69. Modelle langfristigen Lernens von Begriffen im Mathematikunterricht

Mathematik in der Schule 33 (1995), 460-472.

Herrn Prof. Dr. Hans Schupp zum 60. Geburtstag

1. Einleitung

Leitbegriffe wie *Zahl, Verknüpfung, Funktion, Folge, Figur, Abbildung, Flächeninhalt* und *Rauminhalt* werden im Mathematikunterricht in langfristigen Lernprozessen erworben. Die intendierten Lernprozesse können mit Stufenmodellen beschrieben werden (z.B. HOLLAND 1988, VOLLRATH 1974, 1984, WEIDIG 1982, WEIGAND 1989, 1993, WETH 1993). Betrachtet man allerdings die resultierenden Lernprozesse, so sind unter Umständen Zweifel angebracht, ob tatsächlich ein Lernen in Stufen stattgefunden hat. Die Befunde von ANDELFINGER (1984) z.B. belegen, daß das erworbene Wissen häufig bruchstückhaft und wenig verbunden ist, in jedem Fall aber erheblich von dem intendierten Wissen abweicht. Diese Befunde wecken den Wunsch, das tatsächlich stattgefundene Lernen zu modellieren.

Aber auch im Blick auf die Inhalte stößt man auf Grenzen der Stufenmodelle. Bei der Entwicklung eines angemessenen Modells für das Lernen des Zahlbegriffs und des Verknüpfungsbegriffs während der Schulzeit ist mir deutlich geworden, daß Stufenmodelle nicht ausreichen. So vollzieht sich der Übergang von den natürlichen Zahlen über die Bruchzahlen zu den rationalen Zahlen von der 5. bis zur 7. Jahrgangsstufe immer auf der gleichen Stufe. Inhaltlich wesentliche Etappen in diesem Lernprozeß werden also durch ein Stufenmodell gar nicht erfaßt. Ich suchte daher nach einem Modell, das geeignet ist, auch die Zahlbereichserweiterungen und die damit verbundenen Erweiterungen des Verknüpfungsbegriffs angemessen zu beschreiben (VOLLRATH 1994).

Vergleicht man langfristiges Lernen eines Leitbegriffs im Gymnasium mit dem entsprechenden Lernprozeß in der Hauptschule, so kann man mit Stufenmodellen differenzieren, indem man z.B. in der Hauptschule später auf eine höhere

Stufe steigt als im Gymnasium oder indem überhaupt darauf verzichtet, bestimmte Stufen zu ersteigen. Doch auch diese Möglichkeiten erscheinen mir unzureichend. Am Gymnasium kann man z.B. erreichen, daß gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche als verschiedene Bezeichnungen von Bruchzahlen bewußt sind. Bei Hauptschülern werden dagegen diese Darstellungen stärker als etwas jeweils Besonderes gesehen. Auch dieser Unterschied wird durch ein Stufenmodell nicht ausreichend beschrieben.

Im folgenden will ich einen breiteren Modellvorrat entwickeln, der geeignet ist, die Vielfalt *intendierter* und *resultierender* langfristiger Prozesse des Lernens von Begriffen im Mathematikunterricht verschiedener Schularten zu beschreiben.

2. Metaphern für langfristiges Lernens

Vorstellungen über Lehren und Lernen lassen sich häufig plastisch in Bildern ausdrücken, in denen das Entscheidende deutlich hervortritt. Eine solche *Metapher* für langfristiges Lernen ist das „Lernen in Stufen“. Eine klassische Metapher für das Lehren ist der „Nürnberger Trichter“. Entsprechend unserem Ziel, *unterschiedliche* langfristige Lernprozesse im Mathematikunterricht zu beschreiben, wollen wir zunächst versuchen, die entsprechenden Vorstellungen und Erfahrungen in geeigneten Metaphern auszudrücken.

Weil es um das Lernen von Kindern und Jugendlichen geht, will ich diese Metaphern im folgenden auch mit Verhaltensweisen und Erfahrungen von Kindern und Jugendlichen verbinden. Dabei beginne ich mit den „einfachsten“ Formen langfristigen Lernens, um dann zu „höheren“ Formen vorzustoßen.

(1) Lernen durch Ansammeln

Im Kinderzimmer finden sich viele Sachen, die Kinder irgendwann mal geschenkt bekommen, gefunden oder gekauft haben. Die Sachen haben wiederholten Versuchen standgehalten, sie auszusortieren, weil sie den Kindern

wertvoll sind. Sie haben sich angesammelt, und das Kind hat eine Beziehung zu ihnen; ein System des Sammelns ist nicht zu erkennen.

So muß man sich anscheinend bei vielen Kindern auch Lernen im Mathematikunterricht während der Schulzeit vorstellen. Sie lernen im Laufe der Jahre viele Sachverhalte kennen, von denen diejenigen behalten werden, die einen besonderen Eindruck hinterlassen. In manchen Fällen findet sich Wichtiges, das Lehrer erwarten würden, häufig wird Unwichtiges behalten und Wesentliches vergessen. Dieser Zustand wird von WAGENSCHEIN (1970) angeprangert und von ANDELFINGER überzeugend in vielen Bereichen der Schulmathematik belegt (z.B. ANDELFINGER 1984). Langfristiges Lernen im Mathematikunterricht ist zwar nicht so intendiert, scheint sich aber doch häufig gerade so zu ereignen.

Beispiele: Jemand erinnert sich an die Wörter Primzahl, gemischte Zahl, Bruch, irrationale Zahl, Quadratzahl und Dezimalzahl, verbindet damit aber keine oder nur sehr vage Vorstellungen. Unter Umständen bleiben mathematisch unwichtige Begriffe mit einprägsamen Namen besonders haften.

Oder Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind als Rechenoperationen bekannt, ohne daß den Lernenden bewußt ist, daß z.B. Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division jeweils Umkehroperationen zueinander sind.

Es stört hierbei vor allem die weitgehende Beziehungslosigkeit der gelernten Gegenstände untereinander. Diese Schwächen sind in folgender Metapher überwunden.

(2) Lernen als Legen eines Puzzles

Beim Legen eines Puzzles kommt es darauf an, daß alle Teile vorhanden sind. Beim Suchprozeß schaut man, ob die Teile zueinander passen, es werden also Beziehungen zwischen den Teilen gesehen. Gleichzeitig versucht man jedoch, auf das Ganze zu sehen, möglichst sich das Bild vorzustellen, um damit bei den einzelnen Teilen zu erkennen, welchen Beitrag sie zum Bild leisten, wo sie also

hingehören.

Wer denkt hier nicht an die Schlagworte *Lückenlosigkeit* und *Beziehungshaltigkeit*, die ja beim Lernen im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle spielen. Ich erwähne auch die Paradoxie des Verstehens, die sich aus der Komplementarität zwischen den *Einzelheiten* und dem *Ganzen* ergeben (VOLLRATH 1993).

Beispiele: Den Schülern ist der Aufbau des Zahlensystems bewußt. Sie kennen die wichtigsten Zahlbereiche und können das Teilmengendiagramm hinschreiben. Die Dezimaldarstellung liefert das Gesamtbild. An ihr werden aber auch die einzelnen Zahlbereiche sichtbar. Das Komma weist auf die Bruchzahlen, das Minuszeichen auf die rationalen Zahlen hin.

Die Rechenoperationen werden zwar in den einzelnen Zahlbereichen in Beziehungen zueinander gesehen. Doch ist den Lernenden nicht bewußt, daß z.B. in den Regeln für die Addition und die Multiplikation von Brüchen die entsprechenden Regeln für die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen als Sonderfälle enthalten sind.

Sowohl vom Prozeß als auch vom Resultat her wäre es für den Unterricht recht erfreulich, wenn das Lernen so stattfinden würde, daß beim Erwerb neuen Wissens stets Beziehungen zwischen den Elementen des Wissens gesehen werden; im Laufe der Zeit wird das Ganze immer deutlicher sichtbar, das sich am Ende in einem vollständigen Überblick darbietet. Die Beziehungshaltigkeit wird auch mit der bekannten Metapher des *Netzes* ausgedrückt. Ich finde an der Metapher des *Puzzles* günstiger, daß hier auf das entstehende Ganze verwiesen wird.

Als Schwäche dieser Art des Lernens sehe ich, daß zwischen den Teilen keine wesentlichen Unterschiede bestehen. Vor allem bleiben den Lernenden Wissenshierarchien verschlossen. Diese Schwäche wird in den folgenden Metaphern in unterschiedlicher Weise behoben.

(3) Lernen durch Freilegen verborgener Schichten

Das Lernen nach den beiden bisher behandelten Metaphern bleibt „an der Oberfläche“. Bereits in dieser Redewendung wird ein Hinweis auf eine andere Metapher des Lernens gegeben. Kinder haben bei der Erkundung ihrer Umwelt das Bedürfnis, den Dingen auf den Grund zu gehen, hinter die Kulissen zu schauen, das Verborgene zu entdecken. Wir denken bei diesen metaphorischen Redewendungen an ganz konkrete Handlungen: Ein Loch wird im Beet gegraben, beim Kasperltheater wird ein Blick hinter den Vorhang getan, der Wecker wird zerlegt usw. Auch Forschungsaktivitäten lassen sich anführen: die Tiefenbohrung der Geologen, das Ausgraben der Archäologen, das Sezieren der Anatomen, der Blick des Botanikers durch das Mikroskop und die Beobachtung des Astronomen durch das Teleskop.

Beim Lernen denkt man etwa an folgenden Vorgang: Neues wird entdeckt; Beziehungen werden erkannt, mit „bohrenden Fragen“ wird dann den Dingen auf den Grund gegangen.

Mit dieser Metapher läßt sich auch das langfristige Lernen beschreiben, das WITTENBERG (1990[2]) in seiner Konzeption des vertiefenden Lehrens anstrebt. (Seine „Themenkreise“ sind auf mittelfristiges Lernen gerichtet!)

Nach einer ersten Phase der „Erschließung“ kommt es zu einer Phase der „ersten Vertiefung“. „Anknüpfend an die früher anschaulich erkannten Verhältnisse gräbt der Unterricht in die Tiefe und in die Breite.“(WITTENBERG 1990, S. 163). Es folgt dann eine Phase der „Umwälzung und kritischen Besinnung“; in ihr wird bei den Lernenden ihr „weitgehend harmlos-flaches Bild der Wissenschaft beginnen, die eigentliche Tiefendimension anzunehmen.“ (WITTENBERG 1990, S. 170)

Beispiel: In der Grundschule und in der 5. Jahrgangsstufe begegnet den Schülern die Dezimalschreibweise beim Geld. Nach ihrem Verständnis „trennt das Komma Mark und Pfennige“.

In der 6. Jahrgangsstufe wird tiefer gegraben und dieser Schreibweise auf den

Grund gegangen. Die Schüler erkennen die Bedeutung der Nachkommastellen als Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. Sie begegnen auch dem Phänomen der unendlichen periodischen Dezimalbrüche. In der 9. Jahrgangsstufe lernen sie dann unendliche nicht periodische Dezimalbrüche kennen.

In der Sekundarstufe II haben sie die Möglichkeit, bei den unendlichen Reihen den Hintergrund dieser Schreibfiguren zu erkennen und nun auch eine Begründung für das Rechnen mit unendlichen Dezimalbrüchen zu erhalten, die bereits sehr tief geht und alles andere als „harmlos“ ist.

(4) Lernen als Ersteigen von Stufen

Ich komme nun zur bekannten Metapher des Ersteigens von Stufen. Man denkt hier etwa an das Besteigen eines Turms, das Ersteigen eines Hügels auf einer Treppe oder das Bergsteigen. Die Idee besteht darin, daß man im Blick zurück Beziehungen sieht, die einem vorher verborgen blieben.

VAN HIELE (1976) benutzt diese Metapher, um damit einen Geometrieunterricht zu konzipieren, der sich von dem Muster der axiomatischen Systematik löst und sich der kognitiven Entwicklung der Kinder anpaßt. Er beschreibt den Lernprozeß so, daß durch Reflektion der Gegenstände einer Stufe, eine neue Stufe erklommen wird. Damit betont er die *Analyse* als Weg zu neuer Erkenntnis.

Beispiel: Nach dem Übergang von der Grundschule wird in der 5. Jahrgangsstufe das Rechnen mit natürlichen Zahlen reflektiert, indem man Beziehungen zwischen den Rechenpoperationen deutlich macht, etwa die Multiplikation als wiederholte Addition, die Subtraktion als Gegenoperation zur Addition, und Eigenschaften hervorhebt, etwa die Assoziativität, die Kommutativität und Distributivität.

(5) Lernen durch Erweiterung des Horizonts

Das Kind erobert sich die Welt, indem es zunächst das Bett, das Kinderzimmer, die Wohnung, das Haus, die Stadt, das Land kennenlernt. Immer sind zunächst

Grenzen vorhanden, innerhalb derer es sich bewegt, die es dann aber einmal bewußt überschreitet. Diese Erfahrung bedeutet, daß neue Eindrücke verarbeitet werden und daß Altes in neuer Sicht erscheint.

Auch diese Metapher bringt Vorstellungen über das Lernen zum Ausdruck. Hier spielt die *Synthese* die entscheidende Rolle: Neues wird erkannt, indem Begrenzungen bewußt überschritten werden, und Altes wird im Licht des Neuen neu gesehen.

Ich hatte bei der Kritik der Stufenmodelle bereits darauf verwiesen, daß beim Lernen des Zahlbegriffs Probleme auftreten. Beim Übergang von einem Bereich zum anderen ändert sich nicht notwendig das Niveau der Betrachtung. Vielmehr werden dabei Grenzen überschritten, neue Zahlen werden kennengelernt, die alten Zahlen und ihre Eigenschaften erscheinen nun als Sonderfälle in neuem Licht. Dieser Vorgang wird durch die Metapher der Horizonterweiterung beschrieben.

Ich will es bei diesen Metaphern bewenden lassen, ohne den Anspruch zu erheben, damit alle vorkommenden Arten langfristigen Lernens von Begriffen erfaßt zu haben. Sie regen sicherlich dazu an, nach weiteren passenden Metaphern zu suchen. Und an dieser Öffnung der Betrachtungsweise ist mir vor allem gelegen.

3. Von der Metapher zum Modell

STEINER (1988) hat darauf hingewiesen, daß Metaphern eine wichtige Vorstufe zu Modellen sein können. Das kann man in unserem Zusammenhang sehr deutlich erkennen. Metaphern heben das Entscheidende bildhaft hervor. Sie sind also durchaus geeignet, Intentionen deutlich zu machen und Ergebnisse zu kritisieren, wie man das ja z.B. an den häufig metaphorischen Ausführungen von WAGENSCHEIN sieht, wenn er z.B. „Turm“ und „Netz“ als Metaphern für unterschiedliche Sichtweisen von Mathematik benutzt (WAGENSCHEIN 1970).

Wenn man Lernprozesse wissenschaftlich fundiert organisieren und kritisch werten möchte, benötigt man Modelle. Man erhält Modelle aus den Metaphern durch Präzisierung. Ich hebe drei Ansatzpunkte hervor.

(1) Zustandsbeschreibungen

Um überhaupt Lernen feststellen zu können, ist es notwendig, Ausgangs- und Endzustand zu beschreiben. Die Standards dafür sind weitgehend Mitte der siebziger Jahre bei den „operationalisierten Lernzielen“ entwickelt worden. Die Zustände sind bestimmt durch das Vorhandensein bestimmter Fähigkeiten und durch das Nichtvorhandensein anderer.

Beispiele: Am Ende der 5. Jahrgangsstufe kann man z.B. feststellen, daß wichtige Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen genannt werden können, daß aber Beziehungen zwischen den Regeln noch nicht direkt gesehen werden. Diese Fähigkeit wird erst später erworben, wenn die Lernenden z.B. in der 8. Jahrgangsstufe erkennen, daß sich die Formel

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

aus dem Distributivgesetz ergibt und daß andererseits z.B.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ein Sonderfall dieser Formel ist. Hier ist also zwar eine höhere Stufe erreicht, eine weitere jedoch noch nicht.

(2) Zustandsänderungen

Die genannten Metaphern gehen davon aus, daß der Lernprozeß in entscheidenden Schritten vor sich geht (das Einpassen eines neuen Teils, das Freilegen einer tieferen Schicht, das Ersteigen einer höheren Stufe, das Überschreiten einer Grenze). Es ist daher notwendig, die Übergänge zu beschreiben.

Beispiele: Zu den rationalen Zahlen kommen in der 9. Jahrgangsstufe der Hauptschule Wurzeln hinzu. Nachdem im Gymnasium in der 9. Jahrgangsstufe komplexe Zahlen im Zusammenhang mit quadratischen Gleichungen formal als

Lösungen der Form a + bi eingeführt worden sind, wird in der 11. Jahrgangsstufe diesen Zahlen auf den Grund gegangen. Der Übergang von intuitiven Überlegungen bei Formeln zu Beweisen in der 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums führt zu einem höheren Niveau der Betrachtungen. Mit dem Erfassen der irrationalen Zahlen in der 9. Jahrgangsstufe der Realschule und des Gymnasiums wird eine Begrenzung durch die rationalen Zahlen z.B. beim Wurzelziehen überschritten.

(3) Prozeßbeschreibung

Bei der Deutung der Metaphern zur Beschreibung von Lernprozessen hatten wir gesehen, daß langfristiges Lernen durch bestimmte *geistige Tätigkeiten* in Gang gesetzt wird (z.B. Analyse oder Synthese). Sie beschreiben die innere Dynamik des Prozesses.

Wichtig ist jedoch auch die Angabe von Organisationsprinzipien. Da es sich um langfristige Lernprozesse handelt, geht es hier vor allem um die Beschreibung des Beziehungsgefüges. Im wesentlichen wird man deshalb mittelfristige und kurzfristige Lernprozesse als *Module* betrachten.

Betrachten wir also den Unterrichtsverlauf etwas näher. Von der 1. bis zur 5. Jahrgangsstufe werden die natürlichen Zahlen behandelt. In der 6. Jahrgangsstufe lernen die Schüler die Bruchzahlen und in der 7. und 8. Jahrgangsstufe die rationalen Zahlen kennen. In der 9. und 10. Jahrgangsstufe folgen die reellen Zahlen. Im langfristigen Lernen des Zahlbegriffs lassen sich also *mittelfristige* Lernprozesse zum Zahlbegriff feststellen (VOLLRATH 1984).

Auch bei den mittelfristigen Lernprozessen findet man Lernen in kürzeren Zeiträumen. Man denke etwa an den Begriff der Primzahl innerhalb des Lernens der natürlichen Zahlen oder den Begriff der Quadratwurzel innerhalb des Lernens der reellen Zahlen. Hier handelt es sich um *kurzfristige* Lernprozesse (VOLLRATH 1984).

Welche Beziehungen bestehen zwischen diesen Lernprozessen? Die Suche nach Elementen ist in den Wissenschaften häufig mit der Erwartung verbun-

den, von den Elementen her das Ganze erklären zu können. Für das Lernen scheint mir dies illusorisch zu sein. Zwar setzen Lernprozesse in der Regel andere voraus. So stützt sich das Lernen der Bruchrechenregeln auf die gelernten Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Andererseits vermittelt die Bruchrechnung neue Einsichten in das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Man muß also eine *Wechselbeziehung* zwischen untergeordneten und übergeordneten Lernprozessen annehmen. Didaktische Theorien langfristiger Lernprozesse müssen diese Wechselbeziehungen einbeziehen.

Die betrachteten Metaphern des Lernens führen bei einer entsprechenden Präzisierung und Konkretisierung zu Modellen langfristigen Lernens von Begriffen. Dabei ergeben sich folgende Modelle:

Sammelmodell,

Puzzlemodell,

Schichtenmodell,

Stufenmodell,

Erweiterungsmodell.

4. Begründung von Modellen

Modelle gewinnt man also aus Vorstellungen über Lernen, die man zunächst in Metaphern ausdrückt und dann präzisiert. Das entspringt dem Motiv, die Vielfalt langfristiger Lernprozesse besser zu erfassen und zwar sowohl im Hinblick auf anzustrebende Lernprozesse (*präskriptiv*) als auch auf zu beobachtende Lernprozesse (*deskriptiv*).

(1) Begründung von der Sache her

Die Entscheidung für ein bestimmtes Modell langfristigen Lernens als Grundlage einer Unterrichtsstrategie ist zunächst von dem zu Lernenden bestimmt.

Mathematisches Wissen über Zahlen ist auf unterschiedlichen Niveaus angesiedelt.

Man kann Eigenschaften bestimmter Zahlen feststellen, etwa wenn man aussagt: $3 < \pi < 4$.

Das Kommutativgesetz der Addition ist eine Eigenschaft, die alle natürlichen Zahlen haben. Sie steht damit auf einer höheren Stufe.

Die Tatsache, daß sich jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann, läßt sich als Beziehung zwischen Eigenschaften deuten und damit auf einer wiederum höheren Ebene ansehen. Man kann damit ein Stufenmodell für das Lernen von Zahlen begründen.

Betrachtet man den Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen über die ganzen, die rationalen, die reellen bis hin zu den komplexen Zahlen, dann ist hier die Einsicht grundlegend, daß mit der Erweiterung eines Zahlbereichs jeweils eine Grenze überschritten wird, so daß sich neue Möglichkeiten ergeben. Diese Sicht spricht für ein Erweiterungsmodell.

Diese Modelle muß man nicht unbedingt als Konkurrenten betrachten. Es ist bei der Unterrichtsplanung durchaus sinnvoll, Modelle zu kombinieren. Andererseits betonen die einzelnen Modelle bestimmte Aspekte des Lernens, so daß sie für Argumentationen hilfreich sind.

(2) Begründung von den Lernenden her

VAN HIELE sieht sein Stufenmodell im Einklang mit der kognitiven Entwicklung der Lernenden. Auch BRUNERS Spiralmodell ist entwicklungspsychologisch begründet. Man kann aber auch eine ganze Reihe didaktischer Prinzipien als Entscheidungsgrundlage mit Blick auf das Kind anführen. Etwa an das Prinzip des Motivierens, das genetische Prinzip, das Prinzip des Schaffens von Verbindungen usw.

In diesen Bereich gehören aber auch die Zielsetzungen im Hinblick auf Fähigkeiten und Bedürfnisse der Schüler. Für Hauptschüler kann man z.B. von den

beim Lernen des Zahlbegriffs anzustrebenden und zu erreichenden Zielen her ein Puzzlemodell vertreten; ein Erweiterungsmodell wird sich nur sehr eingeschränkt realisieren lassen. Im Gymnasium dagegen wird man ein Stufen- und ein Erweiterungsmodell in Kombination anstreben. Ob sich dabei allerdings mehr als ein „Puzzlelernen“ realisieren läßt, hängt sicher auch zum Teil von den Fähigkeiten der einzelnen Schüler ab.

(3) Begründung von den Rahmenbedingungen her

Lernen wird in Schulen unterschiedlich organisiert. In Deutschland wird Unterricht durch gedankliche Linien über die Jahrgangsstufen hinweg geplant. Dies galt auch für den Mathematikunterricht in der DDR (WALSCH, WEBER 1975). In England dagegen wird Unterricht eher aus unterschiedlichen Themenbereichen zusammengesetzt gedacht. Für das Lernen grundlegender Begriffe werden in Deutschland Stufen- oder Erweiterungsmodelle zugrundegelegt, in England eher Puzzle- oder Vertiefungsmodelle.

(4) Begründung von der Erfahrung her

Man kann nachweisen, daß es Abiturienten gibt, bei denen für den Zahlbegriff ein Lernen durch Erweiterung und in Stufen stattgefunden hat. Man muß aber auch zugeben, daß es viele Abiturienten gibt, bei denen allenfalls ein Puzzlelernen nachzuweisen ist. Zwischen Zielen und Ergebnissen klafft also häufig ein erheblicher Unterschied. Trotzdem liegt natürlich auch ein Wert von Lernmodellen darin, Defizite sichtbar zu machen und eventuell vor illusionären Annahmen zu warnen.

5. Bewertung von Modellen

Bei der Diskussion über die Modellbildung sind bereits Wertungen eingeflossen. So ist klar, daß z.B. im Hinblick auf mathematische Erkenntnis Lernen nach einem Stufenmodell höher zu bewerten ist als das Lernen durch Ansammeln.

So einfach liegen die Verhältnisse nicht, wenn man Lernen in Stufen und Lernen durch Erweiterung vergleicht. Wir haben beim Lernen des Zahlbegriffs gesehen, daß man bestimmte Aspekte des Lernens durch Lernen in Stufen, andere als Lernen durch Erweiterung beschreiben kann. In der Praxis überlagern sich also diese Modelle. Das ist vom Erkenntnisprozeß her auch verständlich. Denn während das Stufenmodell die Analyse betont, hebt das Erweiterungsmodell die Synthese hervor. Erkenntnis wird aber gerade im Wechselspiel zwischen Analyse und Synthese gewonnen. Den Zahlbegriff kann man vielleicht in der Hauptschule ausreichend in einem Puzzle lernen. Im Gymnasium wird man sich damit nicht begnügen.

6. Zur langfristigen Planung des Lehrens von Begriffen

Modelle des Lernens sollen als Grundlagen für Pläne des Lehrens dienen. Ich will im folgenden skizzieren, wie man für das Gymnasium und für die Hauptschule jeweils zu einem Plan für das Lehren des Zahlbegriffs gelangt.

(1) Ein Plan für das Lehren des Zahlbegriffs im Gymnasium

Wir haben bereits gesehen, daß unter den höheren Formen des Lernens das Stufenmodell und das Erweiterungsmodell jeweils bestimmte, für das Verständnis des Zahlbegriffs wesentliche Aspekte betonen. Ein Plan für das Lehren des Zahlbegriffs wird also Phasen im Wechsel den verschiedenen Modellen zuordnen.

Zu Beginn der *5. Jahrgangsstufe* wird das in der Grundschule erworbene Wissen über natürliche Zahlen reflektiert. Natürliche Zahlen werden nun auf einem höheren Niveau behandelt. Dieser Übergang folgt dem Modell des Lernens in Stufen.

In der *6. Jahrgangsstufe* werden die Bruchzahlen eingeführt. Diese Phase folgt dem Modell des Lernens durch Erweiterung.

Auch die Einführung der negativen Zahlen und damit die Erarbeitung der

rationalen Zahlen in der *7. Jahrgangsstufe* folgt dem Modell des Lernens durch Erweiterung.

Zu Beginn der *8. Jahrgangsstufe* wird das Rechnen mit rationalen Zahlen reflektiert. Man erhält eine Basis für Termumformungen. Mit den Termumformungen wird gleichzeitig auf einer formal höheren Stufe mit den rationalen Zahlen umgegangen.

Bei der Entdeckung der irrationalen Zahlen in der *9. Jahrgangsstufe* steht dann wieder Lernen durch Erweiterung im Vordergrund.

Langfristige Lernprozesse setzen sich aus mittelfristigen Lernprozessen zusammen, die wiederum aus kurzfristigen Lernprozessen erwachsen. Die Bruchzahlen z.B. werden in einem mittelfristigen Lernprozeß angeeignet. Die Einsicht, daß man Bruchzahlen als Quotienten natürlicher Zahlen deuten kann, wird dagegen kurzfristig gelernt. Es ist klar, daß das mittelfristige Lernen der Bruchzahlen einen entscheidenden Schritt im Lernen durch Erweiterung darstellt. Die Einsicht über Bruchzahlen als Quotienten natürlicher Zahlen wiederum ist entscheidend für das Lernen durch Erweiterung, weil es zeigt, wie hier eine Grenze überschritten wird. Zugleich erscheinen damit aber auch die bisher vertrauten natürlichen Zahlen in neuem Licht, nämlich z.B. als Bruchzahlen mit dem Nenner 1. In einem Lernen durch Sammeln würden sich diese Brüche lediglich als Skurrilität darstellen, denen man den Namen „Scheinbruch“ gegeben hat.

(2) Ein Plan für das Lehren des Zahlbegriffs in der Hauptschule

Auch die Hauptschule beginnt in der *5. Jahrgangsstufe* mit einer Reflektion des in der Grundschule erworbenen Wissens und Könnens über natürliche Zahlen. Die Bereiche der natürlichen Zahlen, der Längen, der Gewichte, der Zeiten und der Geldwerte kann man als Teile eines Puzzles sehen. Diese Bereiche „passen zueinander“im Hinblick auf die natürlichen Zahlen als Anzahlen oder als Maßzahlen. Die Geldwerte fallen dabei etwas aus dem Rahmen, weil bei ihnen bereits Dezimalbrüche als Maßzahlen auftreten. Die Zeiten

passen nicht so ganz bei den Umrechnungen zwischen den Einheiten wegen der Sechziger-Teilung.

In der *6. Jahrgangsstufe* werden zunächst die gewöhnlichen Brüche bei den natürlichen Zahlen und die Größen mit gebrochenen Maßzahlen bei den entsprechenden Größen mit natürlichen Maßzahlen angelagert. Es folgen dann die Dezimalbrüche, die bei den gewöhnlichen Brüchen angebunden werden, und zwar wiederum bei den Bruchzahlen und auch bei den entsprechenden Größenbereichen. Die Geldwerte verlieren dabei ihre Sonderrolle. Der Blick für das „Ganze“ wird durch die Dezimaldarstellung eröffnet. An das „Puzzle“ angehängt ist ein relativ schwach eingebundenes und ausgeprägtes Wissen über periodische Dezimalbrüche. Es verliert sich in der Folge relativ rasch oder bleibt als Merkwürdigkeit haften.

In der *7. Jahrgangsstufe* werden die negativen Zahlen einbezogen. Sie werden jeweils mit den natürlichen Zahlen, den gewöhnlichen Brüchen und den Dezimalbrüchen verbunden.

In den folgenden Jahrgangsstufen wird das „Puzzle“ durch einige Teile erweitert, die jedoch das Bild nicht wesentlich verändern. Es handelt sich in der *8. Jahrgangsstufe* um π und in der *9. Jahrgangsstufe* um die Wurzeln. Auch sie sind als nicht abbrechende Dezimalbrüche durch die Dezimaldarstellung in das Ganze einbezogen. Der Übergang von der Grundschule vollzieht sich also nach einem Stufenmodell, das Lernen in den folgenden Jahrgangsstufen folgt einem Puzzlemodell.

Literatur

Andelfinger, B., Arithmetische und algebraische Lernerkonzepte in der SI, BzMU 1984, 71-74.

van Hiele, P.M., Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindliche Zahlbegriffsentwicklung, In: K. Odenbach (Hrsg.), Rechenunterricht und Zahlbegriff, Braunschweig (Westermann) 1967, 105-131.

Holland, G., Geometrie in der Sekundarstufe, Mannheim (BI) 1988.

Steiner, H.-G., Über Metaphern, Modelle und Mathematik, In: P. Bender (Hrsg.), Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Berlin (Cornelsen) 1988, 190-201.

Vollrath, H.-J., Didaktik der Algebra, Stuttgart (Klett) 1974.

Vollrath, H.-J., Methodik der Begriffslehrens im Mathematikunterricht, Stuttgart (Klett) 1984.

Vollrath, H.-J., Paradoxien des Verstehens von Mathematik, JMD 14 (1993), 35-58.

Vollrath, H.-J. Algebra in der Sekundarstufe, Mannheim (BI) 1994

Wagenschein, M., Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I, Stuttgart (Klett) 1970.

Walsch, W., K. Weber (Hrsg.) Methodik Mathematikunterricht, Berlin (Volk und Wissen) 1975.

Weidig, I., Stufungen im Mathematikunterricht der Hauptschule, In: H.-J. Vollrath (Hrsg.), Geometrie, Stuttgart (Klett) 1982, 19-30.

Weigand, H.-G., Zum Verständnis von Iterationen im Mathematikunterricht, Bad Salzdetfurth (Franzbecker) 1989.

Weigand, H.-G., Zur Didaktik des Folgenbegriffs, Mannheim (BI) 1993.

Weth, T., Zum Verständnis des Kurvenbegriffs im Mathematikunterricht, Hildesheim (Franzbekker) 1993.

Wittenberg, A.I., Bildung und Mathematik, Stuttgart (Klett) 1990[2].