[99] Über ein Paar von Rechenstäben aus dem Mathematischen Kabinett der Universität Würzburg

Mainfränkisches Jahrbuch für Geschichte und Kunst 58 (2006), S. 26-32

1. Über die Lehrmittelsammlungen der Philosophischen Fakultät der Universität Würzburg

Zum Lehrangebot der Universität Würzburg gehörten seit ihrer Gründung die »mathematischen Wissenschaften«. Sie umfassten neben den mathematischen Kerngebieten Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie die klassischen Anwendungsgebiete wie Geodäsie, Astronomie, Chronologie, Mechanik, Hydrostatik, Akustik und Optik. Einen guten Überblick gibt der *Cursus mathematicus*[1] (1661), die große Enzyklopädie des Würzburger Mathematikers Kaspar Schott (1608–1666).
Gerade die Anwendungen der Mathematik erforderten Instrumente wie Reißzeug, Winkelmessgeräte, Rechenhilfsmittel, Uhren und Fernrohre. Einsichten in Zusammenhänge wurden im Unterricht durch Demonstrationen an mathematischen und physikalischen Modellen wie geometrischen Körpern oder einfachen Maschinen vermittelt. Derartige Instrumente wurden nach und nach angeschafft und in der Philosophischen Fakultät gesammelt. Ein großer Teil der historischen Instrumente wurde 1877 unter Federführung des Physikers Friedrich Wilhelm Kohlrausch (1840–1910) an das Bayerische Nationalmuseum in München verkaufte[2]. Zu diesen Instrumenten gehört auch ein Paar von Rechenstäben in einem Holzfutteral, das einen interessanten Entwicklungsschritt in der Geschichte der Rechenmaschinen darstellt.[3] Wegen der an diesen Stäben verwendeten Maße sind sie auch von historischem Interesse für das »bürgerliche Rechnen« in der Region.

2. Die Würzburger Rechenstäbe

In einem Futteral aus Nussbaumholz befinden sich zwei Messingstäbe mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 1). Die Stäbe haben eine Länge von 95,2 cm, sind 1,35 cm breit und 0,4 cm stark. Auf den Stäben sind auf beiden Seiten

Skalen eingraviert, die auf einer Seite schwarz und auf der anderen Seite rot markiert sind.

Abb.1: Rechenstäbe mit Futteral, BNM

Auf den Skalen sind Zahlen eingepunzt. Außerdem finden sich auf der schwarz markierten Seite eines Stabes die Worte WEIN und PFUND, auf der schwarz markierten Seite des anderen Stabes das Wort GULD (Abb. 2).

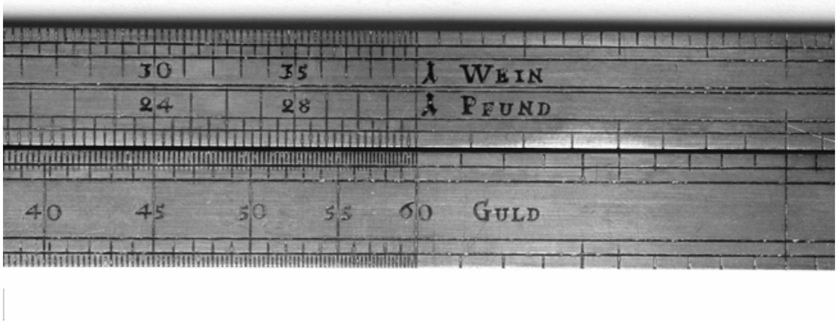

Abb. 2: Schwarz markierte Skalen mit Maßangaben, BNM

Die Angaben WEIN und PFUND weisen auf Warenmengen hin, die Angabe GULD auf einen Preis.

Betrachtet man die Skalen rechts der Einheiten, so sind für die Warenmengen von links nach rechts die Zahlen

2, 3, 4, ... , 9, 10, 15, 20, 30, ..., 80 ,90, 100, 150, 200, 250

eingetragen. Bei den Preisen finden sich die Zahlen

2, 3, 4, ... , 9, 10, 20, 30, ..., 80, 90, 100, 150, 200, 250.

Interessant sind auch die Skalen links von der Einheit.
Bei Wein erkennt man, dass die Einheit der Zahl 40 entspricht, bei Pfund der Zahl 32 und bei Gulden der Zahl 60.
Am einfachsten ist die Erklärung beim Gulden. Die Beziehung

1 Gulden = 60 Kreuzer

war weit verbreitet.[4]
Die Skalenteile links von der Einheit beziehen sich also auf die kleinere Einheit Kreuzer. Es sind die Zahlen (von links nach rechts)

2, 3, 4, ..., 29, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60

eingetragen.
Auch bei den beiden anderen Skalen weisen die Teilstriche links auf kleinere Einheiten hin. Bei Pfund liest man ab:

1 Pfund = 32 Lot.

Auch diese Beziehung war weitgehend üblich.[5]

Beim Weinmaß beträgt die Einheit 40 kleinere Einheiten. Hier ist es nicht so einfach festzustellen, auf welche Maße sich die Angaben beziehen. Ein häufig verwendetes Weinmaß war 1 Eimer. In Würzburg galt: 1 Eimer = 8 Achtel = 32 Viertel = 64 Eichmaß.[6] Der Maßstab passt also nicht auf die Würzburger Verhältnisse. In München hatte der Eimer 60 Kannen, in Leipzig 72 Kannen, in Berlin 60 Quart, in Nürnberg 68 Schenkmaß, in Stuttgart 160 Maß. Das hilft also auch nicht weiter. Dagegen passen die Weinmaße von Wien[7]:

1 Eimer = 40 Maß.

In Wien galten auch die beiden anderen Beziehungen[8]. Die Würzburger Rechenstäbe weisen also nach Österreich.
Bei der Wein-Skala finden sich die Zahlen

1, 2, 3, ..., 19, 20, 25, 30, 35.

Auf der Pfund-Skala finden sich die Zahlen

1, 2, 3, ..., 15, 16, 20, 24, 28.

Was die Datierung der Stäbe anbelangt, so geben die Inventarverzeichnisse der Universität grobe Anhaltspunkte. Im Inventarverzeichnis der Sammlungen der Philosophischen Fakultät aus dem Jahre 1707, das sich in der Bibliotheca Apostolica Vaticana in Rom befindet, sind die Rechenstäbe noch nicht aufgeführt[9]. Dagegen nennt das Supplement der mathematischen Instrumente von 1812[10] »40. Zwey logarithmische Stäbe von Messing. In einem Stocke von Holz.« Die gepunzten Ziffern verweisen auf die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts.

3. Ware-Preis-Berechnungen

Indem man die Stäbe aneinander legt, ordnet man einer Warenmenge einen Preis zu. Damit kann man nun Ware-Preis-Berechnungen durchführen.

Beispiel: 1 Pfund einer Ware kostet 2 Gulden. Diese Angabe führt zur Einstellung von Abb.3.

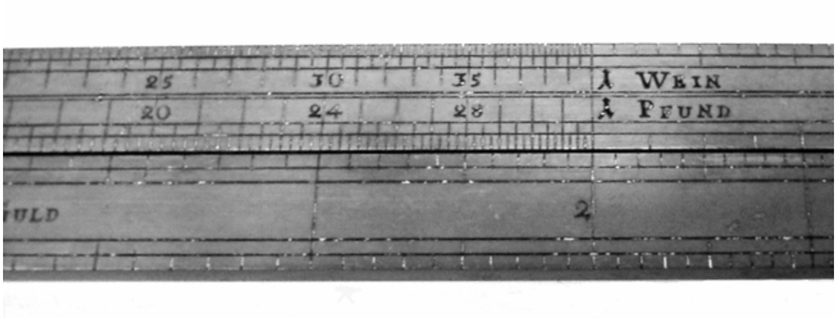

Abb. 3: Ware-Preis-Zuordnung mit den Stäben, BNM

Man stellt also die Markierung für 1 Eimer Wein bzw. 1 Pfund über die Markierung von 2 Gulden (Abb. 4).

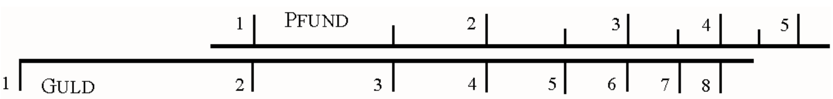

Abb. 4: Schematische Ware-Preis-Zuordnung

An den Stäben kann man nun ablesen: 2 Pfund kosten 4 Gulden, 3 Pfund kosten 6 Gulden usw.
Man kann aber auch ablesen: Für 4 Gulden erhält man 2 Pfund, für 6 Gulden erhält man 3 Pfund.
Und die Unterteilungen der Skalen gestatten es auch, Zwischenwerte abzulesen. Also: Für 3 Gulden erhält man 1 1/2 Pfund, für 5 Gulden erhält man 2 1/2 Pfund. Zwischenwerte liest man, wie auf Skalen üblich, von den entsprechenden Markierungen ab. Dabei ist darauf zu achten, in wie viele Teile jeweils die Strecke zwischen zwei benannten Markierungen geteilt ist.

4. Logarithmische Skalen

Betrachtet man die Skalen, dann fällt auf, dass die Abstände von 1 nach 2, von 2 nach 3, von 3 nach 4 usw. immer kleiner werden. Auf den Skalen sind nämlich die Logarithmen der Zahlen eingetragen.
Die Logarithmen haben die interessante Eigenschaft, dass der Logarithmus eines Produkts gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren ist. Addiert man z. B. die Logarithmen von 2 und 3, dann erhält man den Logarithmus von $2 \cdot 3 = 6$. An den Stäben geht das so vor sich: Stellt man über der 2 der unteren Skala die 1 der oberen Skala ein und liest unter der oberen 3 die Zahl auf der unteren Skala ab, dann ergibt sich 6. Man hat dabei die zugehörigen Strecken einfach aneinandergehängt: Die Strecke von 1 bis 2 auf der unteren Skala hat die Länge Logarithmus 2, die Strecke von 1 bis 3 auf der oberen Skala hat die Länge Logarithmus 3. Aneinandergehängt ergibt sich auf der unteren Skala die Strecke von 1 bis 6 mit der Länge Logarithmus 6. Die Multiplikation auf eine Streckenaddition zurückzuführen, ist das berühmte Prinzip des Rechenschiebers.

Für die Division gilt, dass der Logarithmus eines Quotienten gleich der Differenz der Logarithmen ist. Stellt man über der 6 der unteren Skala die 3 der oberen Skala, dann liest man unter der 1 der oberen Skala die Zahl 2 auf der unteren Skala ab, d. h. $6:3 = 2$.

Einfach lässt sich damit auch Quadrieren und Wurzelziehen. Der Logarithmus des Quadrats einer Zahl ist gleich dem doppelten Logarithmus der Zahl; der Logarithmus der Quadratwurzel einer Zahl ist die Hälfte des Logarithmus der Zahl.

Nachdem die schwarzen Skalen geklärt sind, betrachten wir nun die roten Skalen (Abb. 5).

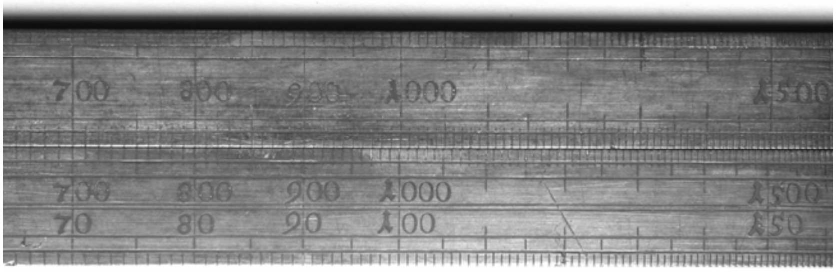

Abb. 5: Rot markierte logarithmische Skalen, BNM

Die roten Skalen auf den Rückseiten sind rein logarithmische Skalen. Sie können allgemein zum Multiplizieren und Dividieren sowie zum Quadrieren und Wurzelziehen verwendet werden. Alle diese Berechnungen sind rasch durchzuführen. Dabei handelt es sich um Näherungsrechnungen, bei denen man bei den vorhandenen Skalenteilungen mit einem Fehler von etwa ± 1 % rechnen muss.

Auf der Rückseite des Gulden-Stabes befindet sich eine Skala, die von 1 bis 10 000 läuft; der andere Stab trägt zwei rote Skalen. Es ist eine Eigenschaft der Logarithmen, dass z. B. die Strecke von 1 bis 10 genau so lang ist wie die Strecken von 10 bis 100, von 100 bis 1000 sowie von 1000 bis 10 000. Sie betragen jeweils 23,6 cm, so dass die gesamte Skala 94,4 cm lang ist. Das entspricht genau 3 Wiener Fuß[11].

5. Zur Geschichte des Rechenschiebers

Logarithmen wurden zu Beginn des 17. Jahrhunderts von dem Schweizer Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost Bürgi (1552–1632) in Kassel und dem schottischen Mathematiker John Napier (1550–1617) unabhängig voneinander erfunden. Napier berechnete Logarithmen und erstellte erste Logarithmentafeln, mit deren Hilfe man Berechnungen durchführen konnte. Sie etablierten sich rasch. Auch in Würzburg wurden sie bereits von Schott[12] gelehrt und verwendet.
Logarithmische Skalen gehen auf den englischen Mathematiker Edmund Gunter (1581–1626) zurück, der sie zum Rechnen benutzte, indem er mit Hilfe von Stechzirkeln Logarithmen als Streckenlängen abgriff. Mit derartigen Skalen wurde noch bis zum Ende des 19. Jahrhunderts in der Nautik gearbeitet[13]. Die Gunter-Scale ging von 1 bis 100 und hatte eine Länge von 2 englischen Fuß (etwa 61 cm).
Die Idee, zwei logarithmische Skalen zum Rechnen zu verwenden, kam dem englischen Mathematiker William Oughtred (1574–1660) um 1630, der damit als der Erfinder des Rechenschiebers gilt. Rechenschieber wurden in England bald populär[14].

In Deutschland wurden diese Ideen nur zögerlich aufgegriffen. Bekannt wurden Rechenschieber durch den Instrumentenbauer Jacob Leupold (1674–1727) aus Leipzig. In seinem Theatrum arithmetico-geometricum (1727) behandelte er an einem »curieusen Rechen-Stab« das »Rechnen auf Linien ohne Zirckel«[15]. Dort findet sich auch eine Abbildung des Instruments. Auf diesen Beitrag verweist auch der Mathematiker und Philosoph Christian Wolff (1679–1754) in seinem Mathematischen Lexicon (1734)[16]. Der Mathematiker Johann Heinrich Lambert (1728–1777), der Mitglied an der Berliner Akademie der Wissenschaften war, griff diese Ideen auf und propagierte in seiner Schrift Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe, die 1761 und 1772 erschien, ein Paar von Rechenstäben mit quadratischem Querschnitt, bei denen sich auf den Seitenflächen eine arithmetische Skala, eine logarithmische Skala, eine Skala für die

Logarithmen des Sinus und eine Skala für die Logarithmen des Tangens befanden. Die Skalen waren so aufgetragen, dass man an ihnen beim Aneinanderlegen der Stäbe rechnen konnte[17]. Lambert konnte den berühmten Augsburger Instrumentenbauer Georg Friedrich Brander (1713–1783) gewinnen, derartige Instrumente herzustellen. Im Verzeichnis von 1783 bietet er »Logarithmische Rechenstäbe, auf Holz getheilt, 1 bis 4 Schuhe lang das Paar«[18] an.

Die Würzburger Rechenstäbe entsprechen in ihrer Handhabung den von Lambert beschriebenen Stäben. Eine Besonderheit sind bei ihnen die schwarzen Skalen, die für Ware-Preis-Berechnungen vorgesehen sind. Die roten Skalen auf den Rückseiten dienen allgemein zum Multiplizieren und Dividieren, zum Potenzieren und zum Wurzelziehen. Gegenüber den von Lambert konzipierten Rechenstäben von Brander fehlen jedoch die Skalen für die Logarithmen von Sinus und Tangens, die für geodätische, nautische und astronomische Berechnungen benötigt werden. So sind die Würzburger Rechenstäbe wohl in erster Linie für das Wirtschaftsrechnen bestimmt gewesen. Dabei konnte man die roten Skalen zur Prozent-, Zins- und Mischungsrechnen verwenden. In der Literatur habe ich bisher keine Hinweise auf vergleichbare Rechenstäbe finden können.

Der eigentliche Siegeszug der Rechenschieber in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft begann gegen Ende des 19. Jahrhunderts. Neben den allgemeinen Rechenschiebern wurden auch Instrumente entwickelt, die speziell auf das Wirtschaftsrechnen zugeschnitten waren[19]. Die Entwicklung der Rechenschieber erreichte gegen Mitte des 20. Jahrhunderts ihren Höhepunkt. Mit dem Erscheinen der elektronischen Rechner Mitte der siebziger Jahre brach diese Entwicklung abrupt ab. In dieser langen und glanzvollen Entwicklung stellen die Würzburger Rechenstäbe einen interessanten, bisher unbekannten Schritt dar. Leider konnte ich über den Hersteller nichts erfahren. Es ist anzunehmen, dass sie gegen Ende des 18. Jahrhunderts in Österreich für Wirtschaftsrechnungen gefertigt wurden.

Ich danke dem Bayerischen Nationalmuseum München für die Hilfen, die ich bei der Untersuchung der Rechenstäbe erhalten habe und für die Fotos. Herrn Gerhard G. Wagner danke ich für anregende Gespräche und wichtige Hinweise.

Anmerkungen

[1] Kaspar Schott, Cursus mathematicus, Würzburg 1661.

[2] Bayerisches Nationalmuseum München: Erwerbungsakten Kasten 54, ER 2645.

[3] Inventar Nr.: Phys 173, 174, 175.

[4] Johann Christian Nelkenbrecher: Allgemeines Taschenbuch der Münz-, Maß- und Gewichtskunde für Banquiers und Kaufleute, Berlin 1832.

[5] Nelkenbrecher, s. Anm. 4.

[6] Gabriele Hendges: Maße und Gewichte im Hochstift Würzburg vom 16. bis zum 19. Jahrhundert, München (Kommission für Bayerische Landesgeschichte) 1989.

[7] Nelkenbrecher, s. Anm. 4.

[8] Nelkenbrecher, s. Anm. 4.

[9] Maria Reindl: Lehre und Forschung in Mathematik und Naturwissenschaften, insbesondere Astronomie, an der Universität Würzburg von der Gründung bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts. Neustadt a. d. Aisch (Degener) 1966, S. 176-185.

[10] Archiv der Universität Würzburg, Akten des Rektorats und Senats der Universität Würzburg, 3227, Supplement zum Spezial-Verzeichniß des Apparates des physikalischen Cabinetes der Großherzoglichen Universität zu Würzburg 1812, Dritte Abtheilung der Supplemente. Mathematischer Apparat.

[11] Wiener Fuß = 318 mm nach Nelkenbrecher, s. Anm. 4.

[12] Schott, a.a.0. S., S. 588-610.

[13] Dieter v. Jezierski: Rechenschieber - eine Dokumentation, Stein (v. Jezierski) 1997.

[14] Florian Cajory: A history of the logarithmic slide rule and allied instruments, Mendham, NJ (Astragal Press) 1994.

[15] Jacob Leupold: Theatrum arithmetico-geometricum, Leipzig 1727, S. 71-74.

[16] (Christian Wolff): Vollständiges Mathematisches Lexicon, Leipzig 1734, S. 1038. (Wolff hatte diese Auflage nicht autorisiert.)

[17] Johann Heinrich Lambert: Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe, Augsburg (Klett) 1772.

Lambert verweist in dieser Schrift auch auf frühere deutsche Instrumente, die logarithmische Skalen verwenden,

so auf das von Johann Matthäus Biler erfundene »Instrumentum mathematicum universale« und den »Pes mechanicus« von Michael Scheffelt. Dazu: Johann Matthäus Biler: Neu erfundenes Instrumentum mathematicum universale, Jena (Cröker) 1696; Michael Scheffelt: Pes mechanicus arteficialis, Ulm (Wagner 1699).

[18] Alto Brachner (Hrsg.): G. F. Brander 1713-1783 Wissenschaftliche Instrumente aus seiner Werkstatt. München (Deutsches Museum) 1983, S. 321. Unter den in diesem Buch aufgeführten Instrumenten aus zahlreichen internationalen Sammlungen findet sich allerdings kein Exemplar.

[19] Jezierski, s. Anm. 13.