57. Betrachtungen über einen für Anwender typischen Umgang mit Mathematik

In: B. Fuchssteiner, W.A.J. Luxemburg (Hrsg.), Analysis und Geometry, Trends in Research and Teaching, Festschrift für D. Laugwitz, Mannheim 1992, 149-161.

1. Einführung

Der Würzburger Mathematiker CASPAR SCHOTT gibt 1661 in seinem „Cursus Mathematicus“ in 28 Kapiteln einen Überblick über das mathematische Wissen seiner Zeit. Diese Enzyklopädie behandelt ganz unterschiedliche Gebiete wie

> Arithmetik, Elementargeometrie, Trigonometrie, Astronomie, Astrologie, Chronographie, Geographie, Hydrographie (Nautik), Horographie (Lehre von den Sonnenuhren), Mechanik, Statik, Hydrostatik, Optik, Militärarchitektur, Strategie, Taktik, Harmonielehre, Algebra und Logarithmen.

Häufig werden sie noch aufgeteilt, und es werden praktische Teile besonders hervorgehoben, etwa praktische Arithmetik, praktische Geometrie, praktische Astronomie.

Bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts wurden alle diese Gebiete im Zusammenhang gesehen, wenn man auch zwischen „spekulativen“ und „praktischen“ Teilen (Schott) oder später zwischen „reiner“ und „angewandter“ Mathematik unterscheidet.

LAUGWITZ hat sich wiederholt mit der Problematik einer solchen Unterscheidung auseinandergesetzt. Er schreibt z.B. 1972:

> „Die Unterscheidung von ‚reiner‘ und ‚angewandter‘ Mathematik ist nicht mehr zeitgemäß. Im jeweiligen Stand und in der jeweiligen Entwicklungstendenz der Mathematik gibt es vielmehr Gebiete, welche zu unmittelbarer Anwendung in der Gegenwart geeignet sind, und es gibt andere, für die das

> zunächst nicht zutrifft. So sollte man statt Angewandter Mathematik lieber den Ausdruck verwenden: Unmittelbar anwendbare Mathematik; aber das ist zu schwerfällig formuliert. Ich werde daher von ‚Anwendbarer Mathematik' sprechen, wobei dies aber im angegebenen Sinne aufzufassen ist." (LAUGWITZ 1972, S. 232)

Auch FREUDENTHAL unterscheidet zwischen „angewandter" und „anwendbarer" Mathematik (FREUDENTHAL 1973, S. 75-80). Er möchte, „daß der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet" (S. 76). Allerdings ist ihm im Grunde auch „anwendbare Mathematik" zu eng. Er propagiert deshalb „beziehungshaltige Mathematik". Dabei sieht er jedoch durchaus die Gefahr, daß auch dies zu einer Fehlentwicklung führt, wenn man sich auf innermathematische Beziehungen beschränkt: „Der vollkommenste Ausdruck der innermathematischen Beziehungen ist das System" (S. 76). Von diesem System geht eine so starke Faszination aus, daß Lehrer und Lehrbuchautoren ihr immer wieder erliegen. Ein Beispiel waren die Reformbestrebungen für den Mathematikunterricht am Gymnasium in den sechziger Jahren, in denen der axiomatischen Methode und den Strukturen besondere Bedeutung beigemessen wurde. In seiner Kritik an den Nürnberger Lehrplänen hat sich LAUGWITZ vehement gegen solche verfehlten „Modernisierungstendenzen" für den gymnasialen Mathematikunterricht gewandt (LAUGWITZ : 1966). Die Euphorie, mit der damals für eine Strukturorientierung der Lehrpläne gekämpft wurde, ist inzwischen einer Ernüchterung gewichen. Heute bemühen sich praktisch alle Bundesländer um Anwendungsorientierung ihrer Lehrpläne. Diese Entwicklung ist durch den Nürnberger Vortrag von LAUGWITZ angestoßen worden.

Anwendungsorientierung drückt sich in der Wahl der Inhalte und in der Art ihrer Behandlung aus. Die Frage der Inhalte beherrscht zur Zeit die didaktische Diskussion (z.B. BLUM u. a. 1989). Doch haben auch methodische Fragen, wie Mathematik anwendungsorientiert unterrichtet werden kann, einiges Interesse gefunden (z.B. STEINER 1988). Bei solchen Betrachtungen wird gelegentlich eher geringschätzig z.B. von einem „ingenieurmäßigen Umgang mit Ma-

thematik“ gesprochen. LAUGWITZ dagegen kennzeichnet in seiner „Ingenieurmathematik“ z.B. die Herangehensweise von Ingenieuren als „operativ“ oder „konstruktiv“ (LAUGWITZ 1964). Ich will versuchen, dies etwas näher zu beschreiben. Dazu will ich auf einige allgemeine Probleme hinweisen, mit denen Anwender konfrontiert werden. Es soll dann deutlich werden, wie man „konstruktiv“ mit diesen Problemen umgehen kann und welche didaktischen Konsequenzen daraus für den Mathematikunterricht zu ziehen sind.

Indem ich diesen Gedanken von Herrn LAUGWITZ aufgreife und weiter darüber nachdenke, möchte ich ihm meine Hochachtung für sein didaktisches Engagement aussprechen. Zugleich danke ich ihm herzlich dafür, daß er mich ermutigt hat, mich eingehender mit Mathematik zu befassen, und mir die Möglichkeit geboten hat, erste Erfahrungen mit Forschung und Lehre in Mathematikdidaktik zu sammeln.

2. Zur Mathematikausbildung künftiger Anwender

Wenn man anwendungsorientierten Mathematikunterricht für allgemeinbildende Schulen fordert, dann hat man einerseits künftige Anwender von Mathematik im Blick; andererseits wäre es verfehlt, Mathematikunterricht ausschließlich von daher zu konzipieren. Schule hat Bildung zu vermitteln, die sich nicht von bestimmten Berufsbildern her bestimmen läßt. Sicher ist der Begriff der Bildung schwer faßbar. Doch beginnt sich in der Pädagogik die Einsicht durchzusetzen, daß trotzdem nicht auf die Kategorie der Bildung bei der Diskussion um Ziele des Unterrichts verzichtet werden kann. „Bildung und Mathematik“ ist also nach wie vor ein aktuelles Thema (WITTENBERG 1990[2]). Für die künftigen Anwender von Mathematik bedeutet das, daß sie im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schulen grundlegende Inhalte und Methoden der Mathematik so lernen sollen, daß diese anwendbar sind. Man erwartet also, daß sie erfolgreich an der anschließenden Fachausbildung an der Hochschule oder Berufsschule teilnehmen können. Aber auch diese spezifische Ausbildung beschränkt sich in der Regel nicht auf konkrete Anwendungen, sondern ver-

sucht allgemeinere Fragen anzugehen, die dann in der Praxis konkret behandelt werden können. Denn die Abnehmer der Absolventen legen Wert auf allgemeine Fähigkeiten und rechnen damit, die konkrete Behandlung der in der Praxis auftretenden Probleme in einer Phase des „Anlernens“ vermitteln zu müssen. Dabei zeigt es sich, daß anscheinend sowohl die Schulen als auch die Hochschulen die inhaltlichen Erwartungen der Abnehmer ihrer Absolventen überschätzen. Es sind jedoch nicht in erster Linie unzureichende Kenntnisse, sondern eher mangelnde Fähigkeiten, die in der Praxis beanstandet werden.

Fähigkeiten beziehen sich darauf, wie Probleme angegangen werden, wie man Mathematik bei der Lösung von Problemen verwendet. Wir wollen jedoch auch Einstellungen zur Mathematik, zum Problem und schließlich zu persönlichen Stärken und Schwächen im Umgang mit Mathematik einbeziehen. Wenn wir im folgenden anwendertypische Verhaltensweisen betrachten, dann geht es uns also darum, solche Fähigkeiten im allgemeinen Sinne zu betrachten.

3. Mit der Labilität von Wissen und Können angemessen umgehen

Von Schülern wird in Klassenarbeiten oder in Prüfungen erwartet, daß sie über das benötigte Wissen und Können verfügen. Als Hilfe wird meist nur die Formelsammlung zugelassen. Das mag seine Berechtigung haben. Doch ist dies eine für Anwender untypische Situation. Anwender haben Fachbücher, Handbücher und Formelsammlungen zur Verfügung, die sie bei Bedarf benutzen. Dabei ergibt sich zwangsläufig: Bei regelmäßig auftretenden Problemen werden diese Hilfen immer weniger benutzt; bei seltener auftretenden Fragestellungen wird häufiger und ausgiebiger auf sie zurückgegriffen; bei neuen Problemstellungen wird die Literatur intensiv befragt.

Es ist merkwürdig, daß trotzdem immer wieder kritisch die mangelnden Kenntnisse von Studienanfängern oder Berufsanfängern vermerkt werden (z.B. NÄGERL u.a. 1975). Dabei lassen sich solche Befunde leicht erklären. Sie wirken dann weniger dramatisch.

Problem 3.1: *Das Vergessen*

Anwender gehen völlig selbstverständlich mit dem Vergessen um. Es ist eine geläufige Erfahrung, und sie benutzen ständig Hilfen, um Vergessenes wieder zu aktivieren. Schüler sind Meister des Vergessens. Wenn sie nach den Ferien wieder in die Schule kommen, wissen sie nicht mehr, was zuletzt behandelt wurde. Vielleicht ist der Grad des Vergessens sogar ein Maß für die Qualität der Erholung in den Ferien. Erfahrene Lehrer werden also kein Klagelied anstimmen, sondern damit rechnen. Sie steigen mit einer neuen Problemstellung ein, die die Schüler fesselt und bei der die benötigten Kenntnisse und Fähigkeiten auf natürliche Weise angesprochen werden. Und siehe da, schneller als von den Schülern selbst vermutet, sind sie wieder da.

Geschickte Lehrer kennen auch einige Möglichkeiten, um wichtige Sachverhalte vor dem Vergessen zu bewahren: Durch das Herausarbeiten von Ideen wird das Wesentliche hervorgehoben und dann besser behalten (VOLLRATH 1978). Durch Rückgriffe wird Wichtiges gefestigt. Zentrale Begriffe werden durch einprägsame Figuren, durch Wortspiele oder durch „Geschichten“ hervorgehoben. Ein Teil der Mißerfolge der Studienanfänger im obigen Test läßt sich also schlicht und einfach mit dem Vergessen erklären.

Problem 3.2: *Das Verlernen*

Hat man ein Verfahren längere Zeit nicht verwendet, dann „verlernt“ man es: Die einzelnen Schritte werden unsicher, die einschlägigen Regeln sind vergessen; man erinnert sich vielleicht noch daran, daß man das mal gemacht hat, weiß aber nicht mehr, wie es geht. Auch das ist eine Grunderfahrung des Menschen, die für die meisten Bereiche gilt (das Schwimmen scheint man allerdings normalerweise nicht zu verlernen).

Erfahrene Lehrer rechnen auch mit diesem Sachverhalt. Sie tragen Sorge dafür, daß wichtige Verfahren im Unterricht immer wieder auftreten. Man denke etwa an die quadratischen Gleichungen, die im 9. Schuljahr behandelt werden, im 10. Schuljahr bei Exponentialgleichungen und in der Oberstufe dann immer

wieder bei der Behandlung von Funktionseigenschaften (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) und bei der Bestimmung von Funktionen mit vorgeschriebenen Eigenschaften auftreten. Diese Verfahren sind in der Regel eingebettet in komplexen Situationen, bei denen sie in sinnvollen Kontexten immer wieder geübt werden. Allerdings kapitulieren Schüler meist zu früh, wenn sie das Gefühl haben, ein Verfahren nicht mehr zu beherrschen. Wir werden darauf später noch eingehen.

Problem 3.3.: *Die Unsicherheit in ungewohnten Situationen*

Beobachtet man Schüler beim Lösen von Aufgaben, dann fällt auf, daß sie manches voraussetzen, was explizit in der Aufgabe gar nicht angegeben ist. LAUGWITZ macht in seiner „Ingenieurmathematik“ (LAUGWITZ : 1964) z.B. deutlich, daß durch die Gewohnheiten der Schule die Studenten bei der Bestimmung von Extremwerten einer Funktion stillschweigend ihre Differenzierbarkeit voraussetzen und dann das übliche Verfahren der Kurvendiskussionen ansetzen. Aufgaben werden in der Regel kontextabhängig bearbeitet. Es ist dann leicht möglich, den Aufgabenlöser mit einer Problemstellung „hereinzulegen“, die in einem ungewohnten Kontext steht.

Erfahrene Lehrer kennen natürlich auch diese Erscheinung. Wenn ein Thema durch eine Klassenarbeit abgehakt ist, dann würden sich die Schüler unfair behandelt fühlen, wenn dieses Thema unverhofft bei einer späteren Klassenarbeit wieder auftauchen würde. Auch die Abschlußaufgaben stehen in einem bestimmten Kontext. Allerdings enthalten sie in der Regel durch ihre Komplexität Teilaufgaben, die bereits früher behandelt wurden, die jedoch in diesen Kontext bewußt integriert wurden. Doch darf man sich keiner Illusion hingeben, daß nicht auch die Abituraufgaben mit all ihren gut integrierten Teilaufgaben nach dem Abitur „abgehakt“ sind.

Anwender arbeiten in der Regel ebenfalls in einem bestimmten Kontext, der ihnen Sicherheit gibt. Sie wissen, welche Bedingungen kritisch sind, und nehmen andere als selbstverständlich gegeben an. Das ändert sich in einer neuen Situation. Die aus der Erfahrung gewonnene Sensibilität mahnt zur

Vorsicht und schafft eine Unsicherheit. Durch bewußtes Suchen von Beziehungen zu Bekanntem und durch das Erkennen von vertrauten Strukturen können die neue Situation bewältigt und die Unsicherheit überwunden werden.

Nach diesen Betrachtungen sind z.B. die Befunde isolierter Prüfungen von Studienanfängern (s.o.) über in der Schule erworbene Kenntnisse und Fähigkeiten nicht verwunderlich. Die nachfolgende Institution wäre besser beraten, sich durch sinnvolle Problemstellungen mit Einfühlungsvermögen auf die Lernenden einzustellen. Es ist freilich eine anscheinend unwiderstehliche Versuchung hier ausschließlich der Schule „ein Versagen vorzuwerfen". Doch sollten auch die Hochschullehrer damit rechnen, daß die Abnehmer ihrer Absolventen Mängel in der Ausbildung der Studenten festzustellen glauben. Ich wünschte mir, alle Beteiligten würden realistischer mit diesen Schwierigkeiten umgehen.

Man kann ja psychologisch das Vergessen, das Verlernen und auch die Vorsicht in ungewohnten Situationen durchaus als Schutzvorrichtungen unseres Geistes sehen. Insbesondere müßte das auch den Lernenden selbst bewußt werden. Anstatt also die Schüler ihr Versagen im Vergessen, im Verlernen und in ihrer Unsicherheit dem Ungewohnten gegenüber negativ erfahren zu lassen, sollten sie positiv erleben, wie plötzlich Vergessenes wieder auftaucht, Verlerntes wieder in Gang kommt und wie man auf einmal im Ungewohnten Vertrautes wiedererkennt.

Mit dem Vergessen, Verlernen und eigener Unsicherheit in der Mathematik konstruktiv umgehen bedeutet also: Sich mit einem konkreten Problem auseinanderzusetzen und dabei Kenntnisse und Fähigkeiten aufzufrischen und im Erfolg Zutrauen zur eigenen Leistungsfähigkeit zu gewinnen.

4. Auf Wissen in Büchern zugreifen

Es ist allerdings eine Illusion zu glauben, man könne sich die benötigte Mathematik allein durch Erinnern und Anwenden verfügbar machen. Jeder hat die

Erfahrung gemacht: Bestimmtes Wissen wird einfach nicht erinnert, bei einer Rechnung weiß man nicht mehr weiter. Im Unterricht hilft der Lehrer weiter, er gibt Informationen, gibt Tips, wie man es versuchen sollte, weist auf Ähnlichkeiten mit gelösten Problemen hin. Im Grunde ist das eine für Anwender untypische Situation. Sie sind in der Regel auf sich allein gestellt. Deshalb greifen sie normalerweise auf Bücher oder Nachschlagewerke, neuerdings auch auf Wissensspeicher in Datenbanken zu.

In der Schule sind Wissensspeicher heute meist das Schulbuch oder die Formelsammlung. Das Schulbuch ist nur begrenzt verwendbar, denn den Schülern steht in der Regel nur das Buch für das laufende Schuljahr oder den gewählten Kurs zur Verfügung. Außerdem sind die üblichen Schulbücher als Nachschlagewerke nur begrenzt brauchbar. Gerade für Anwendungen wären Bücher wichtig, die zur selbständigen Benutzung anregen, die den behandelten Stoff in anderer Weise darstellen, Bücher, die bestimmte Anwendungsbereiche behandeln, in denen Beispiele mit Musterlösungen zu finden sind. Man denke etwa an Handbücher und Enzyklopädien. Solche Bücher müßten in einem Arbeitsraum für Schüler verfügbar sein. Es ist unglaublich, daß das in der Bundesrepublik immer noch eine Utopie ist. Gelegentlich werden die Schüler bei Facharbeiten aufgefordert, sich Bücher in der Schülerbibliothek oder in sonstigen Fachbibliotheken zu besorgen. Die Mehrzahl der Schüler lernt jedoch nicht, sich einschlägiges Wissen und Können für Anwendungen selbständig aus Büchern zu beschaffen. Damit lernen sie in der Regel auch nicht die wichtigsten Arbeitstechniken im Umgang mit Büchern als Wissensspeicher. Ich meine damit nicht das Durcharbeiten eines Buches von vorn nach hinten, sondern das „Quereinsteigen“ in ein Buch, um auf kürzestem Wege zu der gewünschten Information zu gelangen. Dabei geht es vor allem darum, jeweils das Wesentliche zu erfassen. Im folgenden sollen dazu einige Techniken skizziert werden. Dabei will ich auch Hinweise geben, wie Bücher im Hinblick auf solche Arbeitstechniken benutzerfreundlich geschrieben sein können.

Problem 4.1: *Einschlägiges Wissen über Begriffe finden*

Mathematisches Wissen ist meist an Begriffen festgemacht. In Darstellungen mathematischer Theorien findet es sich in Definitionen und in Sätzen. Über den Index von Büchern wird man häufig zunächst zur Definition geführt. Das Problem des Quereinsteigens in ein Buch liegt jedoch in der Regel darin, daß man zum Verständnis der Definition wiederum Kenntnisse über Begriffe benötigt, die in der Hierarchie früher angesiedelt sind. Nehmen wir als Beispiel den Begriff der Ableitung einer komplexen Funktion. Die Ausführungen dazu beginnen mit einer Formulierung der Art: „Die Funktion w = f(z) sei im Gebiet G definiert." Man hofft, daß der Leser genügend sensibel ist, um zu erkennen, daß sich hinter dem Wort „Gebiet" ein Fachterminus verbirgt, dessen Bedeutung man durch eine Definition erfahren kann. Also blättert er zurück und findet einige Seiten vorher: „Als ein Gebiet bezeichnet man eine zusammenhängende offene Punktmenge in der komplexen Zahlenebene." Das Buch ist leserfreundlich für Quereinsteiger geschrieben, wenn an dieser Stelle erläutert wird: „d.h. eine solche Punktmenge, in der zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können, und in der mit jedem Punkt auch eine Kreisscheibe mit positivem Radius um diesen Punkt enthalten ist" (LAUGWITZ 1965, S.8). Der Autor ist nun auf einer Ebene der Begriffshierarchie angelangt, bei der er erwartet, daß der Leser über alle auftretenden Begriffe verfügt. Damit ist es dem Quereinsteiger jetzt möglich, den Begriff in sein Wissen einzubinden und in dem Buch weiterzuarbeiten. Die Reduktion des erforderlichen Wissens wird allerdings häufig durch schwere Erfaßbarkeit erkauft, die sich aus der Reihung der Begriffe ergibt. Ein solches Vorgehen ist also nur ökonomisch, wenn der Leser nicht zu weit zurückblättern muß, sondern bald auf durchweg bekannte Begriffe und Redewendungen stößt, und wenn die Formulierungen hinreichend übersichtlich bleiben.

Obwohl diese Arbeitstechnik für Anwender fundamentiert ist, wird sie in der Schule überhaupt nicht vermittelt. Ja, man erwartet vom Lehrer, daß er seinen Unterricht so plant, daß er den Schülern stets alles zur Verfügung gestellt hat, was jeweils benötigt wird. Normalerweise wird zunächst die Mathematik

bereitgestellt, dann wird diese unmittelbar angewendet. Neuere Schulbücher steigen häufig auch mit einer Umweltsituation ein und erarbeiten daran die erforderliche Mathematik. Das selbständige Beschaffen von Mathematik durch Quereinsteigen in Fachbücher können die Schüler jedoch auf diese Weise nicht lernen. Man sollte deshalb im Unterricht den Schülern auch immer wieder einmal individuell Aufgaben stellen, bei denen es erforderlich ist, sich einschlägiges mathematisches Wissen selbständig aus Büchern der Bibliothek zu verschaffen. Dabei sollten Sie auch ermutigt werden, individuelle Wissensspeicher anzulegen. Mathematische Aufsätze, Referate und Facharbeiten sind sinnvolle Aufgabenstellungen, bei denen die Schüler die Technik des Quereinsteigens lernen und anwenden können. Damit sollte jedoch nicht didaktisch gerechtfertigt werden, daß Lehrer, die aus Zeitmangel bestimmte Begriffe nicht im Unterricht behandelt können, nun von den Schülern verlangen, sich ganze Listen von Begriffen selbst zu erarbeiten.

Problem 4.2: *Einschlägige Verfahren finden*

In der Regel suchen Anwender Verfahren zum Lösen eines Problems, das sich ihnen stellt. Indem in der Mathematik Problemstellungen über Begriffe formuliert werden, sind sie so allgemein gehalten, daß sie für ganz verschiedenartige Anwendungsbereiche verwendet werden können. In der Mathematik antworten Sätze häufig auf bestimmte Problemstellungen. Diese enthalten dann auch meist Verfahren zur Lösung des Problems. So kann man etwa den Beweis des Satzes anwenden, um ein konkretes Problem zu lösen. Man denke z.B. an einen Fixpunktsatz. Der Satz behauptet unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz eines Fixpunktes. Zum Beweis wird vielleicht eine Fundamentalfolge entwickelt, die gegen den Fixpunkt konvergiert. Für den Anwender kommt es nun bei seinem konkreten Problem der Bestimmung eines Fixpunktes auf das Finden der geeigneten Fundamentalfolge an. Ein Mathematikbuch für den Mathematiker bringt diese Aufgabe gern als Übung unter und überläßt die Schwierigkeiten dem Leser. Anwenderfreundliche Bücher dagegen behandeln an dieser Stelle ein ausführliches Beispiel und geben Hinweise auf die Schwierigkeiten, machen auf wichtige Sachverhalte aufmerksam, die zu beachten sind

usw.

Die Schüler sind es im Unterricht gewohnt, daß Verfahren im Vordergrund stehen. Sätze haben für sie allenfalls Begründungsfunktion und Beweise beruhigen in erster Linie das „mathematische Gewissen“ der Lehrer. Das wird natürlich begünstigt, wenn der Beweis erst nach dem Satz geliefert wird. Häufig läßt sich jedoch ein Satz als Lösung eines Problems herleiten und das Verfahren unmittelbar aus diesen Betrachtungen gewinnen. Dieser natürliche Vorgang sollte nicht zu Gunsten einer fragwürdigen Axiomatik aufgegeben werden. Je stärker die Schüler in diesem Prozeß beteiligt werden, umso eher erfassen sie diese Beziehungen. Daß dann solche Prozesse zu reflektieren sind, wird in der didaktischen Literatur zunehmend betont. Damit erhofft man, daß die Schüler dann leichter auch mit systematischen Darstellungen fertigwerden, wie das ja z.B. im Studium von ihnen verlangt wird.

Problem 4.3: *Isomorphe Problemstellungen finden*

Bei vielen praktischen Problemstellungen mag es schwierig sein, den mathematischen Kern zu entdecken und das Problem allgemein zu formulieren. In diesen Fällen ist es für Anwender hilfreicher, wenn sie unter gegebenen konkreten Problemen eines finden, das ihrem Problem entspricht. Man spricht von isomorphen Problemen, wenn sie in den wesentlichen Angaben und Fragestellungen übereinstimmen. Nehmen wir etwa ein statistisches Problem einer Psychologin. Sie hat zwei Stichproben unterschiedlichen Behandlungen unterzogen und will nun feststellen, ob beobachtete Verhaltensunterschiede statistisch signifikant sind. So wie ich dies Problem geschildert habe, ist es bereits so allgemein formuliert, daß man in einem Katalog statistischer Prüfverfahren suchen könnte. Aber die Erfahrungen zeigen, daß es für viele Anwender einfacher ist, in einer vernünftig geordneten Beispielsammlung ein isomorphes zu suchen und das eigene Problem entsprechend anzugehen. Ein anwenderfreundliches Buch wird beides anbieten: Einen klar gegliederten Katalog mit allgemeinen Problemstellungen und dann zu den einzelnen Problemstellungen charakteristische Beispiele, die durchgerechnet worden sind. Wichtig ist auch

hier, auf kritische Voraussetzungen zu achten (z.B. Stichprobengröße, Verteilung usw.).

Diese Technik wird in der Schule noch am ehesten vermittelt. Denn in den Schulbüchern werden meist die wichtigsten Aufgabentypen eines Problembereichs durch Beispielaufgaben hervorgehoben. Bei den dann gestellten Aufgaben ist herauszufinden, zu welcher der Musteraufgaben sie isomorph ist. Allerdings ist durch den engen Problembereich das Suchfeld stark begrenzt. In der Regel wird auch nicht verlangt, sich einen neuen Aufgabentyp selbständig zu erarbeiten. Hier könnte der Unterricht die Schüler durchaus praxisnäher arbeiten lassen, indem man nicht Übungsaufgaben gleichen Typs isoliert, sondern unterschiedliche Typen nebeneinander auftreten läßt. Das geschieht z.B. in der Schlußrechnung, wenn Aufgaben zu proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen gemischt werden. Aber in der Schule besteht doch die Tendenz, die Varianz von Aufgaben stark einzuschränken. Hier wird das Prinzip von der „Isolation der Schwierigkeiten“ übertrieben.

Konstruktiv mit in Büchern gespeichertem mathematischem Wissen umgehen und es für die eigenen Problemstellungen nutzbar zu machen, bedeutet also, Wissen aus Büchern in eigenes Wissen einzubinden, sich aus allgemeinen Verfahren selbst eine Problemlösung zu verschaffen oder isomorphe Probleme zu entdecken und zur eigenen Problemlösung nutzbar zu machen.

5. Modelle bilden

Bisher sind wir davon ausgegangen, daß die Anwender die Lösung ihres Problems selbst finden oder in einem Buch entdecken können. In der Praxis treten jedoch häufig Probleme auf, für die das nicht zum Erfolg führt, weil die Situation komplex ist und sich nicht auf einen einfachen Fall zurückführen läßt, oder sie ist komplizierter als die bekannten Fälle. Vielleicht „paßt“ auch die vertraute Mathematik gar nicht auf die neue Situation. In allen diesen Fällen geht es darum, eine angemessene mathematische Beschreibung zu finden, ein Mo-

dell zu bilden. Dazu benötigt man bestimmte Arbeitstechniken. Es gibt eine umfangreiche Literatur mit tiefsinnigen Betrachtungen darüber (z.B. FISCHER, MALLE 1985, 3. Kap.; STEINER 1988, WINTER 1989, 10. Kap.). Ich möchte hier nur auf die für Anwender wichtigen Arbeitstechniken eingehen.

Problem 5.1: *Wissen kombinieren*

Dies ist eine Technik, die in der Schule in vielen Bereichen geübt wird: Man lernt z.B. Formeln für die Volumina der Grundkörper kennen und kann nun Formeln für die Volumina zusammengesetzter Körper finden. Formeln werden kombiniert, in Formeln werden Variable substituiert, Formeln werden umgeformt. Aus Grundfunktionen werden durch die bekannten Verknüpfungen neue zusammengesetzt. Die Schüler müssen dazu Grundbausteine und Bauprinzipien kennenlernen, um selbst sicher Wissen zu kombinieren. Das ist natürlich besonders wichtig für Anwender. Es kommt also weniger auf begriffliche Subtilitäten als auf einen konstruktiven Umgang mit den Begriffen an, wie LAUGWITZ für Ingenieure am Beispiel der Funktionen zeigt. „Die vier Grundoperationen führen zu den Polynomen und den rationalen Funktionen, die analytische Operation des Grenzübergangs erzeugt aus Polynomen die Potenzreihen, die Operation des Integrierens führt auf spezielle Transzendenz Funktionen (Logarithmus), und die Operation der Bildung der Umkehrfunktion führt in Reihen aus trigonometrischen Funktionen (Fourier-Reihen) ergeben dann operativ einen Zugang zu weitgehend willkürlichen Funktionen.“ (LAUGWITZ 1967, S. 5-6).

Problem 5.2: *Sinnvoll vereinfachen*

Anwendungssituationen erfordern häufig, erst einmal unter vereinfachenden Annahmen zu arbeiten, die Tragweite zu erproben und dann soweit notwendig zu verallgemeinern. Bekannt ist, daß Anwender es z.B. bei funktionalen Zusammenhängen in der Regel zunächst einmal mit einem linearen Zusammenhang versuchen. Diese Annahme führt zu einfachen Berechnungsmöglichkeiten und beruht auf tief verwurzelten Vorstellungen (VOLLRATH 1989). Wenn man bedenkt, daß Mathematiker eine besondere Vorliebe für das Einfache haben

und danach streben, das Komplizierte zu vermeiden, ist also auch mathematisch dagegen nichts einzuwenden. Doch sollten sich die Anwender stets dessen bewußt sein, daß sie hier ein sehr einfaches Modell bilden, dessen Brauchbarkeit kritisch überprüft werden muß. Für kompliziertere Sachverhalte bietet die Mathematik durchaus auch angemessene Werkzeuge, die allerdings etwas schwieriger zu handhaben sind.

Problem 5.3: *Neue Modelle entwickeln*

Betrachtet man die Entwicklung des Funktionsbegriffs, so kann man sie als einen Anpassungsprozeß an bestimmte Bedürfnisse beschreiben. LAUGWITZ zeigt in seiner „Ingenieurmathematik“, wie man auf diesem Wege zu den Distributionen gelangt und macht deutlich, daß sie für angehende Ingenieure ein wichtiger mathematischer Gegenstand sind (LAUGWITZ 1967). Wenn auch die Schule nicht so weit gehen wird, so sollte sie doch auch zeigen, wie man die mathematischen Begriffe den Bedürfnissen anpaßt. Z.B. wird bei der Betrachtung von Ware-Preis-Funktionen meist ein linearer Zusammenhang angenommen. In der Praxis ist das nicht immer gerechtfertigt. Nimmt man z.B. die Gewicht-Porto-Funktion für Briefe, so erhält man eine Treppenfunktion. Die Volumen-Preis-Funktion für Heizöl (unter Berücksichtigung von Mengenrabatten) kann durch eine stückweise proportionale Funktion beschrieben werden (VOLLRATH 1973). Andere Beispiele liefern z.B. Weg-Zeit-Funktionen von Bewegungen. Bei diesen Fällen verläßt man die gewohnten Bahnen; natürlich werden Berechnungen komplizierter, doch bewältigt man so das Problem in angemessener Weise.

Allerdings ist die Mathematik anpassungsfähiger als viele Anwender meinen. Durch geschickte Definitionen kann man durchaus brauchbare Modelle selbst entwickeln. Betrachtet man z.B. den Gesamtwiderstand zweier Teilwiderstände R_1 und R_2 bei unterschiedlichen Schaltungen, so ergibt sich für den Gesamtwiderstand R_s bei Serienschaltung

$$R_s = R_1 + R_2$$

bei Parallelschaltung erhält man den Gesamtwiderstand R_p durch die recht komplizierte Formel

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Definiert man für positive reelle Zahlen a, b eine neue Verknüpfung durch

$$a * b = \frac{ab}{a+b},$$

so kann man den Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung auch ganz einfach ausdrücken durch

$$R_p = R_1 * R_2.$$

Viele Formeln für Schaltungen von Widerständen lassen sich dann wesentlich einfacher und übersichtlicher schreiben (VOLLRATH 1972).

Konstruktiv mit Mathematik in Anwendungen umzugehen, bedeutet also auch, Mathematik durch Kombination von Wissen, durch sinnvolle Vereinfachungen oder durch Weiterentwicklung mathematischer Techniken der Problemstellung anzupassen und so eine Lösung zu finden.

6. Mathematik konkretisieren

In seiner Doktorprüfung 1863 in Berlin soll der Würzburger Mathematiker FRIEDRICH PRYM (1841-1915) seinem Prüfer ERNST EDUARD KUMMER auf die Frage nach der Auflösung algebraischer Gleichungen gestanden haben, er sei während seiner Studienzeit noch nie in die Lage gekommen, eine Gleichung höheren Grades auflösen zu müssen. PRYM wurde trotzdem mit Glanz promoviert. Konkrete Berechnungen sind bei Mathematikern in der Regel nicht sehr beliebt. Das Interesse ist meist erloschen, wenn man das Problem allgemein

gelöst hat. Für die Anwender ist die Situation völlig anders. Sie sind ja gerade auf die konkrete Lösung ihres Problems angewiesen. Im allgemeinen wird deshalb auch bei Mathematikern an Technischen Universitäten das Rechnen höher gewertet als an Universitäten. In der Schule wird allerdings das konkrete Lösen eher übertrieben. Man könnte vielleicht als sinnvolle Einstellung für Anwender anstreben: Man sollte sich vor Rechnungen nicht scheuen, sollte sie jedoch möglichst intelligent organisieren. Mit den Computern wird überdies das Schwergewicht ohnehin auf das Organisieren gelegt.

Problem 6.1: *Mathematisches Arbeiten organisieren*

Nehmen wir an, der Anwender hat die allgemeine Lösung seines Problems gefunden, dann muß er nun für konkrete Werte die zugehörige spezielle Lösung bestimmen.

Komplexere Rechnungen erfordern Teilberechnungen, die in zweckmäßiger Reihenfolge ablaufen. Für die Teilarbeiten kann man unter Umständen auf unterschiedliche Verfahren zurückgreifen. Software ist vernünftig einzusetzen. All dies erfordert die Organisation der einzelnen Schritte. Das Vorhandensein geeigneter Software ermöglicht heute auch in der Schule die Bearbeitung wesentlich komplexerer Aufgaben. Man kann etwa ein Geometrieprogramm zum Konstruieren geometrischer Gebilde einsetzen. Dann beschreibt man den Vorgang analytisch und arbeitet nun mit einem Algebraprogramm, um Gleichungen so umzuformen, so daß man die geometrischen Gebilde, die durch sie beschrieben werden, erkennen kann. Leistungsfähige Software wie z.B. „DERIVE“ wird wahrscheinlich in absehbarer Zeit auch zu einer Änderung der Abituraufgaben führen, bei denen die Akzente stärker in Richtung Überlegung, Planung und Interpretation verschoben werden (z.B. WEIGAND, WETH 1991).

Problem 6.2: *Ergebnisse kritisch bewerten*

Das Bestimmen einer speziellen Lösung dient für Anwender zunächst häufig dazu, mit Hilfe bekannter Daten kritisch zu prüfen, ob der allgemeine Lösungsweg gangbar ist. Dann werden neue Daten betrachtet und die errechneten

Daten mit den gemessenen verglichen.

Auch im Mathematikunterricht wird immer wieder den Schülern geraten, vor der Berechnung Vermutungen über das zu erwartende Ergebnis anzustellen, es soll geschätzt und überschlagen werden. Tatsächlich stößt dies bei den Schülern nicht auf besondere Gegenliebe. Der größte Mißerfolg des Mathematikunterrichts scheint mir jedoch darin zu bestehen, daß praktisch unsinnige Lösungen von den Schülern als mathematisch möglich angesehen werden. Unzählige Schüler rechnen wild darauf los, operieren mit den Angaben der Aufgaben, bekommen etwas heraus und glauben, sie hätten die Aufgabe gelöst. Die Forderung, die gefundene Lösung kritisch von der Situation her zu überprüfen, bleibt wirkungslos. Die Beispiele, die STELLA BARUK (BARUK 1989) gibt, sind erschütternd. Mathematik-Welt und Wirklichkeit haben anscheinend für viele Schüler nichts miteinander zu tun. Für den Anwender dominiert die Wirklichkeit. Die Mathematik ist nur Hilfsmittel. Im Mathematikunterricht ist die Anwendung für die Schüler dagegen nur „Verkleidung“. Nur wenn es dem Mathematikunterricht gelingt, Wirklichkeit ernst zu nehmen, wird auch die Bereitschaft bei den Schülern wachsen, Ergebnisse kritisch zu werten. Ansätze dazu finden sich z.B. im Projektunterricht, bei dem eine komplexe Problemstellung der Wirklichkeit im Mittelpunkt steht und Mathematik aus unterschiedlichsten Bereichen einzusetzen ist. Vielleicht ist es für Schüler auch überzeugend, wenn sie Situationen mit dem Computer simulieren und dann am Modell die gefundenen Daten überprüfen können.

Andererseits scheint bei Anwendern die Neigung zu bestehen, sich „blind“ der auf sie zugeschnittenen Software auszuliefern, ohne daß sie sich für die zugrundeliegenden Modelle interessieren. Man denke etwa an Statiker, für die es für die üblichen Probleme entsprechende Software gibt. Welche Berechnungen dabei der Computer durchführt, interessiert den Statiker nicht, solange die gewünschten Ergebnisse geliefert werden. Dies ist unbefriedigend und für spätere Benutzer der Bauten auch gefährlich, wie gelegentliche Zusammenbrüche von Brücken oder Decken zeigen.

Bei vielen Problemen von Anwendern bedarf die mathematische Lösung schließlich einer Interpretation. Man denke etwa an die Wurfparabel. Die Situation bezieht sich nur auf ein Parabelstück, die Formel jedoch unterliegt keinen besonderen Einschränkungen. Erhält man also die Parabel als Ergebnis, dann wird man einerseits fragen, welche Punkte als Lösungen des Problems infrage kommen. Dies führt zunächst zu einer Einschränkung. Andererseits wird man sicher auch fragen, ob man die übrigen Punkte deuten könnte. Wenn auch solche Fragen dann eher hypothetischen Charakter haben, dienen sie doch zur Vertiefung des Verständnisses der Situation und der gefundenen mathematischen Lösung.

Problem 6.3: *Mathematik finden oder erfinden?*

Anwender stehen häufig in dem Konflikt, kostbare Zeit durch Suchen zu verlieren oder mit vergeblichen Versuchen zu scheitern. Sollen sie ihr Problem erst einmal direkt angehen, oder sollen sie lieber ein geeignetes Lösungsverfahren in Büchern suchen?

Wenn die Schüler nicht sofort erkennen, wie eine Aufgabe gelöst werden muß, dann fangen sie an zu überlegen, ob sie schon mal etwas Ähnliches gemacht haben. Sie suchen in ihren Büchern oder Aufzeichnungen. Die Bereitschaft, selbst einen Lösungsweg zu suchen, ist gering. Das liegt auch daran, daß im Unterricht für jeden Aufgabentyp meist ein bestimmter Lösungsweg beschritten wird und daß Mathematikunterricht als ein Unterricht zum Lösen bestimmter Aufgabentypen gesehen wird. Da Lösungsmethoden in den Augen der Schüler in der Regel mathematisch anspruchsvoll sind, kommen sie gar nicht auf die Idee, einen eigenen Lösungsweg zu suchen.

Realistisch betrachtet sind die Erfolgsaussichten für die Anwender wohl auch größer, wenn sie sich nach bewährten Verfahren umschauen, anstatt selbst drauflos zu probieren. Andererseits hat das Probieren durchaus seinen Sinn, weil man dadurch eher mit dem Problem vertraut wird, Abhängigkeiten erkennt und bestimmte Erwartungen entwickelt. Ein solches Herangehen ist sicher auch der kritischen Betrachtung der Lösung, die dann durch ein bestimmtes Ver-

fahren gefunden wird, förderlich. Andererseits fördert erfolgreiches Problemlösen auch das Zutrauen zu sich selbst. In der Praxis werden die Anwender sowieso Abkürzungen gehen, Veränderungen vornehmen, also auch selbständiger an der Problemlösung arbeiten. LAUGWITZ gibt den Lesern seiner Ingenieurmathematik den Rat

> „Dabei versuche man zunächst, die Aufgabe selbständig, ohne Benutzung der in der Regel ausführlichen Anleitung zu lösen!“ (LAUGWITZ : 1967, S. 7)

Konstruktiv mit Mathematik in Anwendungen umgehen, heißt also schließlich, mathematisches Arbeiten zu organisieren, Ergebnisse kritisch zu werten und Mut zu haben, auch eigene Wege zu gehen.

7. Grenzen

Der pragmatische Umgang von Anwendern mit der Mathematik ist überwiegend am Erfolg orientiert. Er kann eine starke Motivation für die Mathematik darstellen. Andererseits darf man nicht übersehen, daß ein solcher Umgang mit Mathematik auch negative Wirkungen haben kann. Das „Funktionieren“ von Mathematik kann zu einer Bevorzugung von „Rezepten“ führen. Die Ausrichtung auf die speziellen Problemstellungen begünstigt eine Beschränkung auf einschlägige Verfahren und damit eine Verengung, die bei neuen Problemstellungen behindernd sein kann. Das Quereinsteigen in Büchern kann zur Oberflächlichkeit verführen und eine gründliche Auseinandersetzung mit der mathematischen Theorie behindern. Der Zugriff auf passende Software kann das Bemühen um angemessene Modelle scheinbar überflüssig machen. Das konkrete Arbeiten führt unter Umständen zu einer Vernachlässigung der Suche nach allgemeineren, tragfähigen Lösungen.

Im Grunde sind jedoch auch Anwender langfristig besser bedient, wenn sie sich gründlich mit Mathematik auseinandersetzen (LAUGWITZ : 1974). Denn damit gewinnen sie Sicherheit und Handlungsspielraum. Wenn wir also emp-

fehlen, Schülern Aufgaben zu stellen und Wege zu zeigen, bei denen sie einen anwendertypischen Umgang mit Mathematik lernen können, dann soll dies sowohl auf Erfolg als auch Verstehen ausgerichtet sein, um den Schülern das Anwenden von Mathematik zu erleichtern. Denn „Mathematik, wenn sie Wesentliches für die Anwendungen leisten soll, ist nicht einfach; aber sie läßt sich so darstellen, daß sie dem zugänglich ist, der sich darum bemüht“ (LAUGWITZ 1972, S. 252). Dies ist eine Herausforderung für die Lehrer. Die Mathematikdidaktik bemüht sich darum, ihnen dabei behilflich zu sein.

Literatur

Baruk, S., Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik, Basel (Birkhäuser) 1989

Blum, W., (Hrsg.) Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics, Chicester (Ellis Horwood) 1989

Fischer, R., G. Malle, Mensch und Mathematik, Mannheim (BI) 1985

Freudenthal, H., Mathematik als pädagogische Aufgabe, Stuttgart (Klett) 1973

Laugwitz, D., Ingenieurmathematik I, Mannheim (BI) 1964

Laugwitz, D., Ingenieurmathematik V, Mannheim (**BI)**1965

Laugwitz, D., Sinn und Grenzen der axiomatischen Methode, Der Mathematikunterricht 12, Heft 3, 16-39, 1966

Laugwitz, D., Ingenieurmathematik IV, Mannheim (BI) 1967

Laugwitz, D., Anwendbare Mathematik heute, in: H. Meschkowski (Hrsg.), Grundlagen der modernen Mathematik, Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1972, 224-252

Laugwitz, D., Mathematik für Techniker Der „Grundkurs“, in H. Meschkowski, D. Laugwitz (Hrsg.), Didaktik der Mathematik, Bd. IV: Hochschuldidaktik, Stuttgart (Klett)1974, 231-251

Nägerl, H., u.a.: Über die Schwierigkeiten von Studienanfängern der Medizin beim Transfer einfacher mathematischer Regeln, Didaktik der Mathematik 3, 150-158, 1975

Steiner, H.-G., Zur Methodik des mathematisierenden Unterrichts, in: Steiner, H.-G., Das mathematische Denken und die Schulmathematik, Göttingen (Vandenhoeck&Ruprecht) 1988, 193-225

Vollrath, H.-J., Zur algebraischen Behandlung von Widerstandsschaltungen, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 19, 159-165, 1972

Vollrath, H.-J. Ware-Preis-Relationen im Unterricht, Der Mathematikunterricht 19, Heft 6, 58-76, 1973

Vollrath, H.-J., Rettet die Ideen! Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 31, 449-455, 1978

Vollrath, H.-J., Funktionales Denken, Journal für Mathematikdidaktik 10, 3-37, 1989

Weigand, H.-G., T. Weth, Das Lösen von Abituraufgaben mit Hilfe von DERIVE, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 44, 177-182, 1991

Winter, H., Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Braunschweig (Vieweg) 1989

Wittenberg, A.I.,Bildung und Mathematik, Stuttgart (Klett) 1990[2]