

[114] Landschaft als Kulisse der Praktischen Geometrie in Lehrbüchern des 16. und 17. Jahrhunderts

In: Der Mathematikunterricht 62, Heft 2 (2016), 33-40

1. Geometrie in der Landschaft

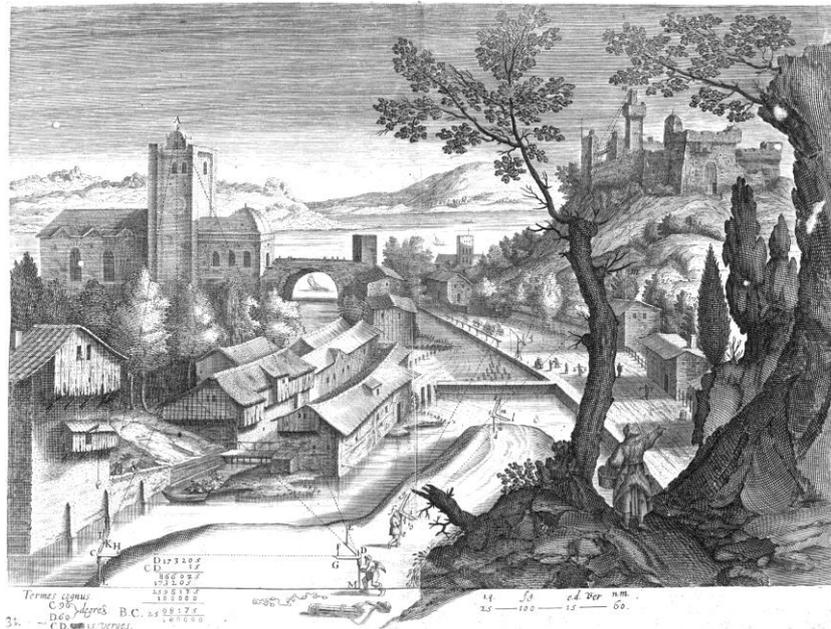


Abb.1: Landvermessung, Marolois 1627

Das Bild dieser Landschaft (Abb. 1) stammt aus der *Geometria* des französischen Mathematikers, Ingenieurs und Baumeisters Samuel Marolois aus dem Jahre 1627. Es findet sich als Höhepunkt einer Serie von geometrischen Zeichnungen im Anhang des Buches. Die Grafik ist künstlerisch gestaltet und erinnert in ihrer Betonung der Perspektive an die zahlreichen Darstellungen von Gebäuden und Landschaften aus dem berühmten Werk von Marolois über die Perspektive (*Perspectiva*,

Amsterdam 1629). Damit gewinnt die Landschaft an Tiefe und Weite. Auf jeden Fall beeindruckt sie den Betrachter unmittelbar.

Erst auf den „zweiten Blick“ erkennt man dünne Linien, die Teile geometrischer Zeichnungen sind. Damit ist unmittelbar klar, dass es sich um eine *funktionale* Grafik handelt, was nach dem Kontext natürlich zu erwarten ist. Ihre Stellung innerhalb des Anhangs mit den Abbildungen und ihre Gestaltung sind sicher nicht zufällig, sondern lassen didaktische Absichten vermuten, da es sich ja um ein *Lehrbuch* handelt.

In der Grafik dominiert also die reich gegliederte Landschaft, die den Betrachter mit Berg und Tal, Fluss und See, Kirche und Burg, Gebäuden auf beiden Seiten des Flusses, Bäumen und Sträuchern beeindruckt. Durch die zerzausten Bäume im Vordergrund gewinnt das Bild an Tiefe. Auch heute noch lädt es zum Besuch dieser Landschaft ein. Und wüsste man nicht auch noch gern, wie hoch die Berge und die Türme und wie breit das Tal und der Fluss sind? Und dann erkennt man die kleinen Menschen dort unten, die mit ihren Messgeräten einzelne Punkte anvisieren. Wie die Frau vorn rechts im Bild staunt, was dort unten geschieht, so soll sicher der Leser staunen, was Landvermesser mit ihren Geräten leisten können. Jetzt endlich beantwortet der Verfasser mit dieser Grafik die fast zwangsläufig auftretende Frage: Wozu soll die ganze Geometrie mit ihren Konstruktionen gut sein? Er befriedigt damit ein grundlegendes Bedürfnis beim Lernen:

- Lernende sollen beim Betrachten der Bilder den *Nutzen der Geometrie* erfahren.

Die Landvermesser wirken in der Landschaft einerseits verloren, andererseits stellen die eingezeichneten Visierlinien einen Eingriff in die Landschaft dar. Diese Linien sind ja nicht von Natur aus dort vorhanden, sondern die Landvermesser und damit auch wir als Betrachter, sehen sie in die Landschaft hinein. Und gilt das nicht auch für die gemessenen Größen? Hat

der Berg von sich aus eine Höhe und hat der Fluss eine Breite? Oder sprechen wir ihnen diese Größen zu? Das sind im Grunde tief gehende philosophische Fragen, die das Wesen der Geometrie und letztlich der gesamten Mathematik berühren. Das Bild scheint dafür zu sprechen, dass der Mensch der Natur die Geometrie aufprägt. Dass das funktioniert, ist das Ergebnis von geometrischen Einsichten, die letztlich vom Menschen entdeckt worden sind. Für das Lehren von Geometrie bedeutet das:

- Den Lernenden soll bewusst werden, dass Geometrie in der Landschaft *entdeckt* und Praktische Geometrie der Landschaft *aufgeprägt* werden kann.

Was die Landvermesser auf dem Bild machen und wozu sie dies tun, lässt sich erkennen. Wie sie das konkret machen und warum das funktioniert, setzt allerdings Kenntnisse voraus. Marolois hat diese im vorangehenden Text und auch geometrischen Zeichnungen vermittelt. Das erklärt die Stellung des Bildes hinten in seinem Buch. Und auch das ist das Ergebnis einer Einsicht über das Lernen:

- Praktische Geometrie lernen setzt *geometrische Kenntnisse* voraus.

Aber noch einmal „zurück zur Natur“ in der Grafik. Sie ist eine geschickte Komposition des Grafikers, die weitgehend authentisch ist. Und doch ist das Bild eine „inszenierte“ Darstellung mit der Natur als Kulisse. Das mag dann doch enttäuschend sein. Aber wäre nicht auch eine entsprechende Fotografie letztlich inszeniert?

- Landschaftsbilder stellen eine *Inszenierung für das Lehren* von Praktischer Geometrie dar.

Das Landschaftsbild aus dem Buch von Marolois sehe ich als den künstlerischen Höhepunkt der Tradition in den Lehrbüchern der Praktischen

Geometrie seit dem 16. Jahrhundert. Mit den folgenden Betrachtungen sollen Anregungen für einen Geometrieunterricht gegeben werden, in dem die Lernenden Geometrie entsprechend dem Wortsinn als *Erd-Messung* erfahren und angeregt werden, selbst im Freien zu messen.

2. Geometrische Probleme in der Landschaft

Zum einfachen Messen von Entfernungen, Breiten, Höhen und Tiefen in der Landschaft dienen von jeher Messlatten, Messketten, Messbänder und Messräder. Davon vermittelt die Abbildung (Abb. 2) aus dem *Bericht zu M. Jobsten Burgi seligen Geometrischen Triangular Instruments* aus dem Jahr 1648 von Benjamin Bramer einen Eindruck. Auch hier ist wieder detailliert die Landschaft dargestellt, wobei es jetzt Tiere sind, die den Landvermessern interessiert zuschauen.



Abb.2: Direkte Entfernungsmessung, Bramer 1648

In der Praxis setzt allerdings die Landschaft diesen Messgeräten häufig Widerstände entgegen. Das kann z. B. die Höhe eines Berges oder ein See zwischen zwei Orten sein, die eine direkte Messung mit einem der genannten Instrumente unmöglich machen.

Geht es darum, den Lesern typische Probleme bewusst zu machen, dann beschränken sich die Abbildungen auf das Wesentliche. Sie wirken daher abstrakter und künstlicher. Ein typisches Beispiel findet sich in der *Introductio geographica* von Petrus Apian aus dem Jahr 1533a (Abb. 3). Typisch sind hier die etwas zu groß abgebildeten Personen mit ihren Messinstrumenten und den eingezeichneten Messlinien.



Abb. 3: Vielfältige Messungen mit dem Jakobsstab, Apian 1533a

Doch auch hier findet man wieder Tiere, die Realität signalisieren sollen. Das Bild beschränkt sich auf drei Probleme: die Bestimmung der *Position des Mondes gegenüber einem Fixstern* (etwa dem Polarstern), der *Höhe eines Turmes* in einem Teich und der *Entfernung eines Turmes*. Die eingezeichneten Linien lassen erkennen, dass Winkel gemessen werden und dass ein bestimmtes Messinstrument verwendet wird: der *Jakobsstab*.

Das Bild ist darauf angelegt, dem Leser grundlegende Probleme bewusst zu machen und Lösungsmöglichkeiten aufzuzeigen, denn die Erfahrung zeigt:

- Probleme des Messens und ihre Lösungen stellen in der Praktischen Geometrie eine wichtige *Quelle für das Lernen von Geometrie* dar.

Im Unterricht ist ein derartiges Bild geeignet, Fragen auszulösen: Was machen die Männer? Worum geht es ihnen? Was messen sie? Womit messen sie? Wie funktioniert das Messgerät? Im Prinzip kann man diese Fragen schon an diesem Bild klären. Doch ist es auch lohnend, sich näher mit den einzelnen Problemen und ihren Lösungen zu befassen. Wir wollen uns hier auf die Höhen- und die Entfernungsmessung beschränken.

3. Geometrische Lösungen zur Messung unzugänglicher Höhen

Eine lustige Lösung zur Bestimmung der Baumhöhe findet sich bei Daniel Schwenter in seiner *Geometria practica nova* von 1667 (Abb. 4). Der Mann auf dem Boden visiert über eine Stabspitze die Spitze des Baumes an. Er kennt die Strecken AC (Augenhöhe), BC (Stabhöhe) und AE (Entfernung des Baumstamms) und kann nun nach dem *Strahlensatz* aus der Gleichung $DE : BC = AE : AC$ die Baumhöhe DE berechnen.

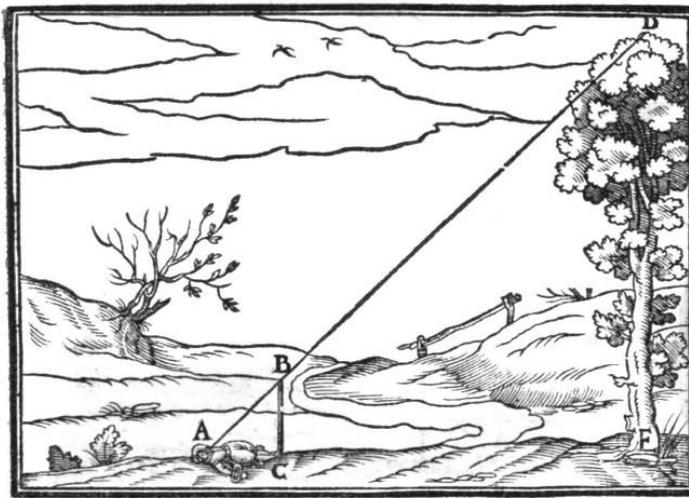


Abb. 4: Bestimmung der Baumhöhe. Schwenter 1667

In dieser Abbildung ist die Landschaft stilisierte Kulisse für die Darstellung der Höhenmessung. Neben der Linie vom Auge zur Baumspitze sind die fünf markanten Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, *E* eingezeichnet. Denkt man sich die Linie *AF* eingezeichnet, so hat man die Figur zum Strahlensatz, der die Lösung liefert. Es fehlen freilich auch nicht die begleitenden Tiere – hier die beiden Vögel.

Die historischen Bücher haben freilich auch „richtige“ Messungen aufzuweisen. So zeigt Georg Galgemair 1616 in seinen *Inventum P. Apiani*, wie man von einer *Standlinie* bekannter Länge aus durch Messung zweier Winkel die Turmhöhe und dann auch den Abstand zum Turm bestimmen kann (Abb. 5).



Abb. 5: Bestimmung der Turmhöhe durch Winkelmessung von den Enden einer Standlinie aus, Galgemaier 1616

Die Landschaft ist in diesem Fall überladen. Eine Fülle von Details ist geeignet, vom Wesentlichen abzulenken. Neben dem unvermeidlichen Tier sind auch verschiedene unbeteiligte Menschen zu erkennen. Immerhin wird deutlich, dass die Turmhöhe wegen des Flusses, in dem der Turm steht, nicht direkt messbar ist. Dass die Zeichnung so viele Details enthält, kann man damit begründen, dass das eben typisch für die Realität sei. Dort müsse man sich ja auch erst die relevanten Daten herausuchen. Die *Redundanz* der Abbildung ist also gewollt.

- Detaillierte Landschaftsbilder in Lehrbüchern machen deutlich, dass erfolgreiches Anwenden von Geometrie in der Praxis die Fähigkeit erfordert, aus der Realität die *relevanten Daten* zu erfassen.

In der Zeichnung kann man die Länge der Standlinie mit 12 (Klafter) ablesen. Im Text werden die gemessenen Winkel mit 42° bzw. 66°

angegeben. Auch die gesuchte Höhe ist in der Zeichnung mit 18 (Klafter) angegeben. Sie könnte zeichnerisch bzw. rechnerisch bestimmt worden sein.

Bemerkenswert ist, dass in der Zeichnung zwei Stationen der Messung eingezeichnet sind. Man kann das so sehen, dass zwei Landvermesser an den Enden der Standlinie gleichzeitig die Winkel messen. Doch realistischer ist es, dass die verschiedenen Stationen eines einzigen Landvermesser dargestellt worden sind. Mit diesem Trick erhält die Zeichnung eine *Dynamik*, die den Messvorgang deutlich macht.

Mathematisch interessant ist bei beiden Lösungen, dass man auf dem Umweg über Dreiecke, eine gesuchte Länge bestimmt. Im ersten Fall gelingt das über Längenmessungen, im zweiten Fall benötigt man neben einer Längenmessung zwei Winkelmessungen. Im Unterricht wird man nicht nur die Lösung selbst erarbeiten, sondern den Lösungsweg reflektieren:

- Erfolgreiches Lösen von Problemen der Praktischen Geometrie sollte beim Studium von Landschaftsbildern in Lehrbüchern reflektiert werden, um den Lernenden *Lösungsstrategien* zu vermitteln.

4. Geometrische Lösung zur Messung unzugänglicher Entfernungen

Auch das Problem der Entfernungsmessung lässt sich über einen Umweg lösen. Sehr deutlich tritt die Lösungsidee bei Kaspar Schott in seinem *Pantometrum Kircherianum* 1660 hervor (Abb. 6). Es geht darum, die Entfernung eines Wasserschlosses vom Ufer des Sees zu bestimmen. Durch die Konzentration auf das Wesentliche und Typische in der Abbildung tritt das Problem sehr deutlich hervor. Das eingezeichnete Dreieck weist auf die Lösungsidee hin: Von den Endpunkten einer frei gewählten Standlinie am Ufer wird ein Punkt des Schlosses anvisiert. Mit den beiden dabei gemessenen Winkeln und der Länge der Standlinie ist das Dreieck im

Gelände eindeutig bestimmt. Damit lässt sich nun die Länge der gesuchten Dreiecksseite bestimmen.

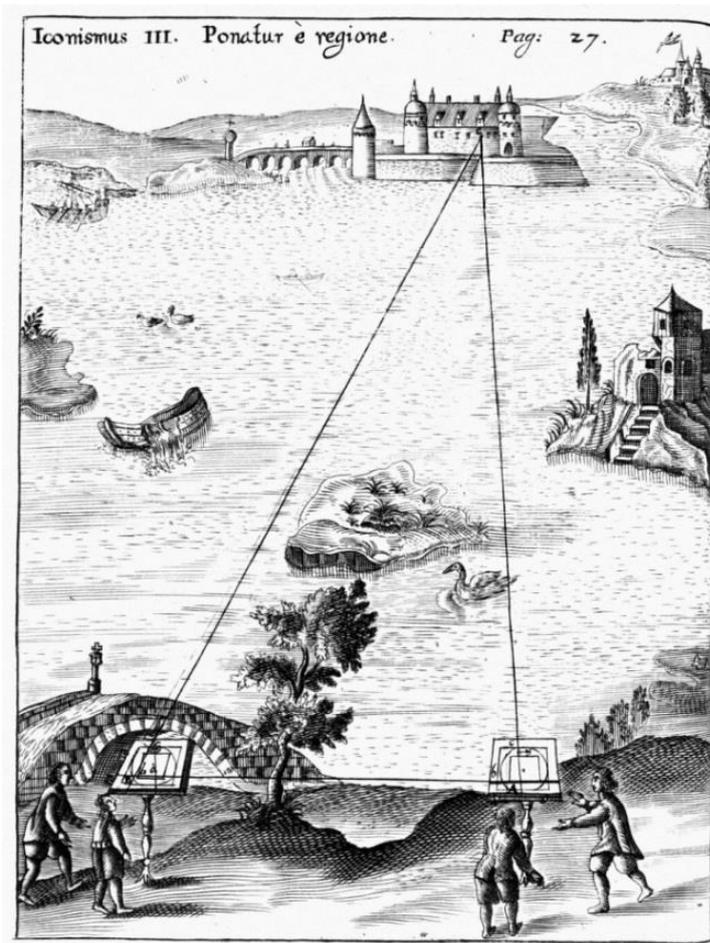


Abb.6: Bestimmung der Entfernung des Wasserschlosses vom Ufer, Schott 1660

Dieses Verfahren wird in der Landvermessung als *Vorwärtseinschneiden* bezeichnet. Mathematische Grundlage ist die Einsicht, dass ein Dreieck mit einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln eindeutig bestimmt ist. Dieser Sachverhalt wird in der Geometrie als ein Kongruenzsatz formuliert. Als Grundlage eines so wichtigen Messverfahrens können die Lernenden seinen Wert erkennen:

- Lernende können und sollen in der Praktischen Geometrie den Wert *geometrischer Sätze* als Grundlage von Problemlösungen erkennen.

Als Randbemerkungen sollen auch bei dieser Abbildung einer Landschaft auf ihre Dynamik durch Darstellung verschiedener Stationen beim Messen und auf die unnatürlich vergrößerte Darstellung einiger Objekte (Personen, Instrumente) verwiesen werden, wodurch für das Verständnis Wesentliches betont wird. Auch hier kann man wieder die anscheinend unvermeidlichen Tiere beobachten.

5. Landschaften als Wegbereiter für Messinstrumente

Es fällt bei den Abbildungen aus unterschiedlichen Büchern auf, dass verschiedene Messinstrumente auftreten. Manche Bücher verwenden unterschiedliche Geräte, andere beschränken sich auf ein bestimmtes Gerät in verschiedenen Situationen.

Bereits auf dem Titelblatt zeigt Petrus Apian in seinem *Instrumentbuch* 1533b verschiedene Instrumente zur Winkelmessung. Dieses Bild (Abb. 7) kann im Unterricht als Einstieg zum Thema „Winkelmessung im Gelände“ z. B. im Rahmen eines *Projekts* gewählt werden. Es gibt hier einiges zu entdecken. Wieder dient Landschaft dazu, auf bestimmte Anwendungssituationen optisch hinzuweisen.

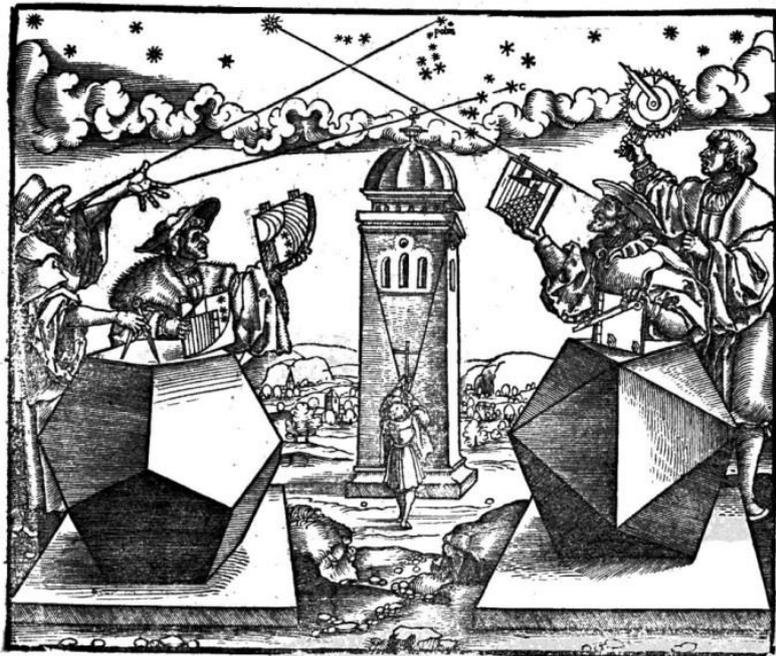


Abb. 7: Vermessungsinstrumente, Apian 1533b

Andere Bücher zeigen ein bestimmtes Instrument in unterschiedlichen Anwendungssituationen. Ein Beispiel sind die beiden Abbildungen (Abb. 8 und 9) zum Jakobsstab aus mehreren weiteren Abbildungen in der *Geometrie* von Jacob Köbel ebenfalls aus dem Jahr 1535.



Abb.8: Messung der Turmhöhe mit dem Jakobsstab, Köbel 1535

Abb. 9: Messung der Fensterbreite mit dem Jakobsstab, Köbel 1535

- Bilder eines Messverfahrens in unterschiedlichen Situationen fördern die Fähigkeit des *Transfers* in der Praktischen Geometrie.

Sie bieten damit viele Beispiele zur Analyse in *Einzel-* und *Gruppenarbeit* im Unterricht.

Didaktisch interessant sind auch *Folgen von Bildern*, in denen die Komplexität gesteigert wird. Beispiele finden sich in Leonhard Zublers Buch *Novum instrumentum geometricum* aus dem Jahr 1614, in dem er Reklame für seinen *Messtisch* macht. An zwei Beispielen (Abb. 10 und 11) zeigen wir, wie er didaktisch geschickt in der Landschaft die Komplexität der Probleme steigert, wobei immer auf das gleiche geometrische Prinzip aufgebaut wird.

In diesem Fall geht es darum, immer mehrere Entfernungen in einer Landschaft möglichst geschickt nacheinander zu bestimmen. Hier zeigt sich die Geschicklichkeit in der Wahl einer einzigen Standlinie. Auch damit lässt sich den Lernenden eine wichtige Einsicht vermitteln:

- Durch geschickte Planungen lassen sich *komplexe* Aufgaben der Praktischen Geometrie auf einfache Grundaufgaben zurückführen und damit bewältigen.

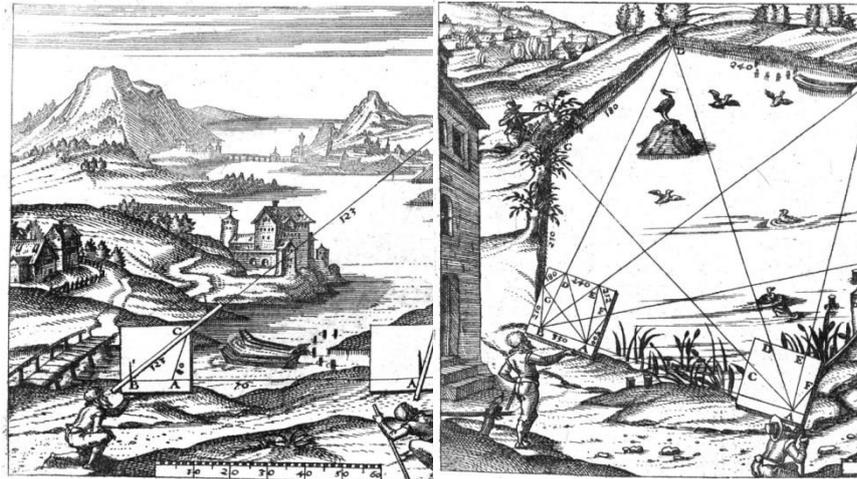


Abb. 10: Entfernungsmessung von einer Standlinie aus, Zubler 1614

Abb. 11: Mehrfache Entfernungsmessung von einer Standlinie aus, Zubler 1614

6. Verschiedene Methoden zur Auswertung der Messergebnisse

Die Bilder zeigen das Messen von Längen und Winkeln in Landschaften. Teilweise werden zur Orientierung Punkte mit Buchstaben hervorgehoben, gelegentlich werden sogar Daten eingetragen. Für die Auswertung dieser Messungen lassen sich in den Lehrbüchern zur Praktischen Geometrie im Wesentlichen drei Methoden feststellen.

Leonhard Zubler macht in seinem Buch Reklame für seinen *Messtisch*. Zunächst wird auf dem Messtisch eine Verkleinerung der Standlinie

gezeichnet. Mit Hilfe eines Visierlineals wird von den Enden der Standlinie aus das Ziel anvisiert. Dabei wird der Messtisch so gehalten, dass das Bild der Standlinie auf dem Messtisch parallel zur Standlinie verläuft. Beim Anvisieren werden mit Hilfe des Lineals die Visierlinien gezeichnet. Dabei entsteht ein Dreieck, das dem Messdreieck in der Landschaft ähnlich ist. Misst man die Länge l' der gezeichneten Standlinie der Länge l sowie die Länge d' der gesuchten Entfernung d , so erhält man daraus wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke: $d : l = d' : l'$. Damit kann man d berechnen. Das Problem ist also im Wesentlichen *zeichnerisch* gelöst.

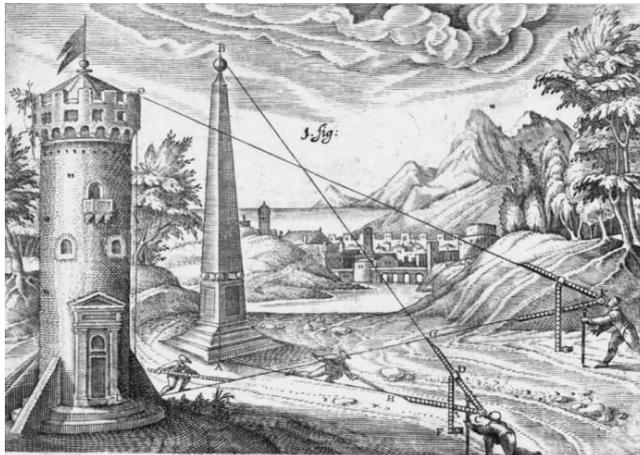


Abb. 12: Triangularinstrument von Bürgi, Bramer 1648

Man kann jedoch auch aus der Seitenlänge und den beiden anliegenden Winkelmaßen mit Hilfe der Trigonometrie auf der Grundlage des Sinussatzes *rechnerisch* eine Lösung finden.

Schließlich hat Jobst Bürgi ein Messdreieck erfunden, das sich beim Messen so einstellt, dass es dem Dreieck in der Landschaft ähnlich ist (Abb.

12). Am Triangulinstrument kann man unmittelbar die gesuchte Länge ablesen. Es handelt sich dabei um eine *technische* Lösung.

- Landvermessungsaufgaben lassen sich auf *unterschiedlichen mathematischen Niveaus* lösen und erlauben damit im Unterricht die Anpassung an unterschiedliche Altersstufen.

7. Literatur

Hier zunächst die zitierte *historische* Literatur.

Apian, Petrus (1533a): *Introductio geographica*, Ingolstadt (lateinisch), BSB, Sgn. Hbks/R 2 gd.

Apian (1533b), Petrus, *Instrumentbuch*, Ingolstadt 1533 (deutsch), BSB, Sgn. Hbks/R 2 ge.

Bramer, Benjamin (1648), *Bericht zu M. Jobsten Burgi seligen Geometrischen Triangular Instruments*, Kassel (deutsch), BSB, Sgn. 4 Math.a.46.

Galgemair, Georg (1616): *Inventum P. Apiani*, Augsburg (deutsch), BSB, Sgn. Hbks/R 30 dv.

Köbel, Jacob (1535): *Geometrei*, (deutsch), SLUB, Sgn. 6. A.3350 angeb.1.

Marolois, Samuel (1627): *Geometria*, Amsterdam (deutsch), BSB, Sgn. 2 Math. p. 33.

Marolois, Samuel (1629): *Perspectiva*, Amsterdam (deutsch), BSB, Sgn. 2 Math. a. 61.

Schott, Kaspar (1660): *Pantometrum Kircherianum*, Frankfurt (lateinisch) BSB, Sgn. 4 Math.a. 279.

Schwenter, Daniel (1667): *Geometria practica nova*, Nürnberg (deutsch), BSB, Sgn. 4 Math. p. 337.

Zubler, Leonhard (1614): *Novum instrumentum geometricum*, Basel (deutsch), BSB, Sgn. 4 Math. a. 336.

Alle diese Bücher sind in der Bayerischen Staatsbibliothek München (BSB) oder der Sächsischen Landesbibliothek, Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) vorhanden und digital über das Internet zugänglich. Die Abbildungen wurden diesen Werken entnommen.

In der *didaktischen* Literatur finden sich zahlreiche Hinweise auf praktische Arbeiten zur Landvermessung mit selbst hergestellten Instrumenten, die sich an bekannte historische Instrumente wie Jakobsstab, Visierlineal und Messtisch anlehnen. Häufig wird empfohlen, sich hier an Abbildungen aus historischen Büchern zur Praktischen Geometrie anzulehnen. Auch hierzu einige Hinweise.

Heidenreich, Matthias (2004): Vermessung eines Sees. In: *mathematik lehren*, Heft 124, S. 49–53.

Krohn, Thomas (2011): Jakobsstab und Pendelquadrant im Mathematikunterricht: historisch, geometrisch, praktisch – und aktuell. In: Herget, Wilfried, Schöneberg, Silvia (Hrsg.): *Mathematik – Ideen – Geschichte. Anregungen für den Mathematikunterricht*, Festschrift für Karin Richter, Hildesheim (Franzbecker), S. 93–108.

Ludwig, Matthias (Hrsg.) (2004): *Geometrie: Die Erde vermessen*. In: *mathematik lehren*, Heft 124.

Ludwig, Matthias (2014): Mit dem Messtisch unterwegs. In: *Der Mathematikunterricht* 60, Heft 6, S.31–36.

Ludwig, Matthias und Jesberg, Jens (2012): Der Messtisch. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 47/54, S. 13–20.

Malitte, Elvira, Richter, Karin, Schöneburg, Silvia, Sommer, Rolf (2011): Auf den Spuren des Universalgelehrten Athanasius Kircher, Gedanken zum Erkunden mathematischer Zusammenhänge im Kontext eines historischen Unterrichtsmittels. In: Krohn, Thomas, Malitte, Elvira, Richter, Gerd, Richter, Karin, Schöneburg, Silvia, Sommer, Rolf (Hrsg.): *Mathematik für alle, Wege zum Öffnen von Mathematik – Mathematikdidaktische Ansätze – Festschrift für Wilfried Herget*, Hildesheim (Franzbecker) S.245–267.

Roth, Jürgen (2012): Ähnlichkeit verstehen – Den Jakobsstab nutzen. In: *mathematik lehren*, Heft 173, S. 42–46.

Vollrath, Hans-Joachim (2004): Landvermessung mit einem Messtisch. In: *mathematik lehren*, Heft 124, S. 20–22, 47–48.

Vollrath, Hans-Joachim (2013): *Verborgene Ideen, Historische mathematische Instrumente*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Vollrath, Hans-Joachim (2014): Entfernungsmessung mit Messrad, Kompass und Messdreieck im Unterricht. In Hahn, Heike (Hrsg.): *Anregungen für den Mathematikunterricht unter der Perspektive von Tradition, Moderne und*

Lehrerprofessionalität, Festschrift für Regina Dorothea Möller, Hildesheim (Franzbecker), S. 10–18.

Wenning, Thomas (1995): Selbstbau von Winkelmessgeräten der alten Seefahrer. In: Der Mathematikunterricht 51, Heft 1, S. 43–52.