots \quad (10)$$

ist die geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ und

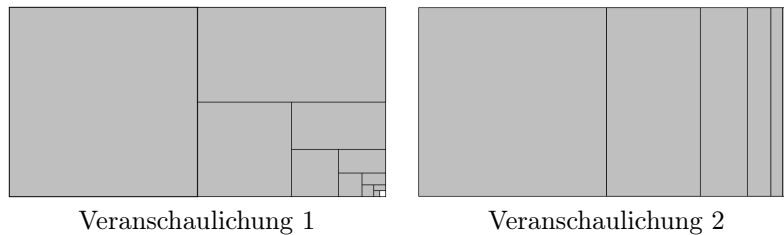
$$g_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k. \quad (11)$$

Durch die Berechnung des Grenzwertes g mit der Grenzwertformel für die geometrische Reihe

$$g = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad (12)$$

bestätigt sich die intuitive Annahme.

Diesen Grenzwert kann man aus geeigneten Veranschaulichungen auch ohne Grenzwertformel schließen. Zwei mögliche Veranschaulichungen sind:



In beiden Veranschaulichungsmöglichkeiten wird jeder Bruch durch eine Vierecksfläche repräsentiert. Setzt man den Inhalt des linken, großen Quadrates in beiden Fällen gleich 1, so entspricht der Flächeninhalt eines jeden Rechtecks genau dem Wert eines Bruches der geometrischen Reihe. Dies geschieht in Veranschaulichung 1 und 2 auf verschiedene Arten: In Veranschaulichung 1 wird für Brüche mit quadratischem Nenner ein Quadrat mit Seitenlänge $a = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gewählt, für alle anderen eine Rechtecksdarstellung mit Seitenlängen $a = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}$ und $b = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2^{n-1}}}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

1.4 Harmonische Reihe

Im Gegensatz zur geometrischen Reihe bestätigen sich beim Grenzwertverhalten der harmonischen Reihe die intuitiven Annahmen nicht.

Denn obwohl die Reihenglieder stets kleiner werden und gegen 0 konvergieren, wächst die Reihe für „sehr große n “ über alle Grenzen.

Aus den graphischen Veranschaulichungen kann man eine Anregung für folgende Beweisidee erhalten. Hierbei werden ausschließlich h_n betrachtet, für die $n = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} h_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

Demzufolge gilt

$$h_n \geq 1 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k 1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot k, \quad (14)$$

weswegen h_n für „sehr große n “ über alle Grenzen wächst.

2 Überraschungen

2.1 Diagonale in Rechteck

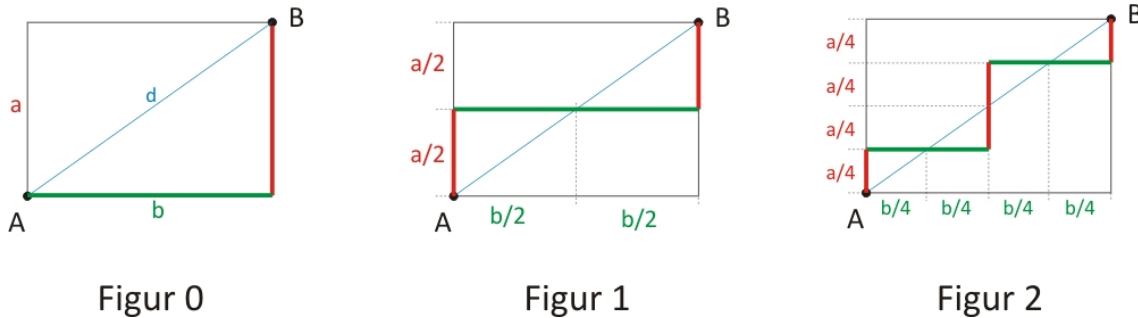


Abbildung 2: Verbindung zwischen Punkt A und B

Anhand von Abbildung 2 gewinnt man den Eindruck, dass durch eine Verkleinerung der Treppenstufen eine Annäherung der Treppenlinie an die Diagonale d im Rechteck mit den Seitenlängen a und b und somit eine Wegverkürzung möglich wäre.

Für die Länge t_1 der Treppenlinie in Figur 1 gilt:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a + b) + \frac{1}{2} \cdot (a + b) \\ &= a + b = t_0 \end{aligned} \quad (15)$$

Nach der Berechnung der Länge der Treppenlinien t_2 aus Figur 2 und t_3 aus Figur 3

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{4} \cdot (a + b) + \frac{1}{4} \cdot (a + b) + \frac{1}{4} \cdot (a + b) + \frac{1}{4} \cdot (a + b) \\ &= a + b = t_0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{1}{8} \cdot (a + b) + \frac{1}{8} \cdot (a + b) + \frac{1}{8} \cdot (a + b) + \frac{1}{8} \cdot (a + b) \\ &\quad + \frac{1}{8} \cdot (a + b) + \frac{1}{8} \cdot (a + b) + \frac{1}{8} \cdot (a + b) + \frac{1}{8} \cdot (a + b) \\ &= a + b = t_0 \end{aligned} \quad (17)$$

erkennt man allerdings, dass auch für „sehr große n “ gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} t_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \cdot \left(\frac{a}{2^n} + \frac{b}{2^n} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a + b) = t_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Im Gegensatz zum optischen Eindruck verkürzt sich die Weglänge nicht, sondern ist stets gleich der Summe der Ausgangsseiten $t_0 = a + b$.

2.2 Halbkreis in Halbkreis

Gleiche Radien. Analog zur Aufgabe „Diagonale im Rechteck“ nähern sich auch hier die aneinandergereihten Halbkreisbögen optisch dem Durchmesser $d = 2 \cdot r$ des großen Halbkreises aus Figur 0.



Abbildung 3: Figurenfolge aneinandergereihter Halbkreise mit gleichen Radien

Dass dies aber für die Länge der aneinandergereihten Halbkreisbögen nicht gilt, wird ersichtlich durch die Berechnung der Länge der Halbkreisbögen der ersten Figuren

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{r}{2} \cdot \pi + \frac{r}{2} \cdot \pi \\ &= \pi \cdot r = h_0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{r}{4} \cdot \pi + \frac{r}{4} \cdot \pi + \frac{r}{4} \cdot \pi + \frac{r}{4} \cdot \pi \\ &= \pi \cdot r = h_0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} h_3 &= \frac{r}{8} \cdot \pi + \frac{r}{8} \cdot \pi + \frac{r}{8} \cdot \pi + \frac{r}{8} \cdot \pi + \frac{r}{8} \cdot \pi + \frac{r}{8} \cdot \pi + \frac{r}{8} \cdot \pi + \frac{r}{8} \cdot \pi \\ &= \pi \cdot r = h_0 \end{aligned} \quad (21)$$

oder allgemein für „sehr große n “

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \cdot \left(\frac{r}{2^n} \cdot \pi \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi \cdot r) = h_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Demzufolge ist auch hier im Gegensatz zum optischen Eindruck die Länge der aneinandergereihten Halbkreisbögen stets gleich der Bogenlänge des Halbkreises aus Figur 0.

Verschiedene Radien. Bei der Formulierung der Aufgabenstellung zur Figurenfolge aus Abbildung 4 muss man bereits erkannt haben, dass auch hier keine Annäherung der Länge der aneinandergereihten Halbkreisbögen an den Durchmesser des ersten Halbkreisbogens möglich ist.

Die Länge der aneinandergereihten Halbkreisbögen mit verschiedenen Radien berechnet sich analog zu der Aufgabe mit gleichen Radien.

Für die Länge des Halbkreisbogens h_0 über dem Durchmesser d gilt

$$h_0 = \frac{d}{2} \cdot \pi \quad (23)$$

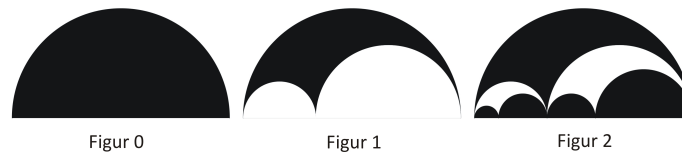


Abbildung 4: Figurenfolge aneinandergereihter Halbkreise mit unterschiedlichen Radien

In Figur 1 wird der Durchmesser in einem beliebigen Verhältnis in die beiden Strecken a und b geteilt. Für die Länge der aneinandergereihten Halbkreisbögen aus Figur 1 folgt

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi \\ &= \pi \cdot \frac{(a+b)}{2} \\ &= \frac{d}{2} \cdot \pi = h_0 \end{aligned} \quad (24)$$

Nachdem das Teilungsverhältnis beibehalten werden soll, gilt analog für die Längen der aneinandergereihten Halbkreisbögen h_2 der Figur 2

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{a}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi \\ &= \pi \cdot \left(\frac{(a+b)}{d} \cdot \frac{a}{2} \right) + \pi \cdot \left(\frac{(a+b)}{d} \cdot \frac{b}{2} \right) \\ &= \pi \cdot \frac{a}{2} + \pi \cdot \frac{b}{2} \\ &= \frac{d}{2} \cdot \pi = h_0, \end{aligned} \quad (25)$$

h_3 der Figur 3

$$\begin{aligned} h_3 &= \frac{a}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi \\ &\quad + \frac{a}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi + \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{d}{2} \cdot \pi \\ &= \pi \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{d^2} \cdot \frac{a}{2} \right) + \pi \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{d^2} \cdot \frac{b}{2} \right) \\ &= \pi \cdot \frac{a}{2} + \pi \cdot \frac{b}{2} \\ &= \frac{d}{2} \cdot \pi = h_0 \end{aligned} \quad (26)$$

oder allgemein für h_n der Figur n

$$\begin{aligned} h_n &= \pi \cdot \left(\frac{(a+b)^{n-1}}{d^{n-1}} \cdot \frac{a}{2} \right) + \pi \cdot \left(\frac{(a+b)^{n-1}}{d^{n-1}} \cdot \frac{b}{2} \right) \\ &= \pi \cdot \frac{a}{2} + \pi \cdot \frac{b}{2} \\ &= \frac{d}{2} \cdot \pi = h_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Demzufolge ist auch hier im Gegensatz zum optischen Eindruck die Länge der aneinandergereihten Halbkreisbögen stets gleich der Bogenlänge des Halbkreises aus Figur 0.

Zu dieser Figurenfolge existieren beliebig viele Variationsmöglichkeiten zur Formulierung der entsprechenden Aufgabe. Hier soll nur ein Beispiel hierfür gegeben werden:

Der Halbkreis der Figur 0 hat den Durchmesser d . In Figur 1 wird der Durchmesser der Figur 0 in einem beliebigen Verhältnis geteilt. Bei jeder weiteren Figur wird über jeder der Teilstrecken ein neuer Halbkreis im selben Verhältnis wie in der vorherigen Figur konstruiert. Wie ändert sich die Summe der Bogenlängen nach jedem Schritt? Berechne die Länge aller Halbkreisbögen, die bei jeder neuen Figur jeweils hinzukommen!

3 Numerisch, Graphisch und Symbolisch

3.1 Kreis in Quadrat

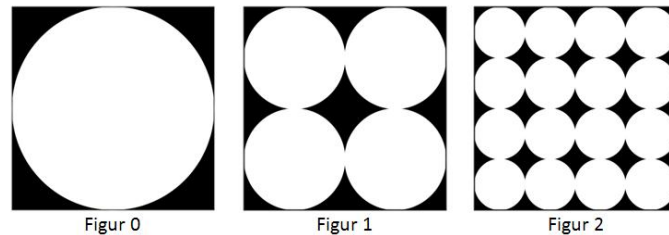


Abbildung 5: Folge von Kreis in Quadrat

Bei der Figurenfolge Kreis in Quadrat (siehe Abbildung 5) erhöht sich bei jedem Folgeschritt die Anzahl der eingeschriebenen Kreise um den Faktor 4 mit Quadratseitenlänge $s = 1$. Dabei stellt sich die Frage, ob sich dadurch am Verhältnis des schwarzen zum weißen Flächeninhalts etwas ändert.

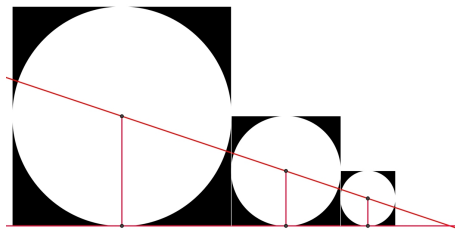


Abbildung 6: Gleichbleibendes Verhältnis der Flächeninhalte von schwarzer und weißer Fläche

In Abbildung 6 ist zu erkennen, dass in jedem Folgeglied Figur 2, Figur 3,..., Figur n die Figur 1 wieder zu finden ist, allerdings um den Faktor $q = \frac{1}{4^{n-1}}$ für alle $n \geq 2$ gestaucht.

$$\begin{aligned} \frac{A_w}{A_s} &= \frac{4^{n-1} \cdot \left(\frac{s}{2 \cdot 4^{n-1}}\right)^2 \cdot \pi}{4^{n-1} \cdot \left(\frac{s}{4^{n-1}}\right)^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (28)$$

Demzufolge bleibt das Verhältnis der Flächeninhalte von schwarzer und weißer Fläche stets konstant, da $\frac{A_w}{A_s}$ unabhängig von der Anzahl der eingeschriebenen Kreise ist.

Somit nimmt die schwarze Fläche $\frac{4-\pi}{4}$ der gesamten Fläche ein, also ungefähr 21%.

3.2 Quadrat im Quadrat

Aus den Eigenschaften des Quadrats ist bekannt, dass sich in ein Quadrat ein Quadrat einbeschreiben lässt. Nach Abbildung 7 ist zu erkennen, dass der Spezialfall gewählt werden soll, bei dem die Eckpunkte des eingeschriebenen Quadrats auf den Seitenmitten des äußeren Quadrats liegen.

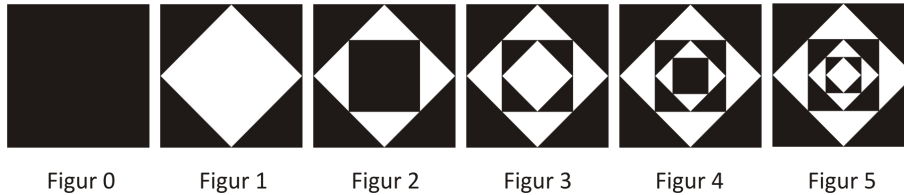


Abbildung 7: Figurenfolge Quadrat in Quadrat

Es sei $s_0 = 1$ die Seitenlänge der Figur 0 und $A_0 = s_0^2$ sein Flächeninhalt. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich für die Seitenlänge s_1 des ersten eingeschriebenen Quadrats:

$$s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s_0. \quad (29)$$

Also beträgt der schwarze Flächeninhalt A_1 der Figur 1

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s_0 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot s_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot A_0 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Nach dem Satz des Pythagoras lassen sich analog zu s_1 die Seitenlängen zur Figur 2

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot s_0 = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

und Figur 3 berechnen

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s_2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \cdot s_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \quad (32)$$

oder allgemein:

$$s_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot s_0. \quad (33)$$

Der schwarze Flächeninhalt der Figur 2

$$\begin{aligned}
 A_2 &= A_1 + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot s_0 \right)^2 \\
 &= s_0^2 - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot s_0 \right)^2 + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot s_0 \right)^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned} \tag{34}$$

und Figur 3 beträgt

$$\begin{aligned}
 A_3 &= A_2 - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \cdot s_0 \right)^2 \\
 &= s_0^2 - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot s_0 \right)^2 + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot s_0 \right)^2 - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \cdot s_0 \right)^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Durch Umformung der Formel (35) erkennt man bereits Regelmäßigkeiten:

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{8} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^0 - \left(\frac{1}{2} \right)^1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^3.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Das wechselnde Vorzeichen einer (alternierenden) Reihe erhält man, indem man auf folgende Gesetzmäßigkeit zurückgreift:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{37}$$

Damit ergibt sich für Formel (36) die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{8} &= \left(\frac{1}{2} \right)^0 - \left(\frac{1}{2} \right)^1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\
 &= (-1)^0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^0 + (-1)^1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^1 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + (-1)^3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \right)^0 + \left(-\frac{1}{2} \right)^1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^3.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Aus diesen Überlegungen lässt sich eine allgemeine Formel zur Berechnung des schwarzen Flächeninhalts der Figur n herleiten:

$$A_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2} \right)^k. \tag{39}$$

Damit kann der schwarze Flächeninhalt der Figur n über eine alternierende geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ berechnet werden. Diese Reihe konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert

$$A_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{3}. \quad (40)$$

Also sind rund 67% der Figur schwarz.

3.3 Dreieck im Dreieck

Aus den Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks ist bekannt, dass sich ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit den Ecken auf den Seitenmitten des größeren Dreiecks einbeschreiben lässt.

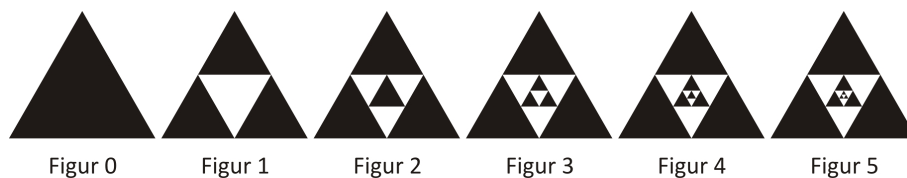


Abbildung 8: Figurenfolge Dreieck in Dreieck

Sei A_0 der schwarze Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks aus Figur 0. Nach Voraussetzung ist $A_0 = 1$. Aus geometrischen Überlegungen ergibt sich, dass das einbeschriebene Dreieck ein Mittendreieck ist und demzufolge der Flächeninhalt des einbeschriebenen Dreiecks $A_{W_1} = \frac{1}{4} \cdot A_0$ sein muss. Demnach beträgt der schwarze Flächeninhalt der Figur 1

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 - \frac{1}{4} \cdot A_0 \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (41)$$

Analog berechnet sich der schwarze Flächeninhalt A_2 der Figur 2 rekursiv aus A_{W_1} bzw. A_0 :

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + \frac{1}{4} \cdot A_{W_1} \\ &= A_0 - \frac{1}{4} \cdot A_0 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot A_0\right) \\ &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}. \end{aligned} \quad (42)$$

Allgemein ergibt sich also für die Berechnung des schwarzen Flächeninhalts der Figur n eine alternierende geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{4}$:

$$A_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k. \quad (43)$$

Diese Reihe konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert

$$A_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{5}. \quad (44)$$

Also sind 80% der Figur schwarz.

3.4 Sechseck im Sechseck

Aus den Eigenschaften eines gleichseitigen Sechsecks ist bekannt, dass sich ein weiteres gleichseitiges Sechseck mit den Ecken auf den Seitenmitten des größeren Sechsecks einbeschreiben lässt.

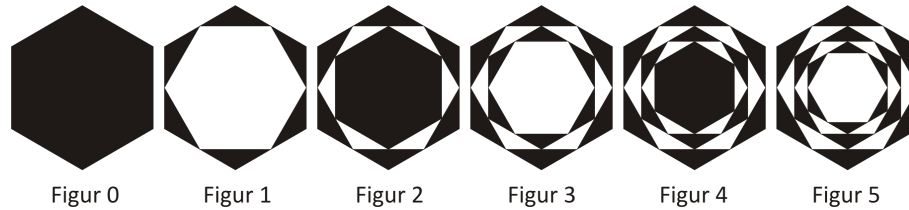


Abbildung 9: Figurenfolge zu Sechseck in Sechseck

Sei s_0 die Seitenlänge des gleichseitigen Sechsecks der Figur 0 und nach Voraussetzung $A_0 = 1$ der schwarze Flächeninhalt der Figur 0.

Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich für die Seitenlängen s_1 des eingeschriebenen Sechsecks¹

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\left(\frac{s_0}{2}\right)^2 + s_0^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} s_0. \end{aligned} \quad (45)$$

Demzufolge gilt für den Flächeninhalt A_{W_1} des eingeschriebenen Dreiecks

$$\begin{aligned} A_{W_1} &= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot (s_1)^2 \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s_0\right)^2 \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot (s_0)^2 \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot (s_0)^2\right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot A_0. \end{aligned} \quad (46)$$

Der schwarze Flächeninhalt der Figur 1 beträgt somit:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 - \frac{3}{4} \cdot A_0 \\ &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (47)$$

Rekursiv lässt sich nach demselben Prinzip der schwarze Flächeninhalt der Figur 2 berechnen:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + \frac{3}{4} \cdot A_1 \\ &= A_0 - \frac{3}{4} \cdot A_0 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot A_0\right) \\ &= 1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} = \frac{13}{16}. \end{aligned} \quad (48)$$

¹Für die Fläche A eines Sechsecks mit Seitenlänge s gilt: $A = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot s^2$.

Aus den ersten Figuren kann eine allgemeine Formel zur Berechnung des schwarzen Flächeninhalts der Figur n hergeleitet werden.

$$A_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{3}{4}\right)^k. \quad (49)$$

Dies ist eine alternierende geometrische Reihe mit $q = \frac{3}{4}$. Sie konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert

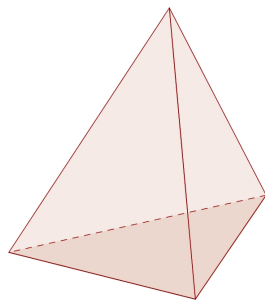
$$A_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(-\frac{3}{4}\right)^k = \frac{4}{7}. \quad (50)$$

Also sind rund 57% der Figur schwarz.

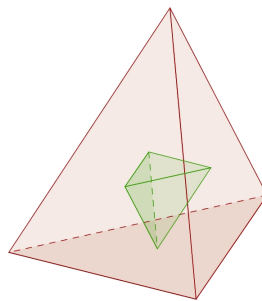
4 Von der Ebene in den Raum

4.1 Tetraeder im Tetraeder

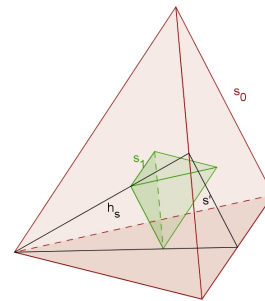
Aus den Eigenschaften Platonischer Körper ist bekannt, dass sich in ein Tetraeder ein Tetraeder einbeschreiben lässt. Die Eckpunkte des eingeschriebenen Körpers liegen dabei stets auf den Seitenflächenmitten des umgebenden Körpers.



Figur 0



Figur 1



Skizze für Berechnung

Es sei s_0 die Kantenlänge des regelmäßigen Tetraeders aus Figur 0 mit $s_0 = a$, so gilt für das ausgefüllte Volumen V_0 der Figur 0

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3. \quad (51)$$

Nachdem der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks die Höhen h_s im Verhältnis 2 : 1 teilt und s' die Seitenlänge des Mittendreiecks zum gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s_0 ist, ergibt sich für die Kantenlänge s_1 des eingeschriebenen Tetraeders T_1 aufgrund der zentrischen Streckung

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s_0\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot s_0 \\ &= \frac{1}{3} \cdot a. \end{aligned} \quad (52)$$

Damit erhält man für das Volumen V_{T_1} des eingeschriebenen Tetraeders

$$\begin{aligned} V_{T_1} &= \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot s_1^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot s_0\right)^3 \\ &= \frac{1}{27} \cdot V_0. \end{aligned} \quad (53)$$

Das gefüllte Volumen V_1 von Figur 1 ist demzufolge

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 - V_{T_1} \\ &= V_0 - \frac{1}{27} \cdot V_0 \\ &= \frac{26}{27} \cdot V_0. \end{aligned} \quad (54)$$

Analog lässt sich die Kantenlänge s_2 und das Volumen V_{T_2} des nächst kleineren Tetraeders von Figur 2 berechnen

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s_1\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot s_0\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot s_0 \\ &= \frac{1}{9} \cdot a \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} V_{T_2} &= \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot s_2^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot s_0\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{27}\right)^2 \cdot V_0. \end{aligned} \quad (56)$$

Daraus ergibt sich für das gefüllte Volumen V_2 der Figur 2

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + V_{T_2} \\ &= V_0 - V_{T_1} + V_{T_2} \\ &= V_0 - \frac{1}{27} \cdot V_0 + \left(\frac{1}{27}\right)^2 \cdot V_0 \\ &= \frac{703}{729} \cdot V_0. \end{aligned} \quad (57)$$

Aus den ersten Figuren kann eine allgemeine Formel zur Berechnung des gefüllten Volumens der Figur n hergeleitet werden:

$$V_n = V_0 \cdot \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{27}\right)^k. \quad (58)$$

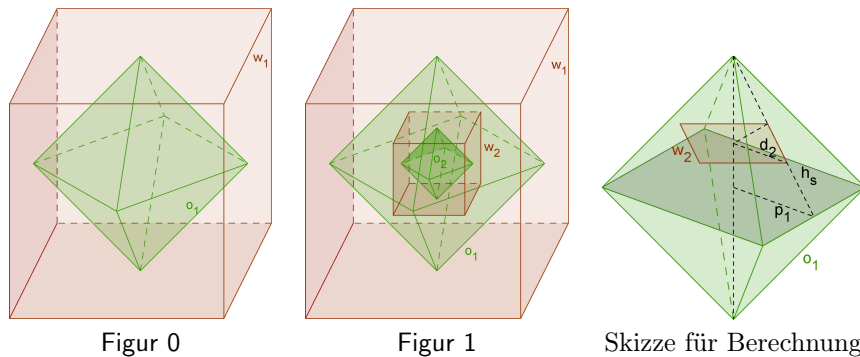
Dies ist eine alternierende geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{27}$. Sie konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert

$$V_{\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 \cdot \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{27}\right)^k = \frac{27}{28} \cdot V_0. \quad (59)$$

Demzufolge sind ungefähr 96% des ursprünglichen Tetraeders V_0 (siehe Formel 51) gefüllt.

4.2 Oktaeder im Würfel

Aus den Eigenschaften Platonischer Körper ist bekannt, dass sich in einen Würfel ein Oktaeder einbeschreiben lässt. Die Eckpunkte des eingeschriebenen Körpers liegen dabei stets auf den Seitenflächenmitten des umgebenden Körpers.



Das Volumen V_{W_1} des Würfels W_1 mit Kantenlänge $w_1 = a$ ist:

$$V_{W_1} = a^3. \quad (60)$$

Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich für die Kantenlänge o_1 des ersten eingeschriebenen Oktaeders O_1 :

$$o_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a. \quad (61)$$

Demzufolge ergibt sich für das Volumen V_0 mit dem ersten eingeschriebenen Oktaeder²

$$\begin{aligned} V_0 &= V_{W_1} - V_{O_1} \\ &= a^3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\right)^3 \\ &= \frac{5}{6} \cdot a^3. \end{aligned} \quad (62)$$

Zur Bestimmung der Kantenlänge des nächstkleineren eingeschriebenen Würfels W_2 ist folgende Vorüberlegung notwendig:

Nachdem die Seitenflächenmitte die Seitenhöhe h_s im Verhältnis 2 : 1 teilt, folgt nach den Gesetzen der Zentrischen Streckung für die halbe Diagonalenlänge d_2 der Würfelseite W_1

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{2}{3} \cdot p_1 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot a\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a. \end{aligned} \quad (63)$$

²Für das Volumen V eines Oktaeders mit Kantenlänge o gilt: $V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot o^3$.

Daraus ergibt sich für die Kantenlänge w_2 des Würfels W_2 nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a\right)^2} \\ &= \frac{a}{3}. \end{aligned} \quad (64)$$

Analog zur Formel (61) gilt für die Seitenlänge o_2 des zweiten Oktaeders O_2

$$o_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a. \quad (65)$$

Demzufolge gilt für das Volumen $V_{W_2-O_2}$ unter Zuhilfenahme der Volumina des Würfels V_{W_2} und des eingeschriebenen Oktaeders V_{O_2}

$$\begin{aligned} V_{W_2-O_2} &= V_1 + V_{W_2} - V_{O_1} \\ &= \frac{a^3}{27} - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{27}\right) \cdot \left(a^3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\right)^3\right) \\ &= \left(\frac{1}{27}\right) V_0 \end{aligned} \quad (66)$$

bzw. allgemein

$$\begin{aligned} V_{W_{n+1}-O_{n+1}} &= \left(\frac{1}{27}\right) \cdot V_{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{27}\right)^n \cdot V_0. \end{aligned} \quad (67)$$

Dies ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{27} < 1$. Damit konvergiert diese gegen den Grenzwert:

$$\begin{aligned} V_\infty &:= \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{27}\right)^k \cdot V_0 \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{27}}\right) \cdot \frac{5}{6} \cdot a^3 \\ &= \frac{45}{52} \cdot a^3. \end{aligned} \quad (68)$$

Damit sind ungefähr 87% ausgefüllt.