34. Eine Thematisierung des Argumentierens in der Hauptschule

Journal für Mathematikdidaktik 1 (1980), 28-41

1. Zum Argumentieren im Mathematikunterricht

In den letzten Jahren wird in der didaktischen Literatur zunehmend von „argumentieren“ gesprochen, wenn es darum geht, kognitive Ziele des Mathematikunterrichts anzugeben. Man benutzt diesen Terminus meist im Sinne von „begründen“ und will damit zum Ausdruck bringen, daß man das Begründen nicht auf die mathematisch eingeengte Form des Beweisens beschränken möchte. Damit meint man also, „logisch einordnen; folgern; überprüfen; voll einsehen; sich an Vereinbarungen (z.B. Definitionen) halten; auf vollständiger Unterrichtung bestehen; Scheinargumente als solche zu entlarven; bereit sein, Gegenargumente anzuhören; bereit sein, unwiderlegbare Argumente zu akzeptieren“ (WITTMANN 1974, S.36)

Läßt man einen derartig breiten Spielraum zu, dann ergeben sich natürlich sehr verschiedenartige Argumentationen auf unterschiedlichen Niveaus. Zunächst erhält man unterschiedliche Argumentationen im Hinblick darauf, welche Vereinbarung über die Zustimmung zu einem Argument vorausgesetzt wird. So kann z.B. eine Aussage als wahr angesehen werden, „wenn sie allen plausibel erscheint oder wenn sie experimentell bestätigt werden kann oder wenn sie einen hohen Wahrscheinlichkeitsgrad hat (Fast immer ist ...) oder wenn sie von einer ‚anerkannten' Autorität vorgebracht wird usw. – oder schließlich, wenn sie sich allein durch logische Schlüsse aus den Grundannahmen ergibt“ (WINTER 1972).

Verschiedene Argumentationen ergeben sich insbesondere aber auch durch die unterschiedlichen mathematischen Ideen, die einer solchen Überlegung zugrunde liegen. Man denke etwa an die über hundert bisher bekannt gewordenen Beweise zum Satz des PYTHAGORAS. Natürlich werden die Möglichkeiten zu

solchen unterschiedlichen Argumentationen durch die Konzeption der zugrundeliegenden Unterrichtssequenz eingeengt. Doch wird meist eine größere Vielfalt von Argumentationen angestrebt, um den Schüler eine Möglichkeit zu originellen, selbständigen Lösungen zu bieten.

Die Entwicklung des Abstraktionsvermögens der Schüler macht es erforderlich, z.B. beim Begründen von Regeln und Verfahren das Argumentationsniveau an diese Entwicklung anzupassen. Das geschieht in Bereich der Arithmetik dadurch, daß man zunächst an anschaulichen Objekten wie Repräsentanten von Längen und Flächeninhalten argumentiert, später zu Zahlen und schließlich zu Termen übergeht. Dabei hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, daß Argumentationen an konkreten Objekten durchaus als Beweise gewertet werden können, wenn sie ein auf jeden anderen Einzelfall übertragbares Verfahren, also eine Strategie, erkennen lassen (GRIESEL 1973, S. 151 und GRIESEL-POSTEL 1978). Weist man z.B. nach, daß

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$$

gilt, so ist das eine Vorstufe für einen formalen Beweis des Kommutativgesetzes für die Multiplikation von Brüchen. Diese Umformung enthält bereits die entscheidende Strategie, nämlich die Kommutativität der Bruchmultiplikation auf die der Multiplikation natürlicher Zahlen zurückzuführen. Der didaktische Wert solcher Argumentationen im Konkreten ist unbestritten.

Auf einem bestimmten Niveau sind verschiedene Argumentationstypen möglich, und eine bestimmte Argumentationsweise kann auf verschiedenen Niveaus stattfinden. Welche Argumentationstypen und welche Argumentationsniveaus angemessen sind, das hängt von der Leistungsfähigkeit und den Erfahrungen der Schüler ab (BÜRGER 1978). Der Argumentationstyp und das Argumentationsniveau lassen sich wesentlich beeinflussen durch die Wahl des mathematischen Zugangs. So erhält man z.B. unterschiedliche Begründungen auf verschiedenen Niveaus, je nachdem, ob man Bruchrechnung an Operatoren

oder an konkreten Brüchen orientiert (KIRSCH 1970)

Außerdem tritt bei didaktisch orientierten Zugängen häufig der Effekt auf, daß z.B. Regeln, die bei einem mathematisch orientierten Aufbau die Rolle von Definitionen spielen, bei einem didaktisch orientierten Aufbau beweisbare Aussagen sind. Ein typisches Beispiel ist die Regel für die Addition von Brüchen, die sich bei den didaktisch orientierten Zugängen zu den positiven rationalen Zahlen als beweisbare Aussage ergibt, während sie bei einem mathematisch orientierten Zugang als Definition auftreten kann (KIRSCH 1977).

In den bisher betrachteten Fällen haben Aussagen wie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

paradigmatischen Charakter. An ihnen soll das Typische einer Klasse von Aussagen, die Regel, hervortreten. Argumentationen haben hier die Aufgabe, eine Einsicht in einen allgemeinen Sachverhalt zu vermitteln und diese zu sichern.

Betrachtet man andererseits Aussagen wie

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

so tritt durch die Wahl der durch die Erfahrung besonders ausgezeichneten Repräsentanten das Besondere der Situation hervor. Bemüht man sich bei einer solchen Aussage um eine Begründung, so wird hier eine große Breite unterschiedlicher Erfahrungen angesprochen, die man im Unterricht aktivieren kann.

Bei solchen speziellen Aussagen wird man vielleicht nicht von Sätzen und bei solchen Argumentationen nicht von Beweisen sprechen, weil das zu hochtrabend wirken würde, wenn z.B. auch LANDAU in seinen *Grundlagen der Analysis* die Aussage $2 \cdot 2 = 4$ als einen Satz bezeichnet und den Lesern als

Übungsaufgabe empfiehlt, „jenen Satz zu beweisen“. Nach dem allgemeinen Sprachgebrauch wird man in der Bruchrechnung wohl eher Aussagen wie:

$$\text{Für alle } a, b, c, d \in \mathbb{N} \text{ gilt } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

als Satz bezeichnen, für den man einen Beweis erbringt. (Andererseits ist die Aussage „π ist eine transzendente Zahl“ sicher ein Satz. So daß man die Bezeichnung Satz nicht auf wahre „All-Aussagen“ beschränken wird.)

2. Argumentieren in der Hauptschule

Als eine wesentliche Funktion des Beweisens im Unterricht wird die Vermittlung von Einsichten gesehen. In der Praxis stellen deshalb häufig die zu einer Regel, einem Verfahren oder einem Satz führenden Überlegungen bereits einen „Beweis“ dar. In der Hauptschule verzichtet man meist auf formale Beweise, da sie den Schüler überfordern würden. Am radikalsten tritt wohl KARASCHEWSKI für eine Reduktion der Ansprüche auf das pädagogisch Sinnvolle in der Hauptschule ein, wenn er betont, daß es möglich ist, dem Schüler mathematische Einsichten ohne strenge Beweise zu vermitteln. Würde man dem Schüler Beweise aufzwingen, käme es zu der widersinnigen Situation: „Was der Schüler könnte, das darf er nicht, und was er darf, das kann er nicht!“ (1969, S. 169).

Andererseits sind durchaus Konzeptionen entwickelt worden, mit denen gerade für die Hauptschüler spezifische Argumentationsweisen erschlossen werden sollen. So empfiehlt OEHL Unterrichtsmaßnahmen, die von einen „Operieren mit Bedeutungsinhalten“ zu einem „Operieren mit Bedeutungsträgern“ führen (1965, S. 29). Bei FRICKE findet sich eine Fülle von Anregungen, wie man z.B. in der Bruchrechnung durch die Erschließung von Zusammenhängen zwischen Zahlen zu einer „heuristisch forschenden“ Erarbeitung gelangen kann (1969).

Man will damit der Gefahr eines rezeptorientierten Unterrichts begegnen, in dem lediglich das, „Wie“ mitgeteilt wird, aber nicht der Versuch unternommen wird, das Verfahren einsichtig zu machen: „Das Verfahren wird auf die Autorität des Kaufmanns (oder des Mitschülers?, oder des Lehrers?) hin übernommen und nun mechanisch ausgeführt“. (BREIDENBACH 1963[6], S. 25).

Bei diesen Ansätzen geht es im wesentlichen darum, das Operieren in Zahlbereichen zu erschließen. Argumentationen sollen dazu dienen, Einsichten zu vermitteln. Darüber hinaus wird auch die Bedeutung von wiederholenden Argumentationen für einsichtiges Operieren betont: „Wir sollten nicht mechanische Rechenregeln abfragen und mechanisch anwenden lassen, sondern das Kind zur Ein sicht bringen, die Einsicht immer wieder einmal vollziehen lassen, auch das (natürlich notwendige!) Üben von Techniken mit Einsicht verbinden und so die Denkfähigkeit des Kindes steigern.“ (BREIDENBACH 1963[6] , S. 26)

Auch in der Geometrie haben Argumentationen im wesentlichen die Aufgabe, Einsichten in Zusammenhänge zu vermitteln. In den Schulbüchern werden meist die Sätze in einer Aufgabensequenz entwickelt. In Teilschritten werden Begründungen geliefert oder von den Schülern gefordert. Dabei verzichtet man in der Regel darauf, die Begründungen in Form von Beweisen hervorzuheben.

Dagegen soll sich im äußerlich undifferenzierten Mathematikunterricht der DDR das Beweisen als Leitlinie durch den gesamten Mathematikunterricht der Sekundarstufe I ziehen. Dabei ist an einen längeren Lernprozeß gedacht, der von einer propädeutischen Phase mit Begründungen an „materiellen Handlungen“ ausgeht und zum selbständigen formalen Beweisen führt. Freilich sieht man auch dort Schwierigkeiten in der Verwirklichung dieses anspruchsvollen Zieles, die sich aus Begabungsunterschieden ergeben: „Allerdings sollte beachtet werden, daß bei der Bewältigung von Beweisaufgaben individuelle Leistungsunterschiede der Schüler sichtbar werden und zu berücksichtigen sind.“ (WALSCH 1972, S. 151)

Im Hinblick auf die begrenzte Leistungsfähigkeit der Hauptschüler weist man

deshalb in der Bundesrepublik Argumentationen im Bereich der Arithmetik und der Geometrie vorwiegend dienende Funktion zu. Es ist damit zu rechnen, daß dabei den Schülern die Tätigkeit des Argumentierens nicht bewußt wird. Dies könnte erst durch Argumentationsübungen und eine Diskussion von Argumenten geändert werden. Es erscheint mir daher sinnvoll, das Argumentieren in dar Hauptschule an geeigneten Stellen zu thematisieren.

3. Thematisierung des Argumentierens in der Hauptschule

Um die Schüler zu Argumentationen zu motivieren, wird man nach genügend problemhaltigen Situationen suchen (VOLK 1978). Damit man dann auch verschiedene Argumente diskutieren kann, sollten Aufgabenstellungen entwikkelt werden, bei denen die Schüler selbst verschiedenartige Argumente finden können, die in unterschiedlicher Weise Zustimmung erwarten lassen.

Stark problemhaltige Aufgabensituationen, die zu unterschiedlichen Argumentationen führen, bietet z.B. WELLSTEIN mit der Behandlung von Abzählproblemen in der Hauptschule an (1978). Bei ihnen bestehen zahlreiche Möglichkeiten zur Variation des Argumentationsniveaus, und die Problemstellungen lassen eine große Zahl von Lösungen zu. Tatsächlich konnte GLASER (1978) nachweisen, daß eine überraschend große Zahl verschiedenartiger Lösungen bei solchen Aufgaben von Schülern gefunden werden.

Bei diesen Betrachtungen ordnet sich das Argumentieren einer größeren Problemstellung unter, nämlich der Lösung eines Abzählproblems. Hierbei dürfte jedoch das Argumentieren dem Schüler in der Regel nicht als besondere mathematische Tätigkeit bewußt werden, da z.B. die Begründung für eine Lösung meist eine Mitteilung über den eingeschlagenen Weg ist. Mir scheinen diese Aufgaben eher dazu geeignet, bei den Schülern Fähigkeiten im Argumentieren zu fördern, als Einsichten über das Argumentieren zu vermitteln.

Ich möchte statt dessen vorschlagen, das Argumentieren z.B. an elementaren arithmetischen Aussagen zu thematisieren. Dabei denke ich an Aussagen der

Art

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{3} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Erfahrungsgemäß lassen gerade Aussagen der Bruchrechnung eine große Zahl verschiedener Begründungen auf unterschiedlichen Niveaus zu (PADBERG 1978, S. 9). Deshalb erscheinen mir solche Aussagen besonders geeignet. Damit dem Schüler bewußt wird, daß es um das Argumentieren und nicht um richtiges Urteilen geht, sollte die eigentliche Behandlung dieser Aufgaben genügend lange zurückliegen. Besonders geeignet erscheint mir das 9. Schuljahr, da es von seiner Zielsetzung her die gewonnenen Kenntnisse und Einsichten sichern und vertiefen soll. Außerdem verfügt dann der Schüler über einen ausreichenden Vorrat an Kenntnissen, die vielfältige Lösungen erwarten lassen.

Als Einstieg kann man direkt auf das Problem zusteuern, also z.B.

> „Natürlich wißt ihr alle, daß $\frac{1}{2}$ kleiner als $\frac{3}{4}$ ist, aber wir wollen uns überlegen, wie wir das jemandem am besten erklären können“.

Will man mit einer Umweltsituation beginnen, so bietet sich z.B. an:

> „Eine Getränkefirma setzt einen Preis aus für die beste Begründung: Ich trinke Perle, denn...“.

Man sollte dann mit den Schülern erarbeiten, nach welchen Gesichtspunkten solche Argumente bewertet werden können. Anschließend leitet man dann zur Begründung einer arithmetischen Aussage über.

Um zu überprüfen, ob Hauptschüler tatsächlich zu brauchbaren Argumentationsleistungen an solchen Aussagen fähig sind, haben wir in einer Fallstudie im Sommerhalbjahr 1978 und im Winterhalbjahr 1978/79 an Hauptschülern des 7. Schuljahres in Hessen und des 9. Schuljahres in Bayern Argumenta-

tionsleistungen untersucht. Dabei wurden die Schüler aufgefordert, auf einem Blatt Papier aufzuschreiben, weshalb $\frac{1}{2}$ kleiner als $\frac{3}{4}$ ist. Außerdem wurden sie aufgefordert, aufzuschreiben, wie sie das einem jüngeren Schüler erklären würden.

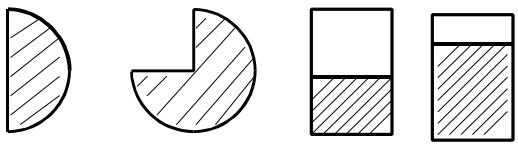
Bei der ersten Frage war bewußt offengelassen, wen die Begründung überzeugen soll. Die Schüler gingen wohl stillschweigend davon aus, daß sie den Lehrer zufriedenstellen sollten. Es zeigte sich dabei jedoch, daß sie recht unterschiedliche Vorstellungen über die Erwartungen hatten. Das wurde in den verschiedenen Verweisen deutlich.

Verweis auf Autoritäten: Einige wenige Schüler verwiesen auf Personen, so muß etwa der oft zitierte Adam Riese dafür herhalten, daß diese Aussage richtig ist. Oder es wird begründet:

„Das weiß man eben, das haben wir immer so gemacht“.

Hierbei scheinen die Antworten jedoch eher zu bezwecken, dem Fragenden zu signalisieren, daß man keine Lust hat, auf diese Frage zu antworten. Man kann sicher nicht davon ausgehen, daß die Schüler überzeugt sind, eine stichhaltige Begründung gegeben zu haben. Man vergleiche dazu auch BÜRGER 1978.

Verweis auf Erfahrungen: Viele Schüler illustrierten die Aufgabe mir Figuren, also z.B.



Sie erwarteten, daß man beim Vergleich der schraffierten Flächen sieht, daß die Aussage wahr ist. Sie stützten sich dabei auf eine *Beobachtung.* Andere Veranschaulichungen benutzten Äpfel, Schokoladentafeln oder verschieden gefüll-

te Gefäße.

Auf *Vorstellungen* beriefen sich Schüler, die z.B. sagten:

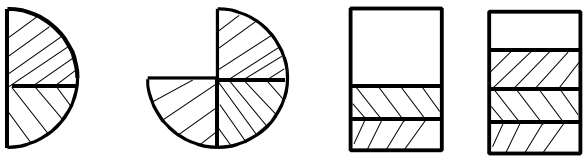
„Man weiß, daß in eine $\frac{1}{2}$ l-Flasche weniger hineingeht als in eine $\frac{3}{4}$ l-Flasche“,

oder:

„Wenn ich eine $\frac{3}{4}$ Stunde warten muß, dann ist das länger als bei einer halben Stunde“.

Typisch für diese Argumentationen ist, daß hier jeweils fest gegebene Größen verglichen werden, ohne daß Zusammenhänge zwischen den Brüchen angesprochen werden. Das ändert sich beim folgenden Typ.

Verweis auf Einsichten: Auch hier kann wieder konkret argumentiert werden, z.B. mit der Figur:



An den Unterteilungen wird deutlich, daß der Schüler die Einsicht gewonnen hat, daß $\frac{1}{2}$ gleich $\frac{2}{4}$ und damit kleiner als $\frac{3}{4}$ ist, denn 2 Viertel sind weniger als 3 Viertel. (Auch so wurde etwas formaler von Schülern argumentiert).

Bei der Diskussion dieser unterschiedlichen Bezüge sollte deutlich werden, daß der Hinweis auf Personen fragwürdig ist, da keineswegs sicher ist, daß man die Personen richtig zitiert (was bei ADAM RIES sicher nicht der Fall ist) und ob

sich die Personen in diesen Punkt nicht vielleicht getäuscht haben.

Etwas komplizierter sind die Verhältnisse beim Hinweis auf die Erfahrung. In diesem Fall sind wohl die Hinweise überzeugend, allerdings nur, weil hier so klare Größenunterschiede vorliegen. Es sollte deutlich werden, daß diese Argumente kaum verallgemeinerungsfähig sind, daß es also leicht ähnliche Aussagen gibt, bei denen man so nicht mehr entscheiden kann.

Als brauchbarste Argumentationen erweisen sich solche, bei denen auf eine Einsicht verwiesen wird. Tatsächlich bewegten sich auch die meisten Schülerantworten in diesem Bereich.

Kern einer möglichen Unterrichtseinheit ist natürlich das Finden und das Bewerten unterschiedlicher Argumentationen. Unsere Untersuchung bestätigt, daß bei dieser Aufgabenstellung eine große Zahl verschiedener Begründungen gegeben wird. Die wichtigsten Typen waren (hier formal wiedergegeben)

Zählervergleich:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \quad \frac{2}{4} < \frac{3}{4}, \quad \text{also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

Vergleich von Vielfachen:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot 2, \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\cdot 3, \quad \text{also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

Vergleich von Teilen:

$$\frac{1}{2}:2 = \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}:3 = \frac{1}{4}, \quad \text{also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

Ergänzung:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \text{also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

Unterschied:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \text{also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

Unterschied zu 1:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{2}, \quad \text{also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

Die Schüler brachten diese Argumente allerdings häufig stärker sprachlich formuliert, z.B.

„Weil man bei $\frac{3}{4}$ 3 mal den vierten Teil nimmt und bei $\frac{1}{2}$ nur 2 mal den vierten Teil“.

Meist waren die Antworten auch etwas fragmentarisch, z.B.

„Weil man 3 mal den vierten Teil nimmt und bei $\frac{1}{2}$ nur 2 mal den vierten Teil“,

oder

„$\frac{1}{2}$ geht durch 2 teilen, daß sind $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$ geht durch 3 teilen, daß sind $\frac{1}{4}$“.

Es finden sich natürlich auch schiefe Formulierungen, bei denen man trotzdem den richtigen Kern erkennt, z.B.

„Wenn man $\frac{1}{2}$ auf einen Nenner bringt, wird aus $\frac{1}{2}$ ein $\frac{2}{4}$ und $\frac{3}{4}$ verändert sich nicht.“

Interessant war, daß bei vielen Schülern auch das Arbeiten mit Dezimalbrüchen und die Prozentrechnung ihre Spuren hinterlassen hatten. So wurde etwa begründet:

Vergleich von Dezimalbrüchen:

$$\frac{1}{2} = 0{,}50; \quad \frac{3}{4} = 0{,}75; \quad 0{,}50 < 0{,}75, \text{ also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

bzw.

$$\frac{1}{2} = 1{:}2 = 0{,}50; \quad \frac{3}{4} = 3{:}4 = 0{,}75; \quad 0{,}50 < 0{,}75, \text{ also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

Vergleich von Prozenten:

$$\frac{1}{2} = 0{,}50\%; \ \frac{3}{4} = 75\%; \ 50\% < 75\%, \text{ also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

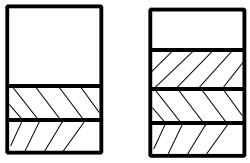
Bei der Diskussion dieser Argumente wird man herausarbeiten, welche Eigenschaften der Bruchzahlen dabei jeweils angesprochen werden.

Bei der Verschiedenartigkeit der Argumente erscheint es reizvoll, Argumente zu vergleichen. Dabei wird man versuchen, sich einen Gesprächspartner vorzustellen, den man überzeugen will.

Jemand, der keine Prozentrechnung kennt, wird sicher nicht durch ein Prozentargument zu überzeugen sein. Andere Argumente setzen voraus, daß man Addition und Subtraktion von Brüchen beherrscht.

Bei solchen Überlegungen könnten Abhängigkeiten zwischen Argumenten

hervortreten. So wurde z.B. argumentiert:



$\frac{1}{2} = 50\%$ $\frac{3}{4} = 75\%$ also $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$

Hier können die Schüler einsehen, daß man wohl eher eine Begründung dafür gegeben hat, daß 50%< 75% gilt. Hieran kann ihnen bewußt werden, daß es eine „Hierarchie der Einsichten“ (WITTENBERG 1963) gibt.

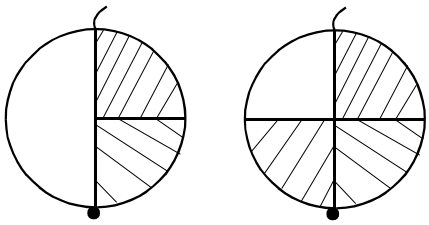
Glücklicherweise treten auch falsche Lösungen auf, etwa:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}, \quad \text{denn} \quad 1 < 3 \text{ und } 2 < 4.$$

Es ist für die Schüler überraschend, daß eine Begründung für einen richtigen Sachverhalt, die sich auf richtige Aussagen stützt, falsch sein kann. Das kann dem Schüler bewußt werden, wenn er dieses Argument auf andere Fälle, z.B. auf $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$ überträgt. Damit wird deutlich, wie stark bereits diese konkreten Argumentationen auf Allgemeinheit zielen. Solche falschen Argumente sollten unbedingt behandelt werden, da man an ihnen die Frage diskutieren kann, *wann* ein Argument stichhaltig ist, wie man sich davon überzeugt und *wie* man

Argumente ablehnen kann.

Bei unseren Versuchen streuten selbst innerhalb einer Klasse die Argumentationsniveaus ziemlich stark. So konnten wir z.B. folgende Stufen beobachten. Es wurde am Bild argumentiert:



Hier wird also an Repräsentanten von Größen argumentiert, bei denen Bruchzahlen als Maßzahlen auftreten.

Andere Schüler beschrieben das, z.B.

> „Man zerlegt den Apfel in 4 Teile. Ein halber Apfel sind 2 Viertel, ein 43 Apfel sind 3 Viertel“.

Stärker formal argumentierten Schüler:

$$\frac{1}{2} \text{ sind } \frac{2}{4}, \text{ das sind weniger als } \frac{3}{4}.$$

Und schließlich

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \quad \text{also } \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

Für die unterschiedlichen Niveaus kann man verschiedene Ursachen vermuten. Am naheliegendsten ist vielleicht, daß der Schüler auf dem Niveau argumentiert, das für Ihn am meisten Überzeugungskraft besitzt. Man könnte dann Rückschlüsse auf den Entwicklungsstand des Schülers ziehen. Andererseits war ja die Formulierung so offen gewählt, daß die Schüler unter Umständen bei ihrer Erklärung an einen Partner dachten, den sie mit diesem Argument am stärksten überzeugen konnten.

Daß Schüler in diesem Alter ein Niveaubewußtsein haben, konnten wir bei der Beantwortung der zweiten Frage sehen. Hier argumentierte ein großer Teil der Schüler mit konkreten Objekten wie Torten und Äpfeln, auch wenn sie vorher auf einem höheren Abstraktionsniveau argumentiert hatten. Auffällig war, daß häufig ausführlicher sprachlich argumentiert wurde als bei der ersten Frage. Hier haben die Schüler wohl den Eindruck, daß man stärker beschreiben müßte. Die Antworten in den Testbögen zeigten manche formalen Mängel, so schrieben manche Schüler Z.B. „multiplizieren“ statt „erweitern“. Auch die sprachlichen Formulierungen sind häufig korrekturbedürftig, so daß eine solche Unterrichtseinheit auch zur Schulung der Ausdrucksfähigkeit beitragen kann.

Als Zeitpunkt zur Thematisierung des Argumentierens erscheint mir das 9. Schuljahr besonders geeignet, weil hier in einer Rückschau die Schüler Einsicht in mathematische Arbeitsweisen erhalten können. Dabei besteht jedoch die Schwierigkeit, daß Hauptschüler im 9. Schuljahr in der Regel wenig Neigung dazu haben, über Ergebnisse zu diskutieren. Ihr Interesse ist meist befriedigt, wenn sie ihre eigene Lösung gefunden und mitgeteilt haben. Andererseits kann vielleicht gerade die Vielfalt möglicher Lösungen und die Neuartigkeit der Fragestellung die Schüler aus Ihrer Reserve locken.

Insgesamt wird deutlich, daß diese Argumentationsaktivitäten einen großen Teil der typischen Betrachtungen beim Beweisen auf elementarem Niveau ins Spiel bringen. Wenn man sich in der Hauptschule auf elementare Aussagen beschränkt, so hat man doch den Vorteil, Argumentationsleistungen zu errei-

chen, die möglicherweise auf andere Bereiche transferierbar und unter Umständen vertiefungsfähig (10. Schuljahr) sind. Gleichzeitig dürfte deutlich werden, daß solche Aktivitäten auch die Forderungen der Hauptschuldidaktiker nach Vermittlung von Einsicht und Beschränkung auf das für die Schüler Zugängliche erfüllen, auf die wir oben verwiesen haben.

4. Argumentationen als Vorstufe des Beweisens

Zur Abrundung der Untersuchung haben wir anschließend im Winterhalbjahr 1978/79 die gleichen Aufgaben Gymnasiasten zweier 7. Klassen in Würzburg vorgelegt. Dabei zeigten sich einige auffällige Unterschiede, die durch die Versuchsanlage natürlich nicht statistisch abgesichert sind, sondern einer gründlicheren Untersuchung bedürften. Gegenüber den Hauptschülern fanden die Gymnasiasten in dieser Altersstufe keine wesentlich anderen Argumentationstypen. Sie argumentierten jedoch fast ausschließlich im Bereich des Verweises auf Einsichten. Dort zeigten sich dann ebenfalls die verschiedenen Niveaus: Es wurde an Figuren argumentiert, es wurde auf Erfahrungen verwiesen, aber häufig wurde auch formal mit den Brüchen operiert. Auffällig ist jedoch ein wesentlich stärkeres verbales Beschreiben. Häufig wurde z.B. statt einen Kuchen, einen Apfel oder ähnliches zu zeichnen, das Teilen dieser Objekte nur beschrieben. Hier macht sich die stärkere Betonung des Sprachlichen im Gymnasium bemerkbar. In den 9. Klassen der Hauptschule zeigten sich die Folgen der Prozentrechnung, Indem haufig in Prozent umgeformt wurde. Dagegen wurde das Prozentargument im Gymnasium nicht gegeben, vielleicht weil die Prozentrechnung nicht genug mit der Bruchrechnung verzahnt worden war. Hieran wird deutlich, daß die auftretenden Argumentationstypen durch den Unterricht beeinflußt werden.

Auch im Gymnasium waren die Schüler durch die Fragen zunächst irritiert. Offensichtlich war es für sie ungewohnt, so deutlich nach einer Begründung für einen klaren Sachverhalt gefragt zu werden. Möglicherweise sind sie aber auch irritiert durch die Unklarheit, auf welche Grundlage sie sich bei ihren

Argumentationen berufen dürfen. Unter Umständen machen sich hier auch gegenüber den Hauptschülern andere Zugänge zur Bruchrechnung bemerkbar.

Gerade diese irritierende Situation läßt sich aber dazu benutzen, die Aufmerksamkeit der Schüler auf das Argumentieren zu lenken. Die Schüler lernen damit das Argumentieren als eine mathematische Tätigkeit kennen, die ihren Reiz in sich trägt. Solche Argumentationsübungen könnten damit im Gymnasium die Rolle einer Vorstufe des Beweisens übernehmen. Traditionell setzen Beweisaktivitäten im Gymnasium im Bereich der Geometrie etwa im 7. Schuljahr ein. Erfahrungsgemäß sind damit viele Schüler überfordert, da sie solche Beweise allenfalls als Pflichtübungen nachvollziehen. Der Spielraum für unterschiedliche Lösungen ist zudem stark eingeschränkt. Die starre Form der Beweise erzeugt häufig eine Unsicherheit bei den Schülern, da sie bei ihren eigenem Lösungen wiederholt vom Lehrer wegen mangelnder Strenge kritisiert worden sind. So haben viele Gymnasiasten in der Mittelstufe einen Horror vor dem Beweisen. Es erscheint deshalb notwendig, auch im Gymnasium eine sorgfältig gestufte Leitlinie „Argumentieren“ zu entwickeln (BÜRGER 1978).

5. Literatur

Breidenbach, W., Rechnen im der Volksschule, Hannover 1963[6]

Bürger, H., Beweisen im Mathematikunterricht –Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II, Schriftenreihe Did.Math. Klagenfurt 2 (1979) 103-134

Fricke, A., Lernprozeß und operative Methode im elementaren mathematischen Unterricht, in: Meyer, F. (Hrsg.), Mathematik in der Hauptschule 1, Stuttgart 1969

Glaser, H., Symmetrieerfassung und das Lösen von Abzählprohlemen, MU24 Heft 2 (1978) 76-104

Griesel, H., Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten 2, Hannover 1973

Griesel, H., H. Postel, Curriculare und methodische Möglichkeiten der Differenzierung im Mathematikunterricht, Schriftenreihe IDM 17 (1978) 101-129

Karaschewski, H., Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichte, Stuttgart 1969[2]

Kirsch, A., Elementare Zahlen-und Größenbereiche, Göttingen 1970

Kirsch, A., Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht, DdM 5 (1977) 87-101

Oehl, W., Der Rechenunterricht in der Hauptschule, Hannover 19651

Padberg, P., Didaktik der Bruchrechnung, Freiburg 1978

Volk, D., Argumentieren können: Notiz zu einem „allgemeinen“ Lernziel des Mathematikunterrichte, MU (1978) 20-26

Walsch, W., Zum Beweisen im Mathematikunterricht, Berlin 1972

Wellstein, W., Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen, DdM 6 (1978) 54-64

Winter, H., Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule, in: Beiträge zum Lernzielproblem, Düsseldorf 1972, 67-95

Wittenberg, A., Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963

Wittmann, E., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1974[1]