[94] Landvermessung mit einem Messtisch

In: mathematiklernen 124 (2004), 20-22,47-48

Anhand von historischen Beispielen werden die klassischen Grundaufgaben der Landvermessung vorgestellt. Es wird gezeigt, wie diese Aufgaben mit Hilfe eines Messtisches konstruktiv gelöst werden konnten. Ein einfacher Messtisch lässt sich nach historischem Muster leicht selbst basteln. Mit ihm können Schülerinnen und Schüler konkrete Vermessungen im Gelände vornehmen und damit die gelernte Geometrie anwenden.

Bei der Behandlung der Dreieckskonstruktionen werden als Anwendungen gern Aufgaben zum Messen im Gelände gestellt (Beispiel).

Beispiel:

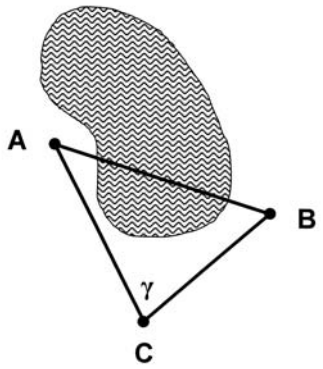

Abb. 1: Entfernung zweier Dörfer

Die Dörfer A und B sind durch einen See getrennt. Ihre Entfernung soll bestimmt werden. Dazu wird zunächst ein Festpunkt C gewählt, so dass im Gelände ein Dreieck ABC entsteht. Man misst: $\overline{CA}$ = 2,653 km; $\overline{CB}$ = 2,221 km und γ = 76,2°. Zeichne das Dreieck ABC im Maßstab 1:100 000 und bestimme mit Hilfe der Zeichnung die Entfernung $\overline{AB}$.

Das ist eine typische Aufgabe, wie sie sich traditionell in Schulbüchern findet. Das Problem ist so weit aufbereitet, dass man unmittelbar eine der bereits behandelten Konstruktionsaufgaben erkennt. Dabei stellt das maßstabsgerechte Arbeiten eine gewisse Erschwernis dar, die durch die Anwendungssituation gerechtfertigt erscheint.

Ungewöhnlich ist allerdings, dass hier die Größenangaben von den Schülerinnen und Schülern gar nicht in der gegebenen Genauigkeit verarbeitet werden können. Es wird erwartet, dass diese Daten mit der höchst möglichen Genauigkeit verwendet werden und das Ergebnis so genau wie möglich anzugeben ist, d.h. so genau, wie es die Zeichnung zulässt. Das Ergebnis hat also sicher eine geringere Genauigkeit als die gegebenen Daten. (Eine sinnvolle Angabe wäre $\overline{AB}$ = 3,0 km.)

Im Unterricht wird man eine derartige Aufgabe sicher offener als ein echtes Problem behandeln.

Beispiel: Zwei Dörfer sind durch einen See getrennt. Wie kann man die Entfernung bestimmen?

Man wird mit einer Skizze beginnen. Dabei wird klar, dass zunächst zu klären ist, was unter der Entfernung der Dörfer verstanden werden soll. Nehmen wir an, die Klasse einigt sich auf die Entfernung der Kirchturmspitzen, dann kann man eine Skizze mit Punkten A und B erstellen.

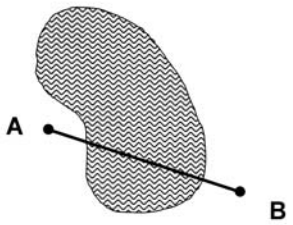

Abb. 2: Erste Skizze

Das hilft allerdings nicht viel weiter. Immerhin ist die Ausgangssituation jetzt klar. Hätte man eine genaue Landkarte, etwa im Maßstab 1:25 000 von der Gegend, so könnte man die Entfernung der Kirchtürme abmessen und dann entsprechend dem Maßstab umrechnen. Das wäre im übrigen gar keine schlechte Übung, denn das kann man sicher bei der weiteren Behandlung der Aufgabe gebrauchen.

Aber wie kann man vorgehen, wenn eine Karte nicht zur Verfügung steht oder wenn man die Entfernungen im Gelände durch Messung bestimmen will? Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, eine Umwegmessung vorzunehmen. Das kann auf einen Punkt C führen, der Eckpunkt eines Dreiecks ABC ist. Von diesem Dreieck kann man immerhin 2 Seitenlängen ausmessen. Damit ist es aber noch nicht festgelegt. Man muss noch mindestens einen Winkel kennen. Misst man den Winkel bei C z.B. mit einem Kompass, so ist das Dreieck bestimmt. Jetzt hat man die Figur der Aufgabenstellung.

Nun ist es nicht mehr schwer, den weiteren Weg zu beschreiben: Das Dreieck wird maßstabsgerecht gezeichnet (sws), die fragliche Seitenlänge wird abgelesen und umgerechnet. Wenn man nun noch eine derartige Messung mit dem Kilometerzähler an einem Fahrrad und einem Kompass im Gelände vornimmt, müsste eigentlich die Freude vollkommen sein.

Aber ist eine zeichnerische Lösung überhaupt *wirklichkeitsnah*? Macht man das nicht in Wirklichkeit rechnerisch mit dem Kosinussatz in der Trigonometrie? Sollte man also nicht doch lieber mit dieser Aufgabe bis zur Behandlung der Trigonometrie warten?

Zeichnerische Methoden der Praktischen Geometrie

Jahrhunderte lang wurden Aufgaben der *Feldmessung* zeichnerisch gelöst. Die Verwendung der Trigonometrie begann sich erst im 17. Jahrhundert zu verbreiten. Solange die Längen- und Winkelmessung im Gelände noch relativ grob war, reichte die Genauigkeit zeichnerischer Lösungen aus. Angesichts der Fortschritte in der Längen- und Winkelmessung setzten sich die trigono

metrischen Verfahren in der Landvermessung durch. Noch 1732 behandelte allerdings JOHANN FRIEDRICH PENTHER (1693-1749) in seiner *Praxis geometriae* „alle bey dem Feld-Messen vorkommenden Fälle“ zeichnerisch. Es lässt sich daher durchaus *historisch* rechtfertigen, als Anwendungen der Dreieckskonstruktionen auch die Grundaufgaben der Feldmessung zeichnerisch zu behandeln.

Grundaufgaben der Feldmessung

Traditionell sind das die drei folgenden Aufgaben:

1. Grundaufgabe: Die Entfernung zweier Orte A und B zu bestimmen, die so gelegen sind, dass man nicht auf direktem Weg von A nach B, wohl aber über einen Ort C gelangen kann. Das Eingangsbeispiel war von diesem Aufgabentyp.

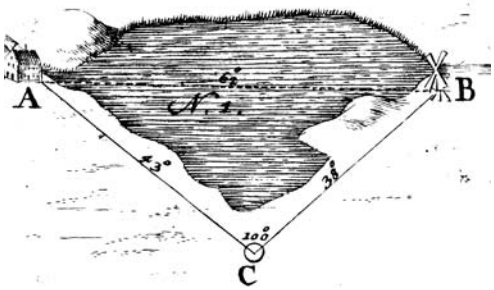

Abb. 3: Erste Grundaufgabe; Penther 1732

2. Grundaufgabe: Die Entfernung zweier Orte A und B zu bestimmen, die so gelegen sind, dass man nicht auf direktem Weg von A nach B, wohl aber zu B gelangen kann.

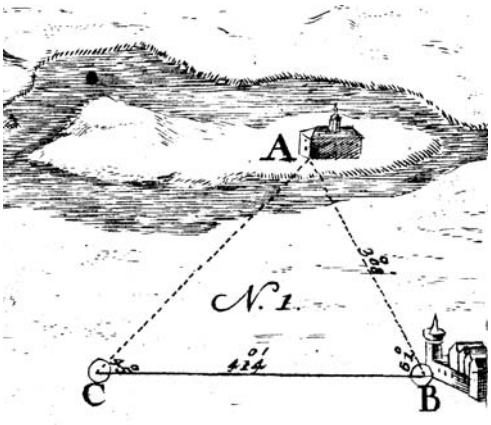

Abb. 4: Zweite Grundaufgabe; Penther 1732

3. Grundaufgabe: Die Entfernung zweier Orte A und B zu bestimmen, die so gelegen sind, dass man zu keinem von ihnen gelangen kann.

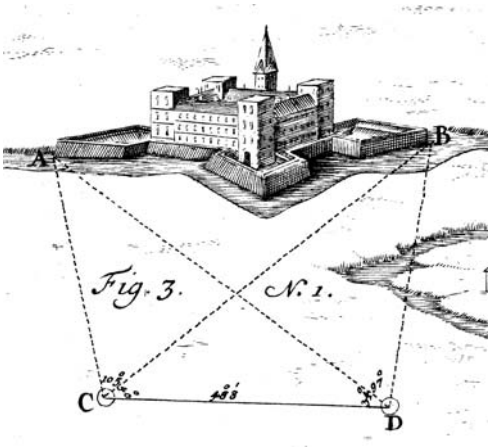

Abb. 5: Dritte Grundaufgabe; Penther 1732

Kann man die Winkelmaße z.B. mit einem Kompass bestimmen, so kann man alle diese Konstruktionen wie im Geometrieunterricht üblich mit Zirkel und Geo-Dreieck durchführen. Mit Hilfe eines *Messtisches* kann man allerdings auch die Winkel unmittelbar durch Anvisieren zeichnen.

Der Messtisch

Beim Messtisch handelt es sich um eine Erfindung, die auf JOHANN PRÄTORIUS (1537-1616) in Altdorf bei Nürnberg aus dem Jahre 1590 zurückgeht. Sie wurde vor allem durch seinen Schüler DANIEL SCHWENTER (1585-1636) in dessen *Geometriae practicae novae Tractatus III* (1618) bekannt gemacht. Eine ausführliche Beschreibung für den Bau einer solchen „Mensula Praetoriana“ gibt JACOB LEUPOLD (1674-1727) in seinem *Theatrum arithmetico-geometricum* (1727).

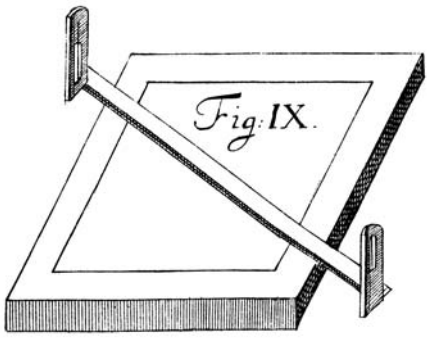

Abb. 6: Messtisch nach Prätorius, Leupold 1727

Der Messtisch besteht aus einer Platte, auf der man einen Bogen Papier befestigen kann. Auf dem Tisch liegt ein *Visierlineal* mit *Absehen* (Dioptern) an den Enden. Damit kann man einen markanten Punkt (z.B. Kirchturmspitze) anvisieren und dann eine Linie zeichnen, die parallel zu der Verbindungslinie zwischen Beobachter und anvisiertem Punkt verläuft.

Im Laufe der Zeit ist der Messtisch immer weiter verbessert worden (Schmidt 1935). Bekannt wurden die Messtische von LEONHARD ZUBLER (1563-1609) und ATHANASIUS KIRCHER (1602-1680), die ebenfalls von LEUPOLD beschrieben werden. Zu Kirchers Messtisch hat sein Schüler KASPAR SCHOTT (1608-1666) ein ausführliches Handbuch verfasst (Schott 1660). Für die Würzburger Kircher-Ausstellung 2002 habe ich das Instrument gründlich erforscht und nachbauen lassen (Vollrath 2003).

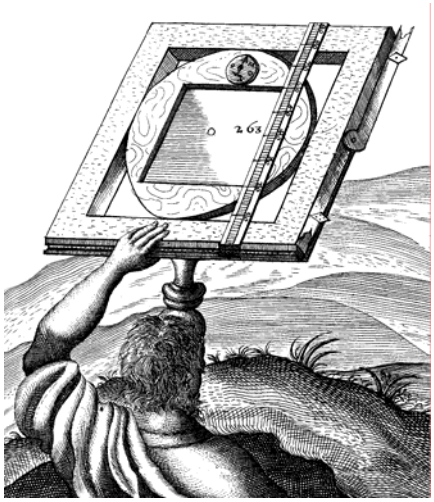

Abb. 7: Pantometrum Kircherianum, Schott 1661

Sehr erfolgreich war der Messtisch bei der topographischen Landesaufnahme Sachsens Ende des 18. Jahrhunderts (Harmßen 1996) und der bayerischen Landvermessung zu Beginn des 19. Jahrhunderts (Seeberger 2001).

Lösung der Grundaufgaben mit dem Messtisch

Wie ein solcher Messtisch im Gelände zu verwenden ist, zeigt LEONHARD ZUBLER für seinen Messtisch in seinem *Novum instrumentum geometricum* (1625) sehr anschaulich.

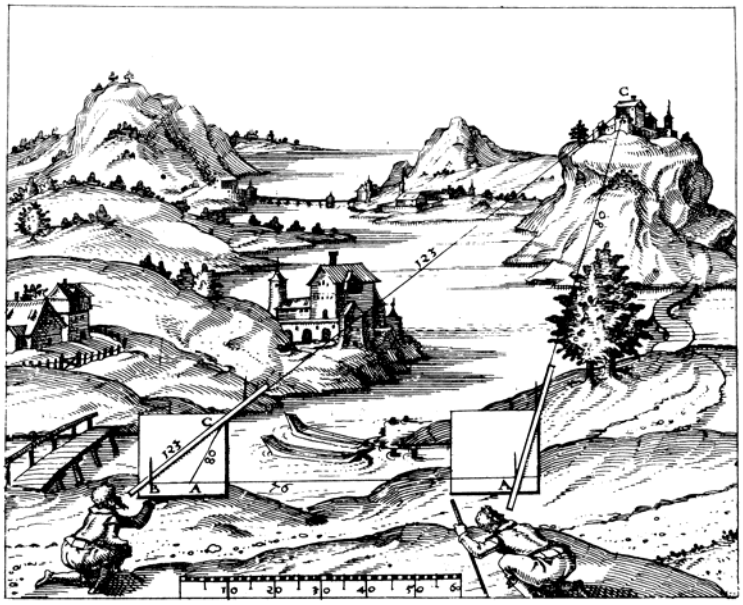

Abb. 8: Zublers Messtisch, Zubler 1625

Es geht hier um die Bestimmung der Entfernung $\overline{AC}$. Offensichtlich handelt es sich also um die 2. Grundaufgabe. (Im Folgenden übernehmen wir ZUBLERS Bezeichnungen.)

Man legt zunächst eine Standlinie [AB] fest und misst ihre Länge. Nun visiert man von A aus den Punkt B (Fluchtstab) mit dem Visierlineal an und zeichnet damit eine Gerade. Dann visiert man den Punkt C an und zeichnet wieder eine Gerade. Anschließend wechselt man zu Punkt B, legt das Visier

lineal an die gezeichnete Gerade und stellt den Messtisch so ein, dass die Visierlinie A trifft. Nun visiert man C an und zeichnet die entsprechende Linie ein.

Auf dem Zeichenblatt ist nun ein Dreieck A'B'C' gezeichnet, das dem Dreieck im Gelände *ähnlich* ist.

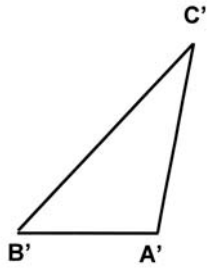

Abb. 9: Das auf dem Messtisch gezeichnete Dreieck

Liest man die Länge $\overline{A'B'}$ ab und vergleicht sie mit der Länge $\overline{AB}$, so erhält man den Verkleinerungsmaßstab. Nun kann man die Länge $\overline{A'C'}$ ablesen und mit Hilfe des Verkleinerungsmaßstabes die unbekannte Originallänge $\overline{AC}$ berechnen.
Beispiel: $\overline{AB}$ = 10 m; $\overline{A'B'}$ = 0,05 m
Das ergibt als Verkleinerungsmaßstab:
$\overline{A'B'}$: $\overline{AB}$ = 0,05:10 = 1:200.
Liest man ab: $\overline{A'C'}$ = 0,27 m, dann erhält man $\overline{AC}$ = 54 m.

Damit ist die 2. Grundaufgabe gelöst.

Die 3. Grundaufgabe löst man entsprechend. Es geht um die Bestimmung der Entfernung $\overline{AB}$. Man wählt zwei Punkte C und D als Endpunkte einer Standlinie, deren Länge gemessen wird. Nun visiert man von C aus A, B und

D an und zeichnet die entsprechenden Linien. Dann wechselt man nach D, richtet den Messtisch wieder wie vorher aus, indem man C anvisiert, dann visiert man A und B an und zeichnet die Linien. Es entsteht folgende Figur:

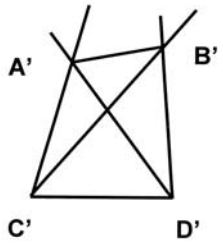

Abb. 10: Auf dem Messtisch gezeichnete Figur zur 3. Grundaufgabe

Bei der 1. Grundaufgabe misst man die Streckenlängen $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ und wählt einen geeigneten Verkleinerungsmaßstab, mit dem man die Streckenlängen $\overline{C'A'}$ und $\overline{C'B'}$ berechnet. Dann visiert man von C aus die Punkte A und B an und zeichnet die entsprechenden Linien. Nun trägt man $\overline{C'A'}$ und $\overline{C'B'}$ ab und verbindet A' und B'. Damit erhält man die Figur:

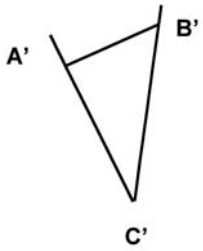

Abb. 11: Auf dem Messtisch gezeichnetes Dreieck zur 1. Grundaufgabe

Wieder kann man $\overline{A'B'}$ ablesen und dann mit Hilfe des Verkleinerungsmaßstabes $\overline{AB}$ berechnen.

Zum Verständnis des Messtisches ist also wesentlich, dass man zu einem Dreieck im Gelände ein *ähnliches* Dreieck auf dem Messtisch zeichnet. Denn wenn man bei einem Dreieck Parallelen zu den Seiten zeichnet, so entsteht ein Dreieck, bei dem die Größen der Winkel mit denen der entsprechenden Winkel im Ausgangsdreieck übereinstimmen. Dann macht man Gebrauch davon, dass bei ähnlichen Dreiecken die Verhältnisse der Längen entsprechender Seiten gleich sind. Das Prinzip des Messtisches ergibt sich also aus der Ähnlichkeitsgeometrie. Deshalb kann man dieses Thema als *Anwendung der Ähnlichkeitslehre* wählen. Da ein Messtisch leicht herzustellen und zu bedienen ist, bietet es sich an, mit einem Messtisch Beispiele zu den Grundaufgaben von den Schülern im Gelände praktisch lösen zu lassen.

Bau eines Messtisches

Als Platte nahm ich eine Zeichenplatte mit Klemmleiste in der Größe eines DIN A4-Blattes, wie es sie im Schreibwarenhandel gibt . Das Visierlineal habe ich aus einer Hartholzleiste zugeschnitten (350 mm; 40 mm; 5 mm). Zum Visieren sollten 2 Nägel dienen. Dazu habe ich 2 Löcher für die 35 mm langen Nägel in gleicher Entfernung von der Kante gebohrt und die Nägel angebracht.

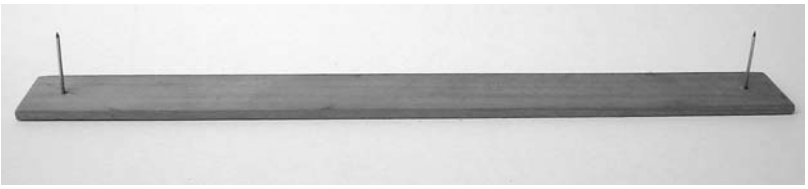

Abb. 12: Visierlineal

ZUBLER empfiehlt, den Messtisch auf einen Stuhl zu stellen. Ich habe dazu einen hohen Hocker genommen. Das erleichtert das Ausrichten, das Visieren und das Zeichnen.

Abb. 13: Visieren am Messtisch

Messungen im Gelände

Hat man den Messtisch gebaut, dann interessiert einen natürlich, wie genau man mit ihm messen kann. Dazu ist es zweckmäßig, mit Stangen als Fluchtstäben ein Dreieck im Gelände abzustecken und dann eine Vermessung etwa nach dem Prinzip der 2. Grundaufgabe vorzunehmen. Wir haben eine derartige Vermessung durchgeführt an einem Dreieck mit einer 3 m langen Standlinie und einer 15 m langen Seitenlänge, die durch Vermessung bestimmt werden sollte. Es wurden Marken für die Fluchtstäbe gesetzt; die Entfernungen wurden dabei mit einem 15 m langen Maßband bestimmt, wie es beim Sport verwendet wird. Als Fluchtstäbe dienten Besenstiele. Die 300 cm lange Standlinie wurde in der Zeichnung 3,1 cm lang abgebildet. (Der „krumme“ Wert von 3,1 cm ergab sich zufällig!) Das entspricht einem Verkleinerungsmaßstab von 1:96,8. In der Zeichnung wurde die 1500 cm lange Entfernung als 14,95 cm lange Strecke abgebildet. Dem würde eine Entfernung von 1447 cm entsprechen. Das ist also eine Abweichung von 4%. Wiederholte Mes

sungen haben gezeigt, dass es realistisch ist, mit einem Fehler von 5% zu rechnen.

Man wird also zunächst derartige Messungen auf dem Schulhof vornehmen, damit sich die Schülerinnen und Schüler mit dem Messinstrument und den Messmethoden vertraut machen können, ehe man dann ins Gelände geht und in Situationen, die den drei Grundaufgaben entsprechen, Messungen vornimmt.

Literatur

Harmßen, J.: Die erste große Landesaufnahme Kursachsen, Leipziger Blätter Sonderheft: Meßpunkt Leipzig, Leipzig 1996, S. 32-39.

Leupold, J.: Theatrum arithmetico geometricum, Leipzig 1727.

Penther, J. F.: Praxis geometriae, Augsburg 1732, Nachdruck Stuttgart 1981.

Schmidt, F.: Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter, Kaiserslautern 1935; Nachdruck: Stuttgart 1988.

Schott, K.: Organum mathematicum, Würzburg 1661.

Schott, K.: Pantometrum Kircherianum, Würzburg, 1660.

Schwenter, D.: Geometriae practicae novae, Tractatus III, Nürnberg 1618.

Seeberger, M.: Wie Bayern vermessen wurde, Augsburg (Haus der bayerischen Geschichte) 2001.

Vollrath, H.-J.: Das Pantometrum Kircherianum – Athanasius Kirchers Messtisch, in: H. Beinlich, H.-J. Vollrath, K. Wittstadt (Hrsg.): Spurensuche, Dettelbach (Röll) 2002, S. 119-136.

Zubler, L.: Novum instrumentum geometricum, Basel 1625, (Nachdruck in 2 Bänden, Dortmund 1978).