25. Differenzierungsprobleme beim Analysisunterricht

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 30 (1977), 65-72

Mit der Reform der gymnasialen Oberstufe hat wieder verstärkt eine Diskussion um den Analysisunterricht eingesetzt, die sich in zahlreichen Aufsätzen und Vorträgen zur Analysis niederschlägt. Es besteht heute weitgehend Übereinstimmung darin, daß jeder Abiturient im Mathematikunterricht mit den Elementen der Analysis vertraut gemacht worden sein soll. Gemäß den unterschiedlichen Zielsetzungen, Fähigkeiten und Neigungen der Schüler soll die Kollegstufe nach einem Eingangskurs ein differenziertes Angebot in einem Grund- und Leistungskurs in Analysis bieten.

Für die Differenzierung haben Länder und Unterrichtswerke verschiedene Modelle entwickelt. Eine Analyse einschlägiger Lehrpläne und neu konzipierter Lehrbücher zeigt eine Reihe bisher nicht befriedigend gelöster Probleme.

1. Differenzierungsprobleme

1.1. Das Problem des Differenzierungszeitpunktes

Vergleicht man den Lehrplan von Bayern (Bayern) mit dem von Nordrhein-Westfalen (NRW 1972), dann fällt sofort der unterschiedliche Differenzierungszeitpunkt auf. Nordrhein-Westfalen beginnt mit einem verhältnismäßig allgemeinen halbjährigen Eingangskurs mit elementarer Aussagen- und Prädikatenlogik, Mengen, Verknüpfungen auf einer Menge, Relationen, Funktionen und reellen Zahlen. Daran schließen sich dann Grund- und Leistungskurs in Analysis an. Bayern plant für Klasse 11 einen ganzjährigen Eingangskurs in Infinitesimalrechnung, der bis zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung führt.

Während also NRW bereits im zweiten Halbjahr von Kl. 11 beim Beginn der Analysis differenziert, geschieht das in Bayern erst zu Beginn von Kl. 12 nach

einem Einführungskurs in Analysis.

Beim bayerischen Modell sehe ich die Schwierigkeit, daß man die späteren Grundkursteilnehmer in Klasse 11 überfordert, wenn man mit der Behandlung der Differentialrechnung eine angemessene Basis für den Leistungskurs schaffen will, daß man aber andererseits die zukünftigen Leistungskursteilnehmer unterfordert und keine ausreichende Basis für die Weiterführung im Leistungskurs hat, wenn man sich nach den Fähigkeiten der Grundkursteilnehmer richtet und die Differentialrechnung stärker anschaulich behandelt.

1.2. Das Problem des Anlaufs

Ein weiteres Problem des Unterrichts in Klasse 11 ergibt sich aus dem *Anlauf* des Analysiskurses. Lehrbücher (z.B. KUYPERS 1975) und Lehrpläne (z.B. NRW 1972) holen häufig zu Beginn des Analysiskurses verhältnismäßig weit aus, um Begriffe wie Aussageform, Lösungsmenge, Funktion, Umkehrfunktion, Relation, die Struktur der reellen Zahlen und gar Aussagen- und Prädikatenlogik zu behandeln. Es besteht die Gefahr, daß dies zu einer ermüdenden Anlaufphase führt, die die Schüler von der eigentlichen Analysis fernhält.

Hinsichtlich des Funktionsbegriffs ist die Zielsetzung einer vertiefenden Wiederholung notwendig; bei der Behandlung der Struktur der reellen Zahlen, insbesondere aber bei Aussagen- und Prädikatenlogik erscheint mir der Wert einer expliziten Behandlung bisher nicht ausreichend gesichert.

Man geht offensichtlich davon aus, daß man die Begriffsbildungen und Schlußweisen der Analysis nur versteht, wenn logische Kenntnisse vorhanden sind. Nun sind die Schwierigkeiten beim Erfassen wichtiger Begriffe der Analysis wie Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit durch die komplizierte logische Struktur der Definitionen mit bedingt. Darauf ist schon oft hingewiesen worden. Es ist aber fraglich, ob diese Schwierigkeiten geringer werden, wenn ein Kurs über Prädikatenlogik vorangeht. Es gibt eine Reihe empirischer Untersuchungen in den USA, die den Einfluß von Logikkurscn auf die Fähigkeit zum richtigen Gebrauch von Schlußregeln in der Logik und in mathematischen

Gebieten untersuchen. Bisher ist mir keine Arbeit bekannt, die eine Überlegenheit von Kursen zeigt, denen eine explizite Behandlung der Logik vorausgegangen ist. Es wäre sicherlich gut, wenn eine so wichtige Curriculumentscheidung empirisch gestützt werden könnte.

Auch die Lehrbücher verhalten sich unterschiedlich hinsichtlich der Anlaufphase (das hängt wahrscheinlich mit der Präferenz für einen bestimmten Lehrplan zusammen). Im Lehrbuch von SCHRÖDER/UCHTMANN für den Leistungskurs (1973) beträgt z.B. der Seitenumfang des Vorspanns 19%, im Grundkurs sogar 27% des Gesamtumfangs; dagegen sieht das Unterrichtswerk von KUYPERS für den Leistungskurs 50%Vorspann vor, verzichtet jedoch darauf für den Grundkurs.

Auffällig sind besonders die langen Anlaufphasen von SCHRÖDER/UCHTMANN und KUYPERS für den Leistungskurs. Man fragt sich, weshalb Curricula und Lehrbücher Inhalte vorschalten, die dem Mittelstufenstoff zuzurechnen sind.

1.3. Das Problem der methodischen Differenzierung

Die Lehrpläne machen verhältnismäßig ausführliche Aussagen über die unterschiedliche Auswahl der Inhalte und über die unterschiedliche Zielsetzung für die beiden Kurse. Daneben finden sich methodische Hinweise über Fragen der Reihenfolge, der Strenge, des Vorgehens bei den Begriffsbildungen und über die Argumentationsweise bei Beweisen. Eine Analyse der Lehrpläne und der bisher vorliegenden differenzierten Unterrichtswerke läßt jedoch erhebliche Zweifel aufkommen, daß die unterschiedliche Zielsetzung der differenzierten Kurse durch ein klares methodisches Differenzierungskonzept verwirklicht wird. Dazu einige Beispiele.

Der Lehrplan von Nordrhein-Westfalen sieht hinsichtlich der Begriffsbildungsprozesse folgende »Varianten« vor:

> *»Für die Begriffsbildung sollte man viel Zeit aufwenden, den Begriffsumfang jedoch so minimal wie möglich halten.«* (Leistungskurs)

»Für die Begriffsbildung sollte viel Zeit aufgewandt werden, der Umfang an Begriffen jedoch minimal gehalten werden.« (Grundkurs)

Es ist unverständlich, daß gerade für die so wichtigen Begriffsbildungsphasen hinsichtlich Begriffsaufwand und Begriffsdichte derartig wenig unterschieden wird.

Jeden erfahrenen Lehrer muß es befremden, wenn bei der zentralen Grenzwertdefinition mit ihren erheblichen didaktischen Schwierigkeiten hinsichtlich des Sprachniveaus überhaupt nicht unterschieden wird:

»Bei der Grenzwertdefinition empfiehlt es sich, von einer verbalen Formulierung auszugehen und diese schrittweise zu algebraisieren.« (Grund- und Leistungskurs)

Auch die Lehrbücher bieten hier kaum brauchbare Lösungen. Dazu wieder einige Beispiele:

»Sei f: $x \to f(x)$, $x \in \mathbb{A}$, eine reelle Funktion und $a \in \mathbb{A}$, f heißt stetig an der Stelle a, wenn es zu jeder Umgebung $\mathbb{V}$ von f(a) eine Umgebung $\mathbb{U}$ von a gibt, so daß $f(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{V}$.« (SCHRÖDER/UCHTMANN, Grund- und Leistungskurs)

»Eine Funktion f heißt stetig an einer Stelle $x_o \in D(f)$ genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).«$$

(KUYPERS, Leistungskurs)

»Eine Funktion f heißt stetig an einer Stelle $x_0 \in D(f)$ genau dann, wenn

(1) *eine Umgebung $U(x_o)$ existiert mit $U(x_o) \subseteq D(f)$*

und

(2) *für jede Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \in D(f)$ und* $\lim_{n \to \infty} x_n = x_o$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_o).«$$

(KUYPERS, Grundkurs)

Die Beispiele zeigen: Ein Unterrichtswerk verzichtet für die Definition der Stetigkeit überhaupt auf eine Differenzierung und mutet beiden Kursen die schwierige Umgebungsdefinition zu.

Beim anderen Unterrichtswerk sind sowohl die Formulierung der Definition als auch die vorausgesetzten Grundlagen im Leistungskurs einfacher als im Grundkurs. Man erkennt hieran, daß entweder die Differenzierung der Lehrbuchwerke nicht gründlich genug vorgenommen worden ist, oder daß methodische Differenzierungsmöglichkeiten in der didaktischen Diskussion bisher nicht genügend Beachtung gefunden haben.

1.4. Das Problem der inhaltlichen Differenzierung

Lehrpläne und Lehrbücher differenzieren am auffälligsten hinsichtlich der Inhalte. So verzichten etwa SCHRÖDER/UCHTMANN im Grundkurs auf die Betrachtung von Folgen, KUYPERS läßt im Grundkurs z.B. die Behandlung spezieller Folgen und Reihen und deren Anwendungen auf die Finanzmathematik weg. Der Verzicht auf Folgen im Grundkurs führt zu einer erheblichen Ersparnis. Stetigkeit wird mit Hilfe des Umgebungsbegriffs erklärt und Differenzierbarkeit wird auf Stetigkeit zurückgeführt. Das ist mathematisch zweifellos elegant, es fragt sich aber doch, ob dabei nicht Grundkursteilnehmer überfordert werden.

Bei den Unterrichtswerken, die ein differenziertes Angebot machen, muß anerkannt werden, daß sie sich schon vom Umfang her erheblich unterscheiden: Bei SCHRÖDER/UCHTMANN beträgt der Umfang des Grundkursbandes etwa 61%, bei KUYPERS etwa 43% des Leistungskursbandcs.

Andererseits bringen z.B. SCHRÖDER/UCHTMANN in beiden Bänden etwa auf jeder 2. Seite eine Definition oder einen Satz mit den zugehörigen Motivatio-

nen, Beispielen, Erläuterungen und Beweisen. Zur Formulierung von Aufgaben werden im Leistungskurs 31%des Buches benutzt, im Grundkursband dagegen 21%. Bei gleichem Theorieanteil in beiden Büchern wird also der Anteil des informierenden Textes im Grundkursbuch etwas größer. Hier zeigt sich zweifellos eine Tendenzwende. Während die »Kurzausgaben« früherer Unterrichtswerke am Text zu Gunsten von Aufgaben sparten, ist jetzt das Verhältnis eher umgekehrt. Hinsichtlich Motivationen, Erläuterungen und Vertiefungen mag man das begrüßen. Der hohe Theorieanteil erscheint mir jedoch für den Grundkurs im Hinblick auf Fähigkeiten und Interessen fragwürdig.

1.5. Das Problem der Weiterführung

Sieht man den Analysisunterricht der Kollegstufe zwischen Propädeutik einerseits und Universitätsunterricht in Analysis andererseits im Sinne einer Curriculumspirale, dann wird man verschiedene Niveaus der Begriffsentwicklung, des Argumentierens, des Formalisierens und des Problemlösens erwarten. Am Beispiel der Definition für die Differenzierbarkeit einer Funktion möchte ich auffällige Diskrepanzen zeigen, die illustrieren können, daß der Kollegstufenunterricht in der Gefahr ist, das angemessene Niveau zu verfehlen.

> *»Sei $f: x \to f(x), x \in \mathbb{A}$, eine reelle Funktion und sei $a \in \mathbb{A}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{A}$. f heißt an der Stelle a differenzierbar, wenn es eine Funktion $\boldsymbol{f_a}: x \to \boldsymbol{f_a}(x), x \in \mathbb{A}$, gibt, so daß gilt:*
>
> *1. $f(x) = f(a) + (x-a)\, f_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{A}$,*
>
> *2. f_a ist stetig an der Stelle a.*
>
> *Die Zahl $f_a(a)$ heißt Ableitung von f an der Stelle a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet.«*
>
> (SCHRÖDER/UCHTMANN, Grundkurs)

»Es sei f: $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ eine reelle Funktion und a $\in \mathbb{A}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{A}$. f heißt an der Stelle a differenzierbar, wenn es eine Funktion f_1: $\mathbb{A} \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. $f(x) = f(a) + (x-a)\, f_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{A}$,

2. f_1 ist stetig an der Stelle a.

Die Zahl f_1 (a) heißt Ableitung von f an der Stelle a.«

(SCHRÖDER/UCHTMANN, Leistungskurs)

»Eine Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle x_o genau dann, wenn die zugehörige Differenzenquotientenfunktion m_x an der Stelle x_0 stetig fortsetzbar ist, wenn also der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to x_o$ existiert. Man bezeichnet diesen Grenzwert mit f' (x_o) und nennt ihn die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0. Es gilt also:

$$\lim_{x \to x_o} m_{x_o}(x) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o).«$$

(KUYPERS, Grundkurs)

»Eine Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle x_0 genau dann, wenn es

1) eine Umgebung $U(x_o)$ gibt mit $U(x_0) \subseteq D(f)$ und wenn

2) der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

$$f'(x_0) =_{Df} \lim_{h \to 0} m(x;h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

existiert. Man nennt den Grenzwert f' (x_o) die Ableitung der Funktion von der Stelle x_0.«

(KUYPERS, Leistungskurs)

Bei den ersten beiden Definitionen erkennt man die Nähe zu GRAUERT/LIEB (1967), die immerhin für Mathematikstudenten, formulieren:

»Es sei f eine auf einer zulässigen Menge M erklärte reelle Funktion und x_0 ein Punkt von M. Man nennt f in x_o differenzierbar, wenn es auf M eine Funktion A mit folgenden Eigenschaften gibt:

(α) A ist in x_o stetig.

(β) Auf ganz M ist $f(x) = f(x_o) + (x - x_o) A(x)$.«

Die meisten Studenten dürften heute diese Definition als eine »Verfremdung« dessen empfinden, was sie in der Schule als Differenzierbarkeit gelernt haben. Ob das wünschenswert ist, mag eine Angelegenheit der Hochschule sein. Es scheint mir aber fragwürdig zu sein, hier der Hochschule entgegenkommen zu wollen. Denn ohne allen Zweifel ist diese Fassung, bei der die Existenz einer Funktion verlangt wird, begrifflich wesentlich schwerer zu erfassen als die traditionelle Definition, bei der lediglich die Existenz eines Grenzwertes, also einer Zahl verlangt wird.

Aber die Schulbuchbeispiele weisen noch auf ein anderes Problem hin. Bei VAN DER WAERDEN findet man 1975 (!) in einem Buch für Studenten der Naturwissenschaften folgende Definition:

»Eine Funktion f(x) heißt differenzierbar an der Stelle x, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert und endlich ist.«

Diese Formulierung ist schlicht und sprachlich so großzügig gehandhabt, daß sie anscheinend nur von einem berühmten Mathematiker für Studenten der

Naturwissenschaften verwendet werden kann.

Alle Erfahrungen sprechen dafür, daß begrifflicher Aufwand im Mathematikunterricht bei den Studenten wenig Spuren hinterlassen hat. So sieht sich die Hochschule immer wieder genötigt, den Anwendern (Psychologen, Wirtschaftlern, Medizinern, Biologen, Chemikern) Mathematikkurse anzubieten, die begrifflich wesentlich schlichter sind als das, was den Schülern in den neuen Schulbüchern zur Analysis selbst im Grundkurs zugemutet wird.

2. Vorschläge für einen Eingangskurs

Mir scheint es eine wichtige Zielsetzung eines Eingangskurses zu sein, in einer Propädeutik notwendige Grundlagen zu wiederholen und zu vertiefen, intuitive Vorstellungen zu wecken und typische Denk- und Arbeitsweisen der Analysis anzusprechen, die den Schülern eine einheitliche Grundlage vermitteln und die ihnen die Wahl des Kurses erleichtern. Man sollte das an wesentlichen Fragestellungen tun, die einerseits für alle Schüler von Bedeutung sind, andererseits eine ausreichende Basis auch für den Leistungskurs darstellen können, ohne die zukünftigen Grundkursteilnehmer zu überfordern. Lassen Sie mich kurz einige Themenkreise skizzieren.

2.1. Nullstellen ganzer rationaler Funktionen

Ich möchte vorschlagen, bereits im Eingangskurs die bekannten Nullstellensätze zu behandeln. Damit werden die Betrachtungen der Mittelstufe wiederholt, weitergeführt und vertieft. Es steht außer Frage, daß damit eine Problemstellung angesprochen wird, die vielen Anwendern begegnet. Gleichzeitig schafft man damit eine gute Grundlage für die Kurvendiskussionen in Grund- und Leistungskurs. Man sollte das Horner-Schema zur näherungsweisen Nullstellenbestimmung verwenden und Iterationsverfahren anschließen, die an die näherungsweise Berechnung von $\sqrt{a}$ in der Mittelstufe anknüpfen. Anschlie-

ßend kann man Iterationsverfahren für ganze rationale Funktionen graphisch und numerisch behandeln, ohne bereits eingehend Konvergenzfragen zu erörtern. Das kann dann im Leistungskurs vertieft werden, indem man dort einen Konvergenzsatz für das benutzte Verfahren erarbeitet (wie z. B. in SCHRÖDER/UCHTMANN 1973).

2.2. Zahlenfolgen

Mögen auch zum Aufbau der Differentialrechnung in der Mathematik *Folgen* nicht als wesentlich betrachtet werden, sind sie im Hinblick auf Verallgemeinerungen in Topologie und Funktionalanalysis auch zu schwach, so sollte man doch ihre große Bedeutung für die numerische Mathematik, und damit auch für die meisten Anwender von Mathematik, nicht unterschätzen. Hinzu kommt, daß man durch jahrelange Unterrichtserfahrungen weiß, daß Folgen für die Propädeutik der Analysis ungemein nützlich sind. Trotz mancher Gegenargumente möchte ich deshalb ausdrücklich Folgen für die Propädeutik der Analysis befürworten. Von der Mittelstufe her haben die Schüler insbesondere bei der Iteration irrationaler Zahlen konvergente Zahlenfolgen intuitiv kennengelernt. Es scheint mir im Sinne einer Curriculumspirale eine gute Zielsetzung zu sein, diese Fragen nochmals aufzugreifen und dadurch zu vertiefen, daß man sie begrifflich klärt. Damit erreicht man gleichzeitig eine vertiefte Kenntnis der reellen Zahlen und erhält eine Vorbereitung des Konvergenzbegriffes in den beiden Kollegstufenkursen.

Dabei möchte ich besonderen Wert auf eine sorgfältige Begriffsgenese legen, die von intuitiver Erfassung des Grenzwertbegriffs bis zu einer formalen Definition führt, auf die auch der Leistungskurs aufbauen kann. Dazu möchte ich vorschlagen, diesen Begriffsbildungsprozeß zu unterstützen durch Betrachtungen eines speziellen Folgentyps, nämlich der schließlich konstanten Folgen.

Auf diese Folgen wird man in natürlicher Weise geführt, wenn man mit Rechnern arbeitet. Rechnet man z. B. mit einem 8-stelligen Elektronenrechner nach

der Iterationsvorschrift

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

mit $a = 2$ und $x_1 = 1{,}5$, so erhält man nacheinander

1,4166666 1,4142156 1,4142135 1,4142135 ...

Das ist eine Folge, bei der vom 4. Glied an alle Glieder übereinstimmen. Beispiele dieser Art führen auf natürliche Weise zum Begriff der schließlich konstanten Folge. Die Schüler erhalten aus den Beispielen eine so klare Vorstellung davon, daß es ihnen nicht schwer fällt, eine Definition anzugeben. Zunächst wird man umgangssprachlich sagen:

Eine Folge heißt *schließlich konstant*, wenn von einem Glied an alle weiteren übereinstimmen.

Schrittweise kann das in der propädeutischen Phase formalisiert werden zu:

Eine Folge $<a_n>$ heißt *schließlich konstant*, wenn

$$\bigvee_N \bigwedge_n (n \geq N \Rightarrow a_n = a_N) \ .$$

Hier lernen die Schüler einen typischen Begriffsbildungsprozeß kennen, wie er später im Analysiskurs noch häufig auftreten wird. Man wird den Begriff festigen durch Beispiele und Gegenbeispiele, durch Oberbegriffe wie Folge und beschränkte Folge, Unterbegriffe wie konstante Folge und schließlich abbrechende Folge. Später wird man dann diese Begriffe in das Begriffsnetz für Folgen einordnen. Als nächsten Schritt wird man nach Eigenschaften suchen.

Insbesondere wird man danach fragen, wie sich die Folgen gegenüber gliedweiser Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division verhalten. Die

Schüler finden leicht die richtigen Vermutungen. Zum Beweis kann man wieder auf verschiedenen Niveaus argumentieren.

An diesem Formalisierungsprozeß können die Schüler ihr Abstraktionsvermögen testen und schulen. Man schafft damit gleichzeitig eine gute Vorbereitung für die Grenzwertsätze der Analysis und erhält schließlich die Möglichkeit prädikatenlogische Überlegungen anzustellen.

Die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ führt natürlich nur dann auf eine schließlich konstante Folge, wenn man die Rechnung mit einem Rechner mit konstanter Stellenzahl durchführt. In diesem Fall werden alle Zahlen auf *i* Stellen gerundet. Bezeichnen wir mit r_i die i-te Rundungsfunktion, die jeder reellen Zahl ihre auf *i* Dezimalen gerundete zuordnet, so ergibt sich die Deutung, daß der Rechner nach der Vorschrift

$$x_{n+1} = r_i\ (\varphi(x_n))$$

arbeitet.

Man transformiert also eine theoretisch gegebene Folge und erhält eine andere mit einem anderen Konvergenzverhalten.

Dieser Sachverhalt kann später zu einer weiteren wichtigen Fragestellung der numerischen Mathematik hinführen. Es ist häufig erwünscht, eine Folge so transformieren zu können, daß eine stärker konvergierende Folge entsteht. Man sollte überprüfen, ob man nicht wenigstens an einem Beispiel ein Konvergenzbeschleunigungsverfahren im Leistungskurs behandeln sollte. (Man denke etwa an die Aitken-Methode, STOER 1972.)

2.3. Interpolation

Schließlich scheint mir das Problem der Interpolation bisher im Unterricht vernachlässigt worden zu sein. Die meisten Anwender werden mit der Aufgabe konfrontiert, Meßpunkte durch eine Kurve zu verbinden und diese durch eine

einfache Funktion zu approximieren.

Eine mögliche Forderung ist, daß die Funktion die Meßwerte liefert. In der Mittelstufe werden quadratische (und kubische) Parabeln bestimmt, von denen 3 (bzw. 4 Punkte) gegeben sind, indem man die Koordinaten in die Kurvengleichungen einsetzt und dann die Koeffizienten durch Lösen des Gleichungssystems bestimmt. Man kann das aufgreifen und fortführen, indem man eine der bekannten Interpolationsformeln von NEWTON oder LAGRANGE einführt, die dazu dienen, mit Hilfe von ganzen rationalen Funktionen zu interpolieren. Allerdings spielen diese in der Praxis kaum noch eine Rolle für Zwecke der Interpolation. Man arbeitet heute meist mit *Kubischer Spline-Interpolation* (Engl. spline: biegsames Kurvenlineal). Diese Methode lehnt sich an das graphische Interpolationsverfahren mit Hilfe eines biegsamen Kurvenlineals an. Es wird dabei für jedes Teilintervall zwischen den Stützstellen eine kubische Funktion bestimmt, derart daß man eine zusammenhängende Kurve erhält. Die kubischen Funktionen werden so zusammengesetzt, daß die Interpolationsfunktion auf dem ganzen Intervall zweimal stetig differenzierbar ist; die Parabelstücke werden bestimmt durch die Bedingungen:

(1) An den Stützstellen werden die gegebenen Werte angenommen.
(2) Die Teilparabeln hängen zusammen.
(3) An den Anschlußstellen sind keine Spitzen.
(4) An den Anschlußstellen ändert sich der Krümmungsradius nicht.

Bei der Bestimmung der Koeffizienten handelt es sich rechnerisch um das Lösen eines Systems linearer Gleichungen.

Wegen der auftretenden Bedingungen (3) und (4) wird man diese Splinefunktionen erst in den Klassen 12 bzw. 13 betrachten (z. B. wie in ADE, SCHELL 1975). Man kann das in der Mittelstufe vorbereiten durch Betrachtung allgemeinerer Ware-Preis-Funktionen (VOLLRATH 1973).

Wieder also scheint mir hier ein Bereich gegeben zu sein, der einerseits an Mittelstufenbetrachtungen anknüpft, dort verwendete Arbeitstechniken sichern

und vertiefen kann, und der dann in der Kollegstufe sinnvoll weitergeführt werden kann.

3. Differenzierung des Analysisunterrichts in der Kollegstufe

Eine Lösung der wichtigsten Differenzierungsprobleme für den Analysisunterricht in der Kollegstufe sehe ich in der unterschiedlichen Ausprägung wichtiger Variabler wie *Allgemeinheitsgrad, Begriffsdichte, Anschaulichkeit, Strenge* usw. Sie beziehen sich auf Unterrichtsphasen wie Hinführen zu einem Begriff, Formulieren einer Definition, Suchen von Zusammenhängen, Aufstellen von Vermutungen, Formulieren eines Satzes, Beweisen eines Satzes, Entwicklung von Algorithmen, Suchen von Beispielen, Anwenden eines Satzes, Üben von Algorithmen usw. Die Lehrpläne setzen für die Auswahl der Inhalte einen Rahmen, die Tendenz immer stärkerer Einschränkung der Wahlfreiheit des Lehrers ist jedoch unverkennbar. Das wird wesentlich begründet mit der Vereinheitlichung der Zielvorstellungen und der Normierung der Leistungen, die im Hinblick auf die Abschlußprüfung entwickelt werden.

Immer wieder werden in der didaktischen Diskussion neue Inhalte, insbesondere für den Grundkurs, vorgeschlagen. Wenn man auch gegen manche Entscheidung Bedenken haben kann, scheinen mir doch methodische Probleme zur Zeit vordringlicher zu sein,

3.1. Leitideen als Differenzierungshilfe

Hinsichtlich der methodischen Gestaltung des Unterrichts machen die Lehrpläne insoweit Angaben, als meist die Reihenfolge der für den Unterricht empfohlenen Inhalte angegeben wird.

Soweit erkennbar, wird die Reihenfolge der Inhalte im wesentlichen durch die sachlogische Struktur bestimmt. Sie entspricht häufig der Reihenfolge, die auch wissenschaftliche Darstellungen zur Analysis benutzen. Das ist insoweit nicht

verwunderlich, als natürlich in der Kollegstufe stärker deduktiv gearbeitet wird. Andererseits haben offenbar Organisationsprinzipien wie das »genetische Lehren«, die »Themenkreismethode«, das »exemplarische Lehren« oder »problemorientiertes Lehren« bisher wenig Bedeutung erlangt; sie haben sich jedenfalls bisher kaum in den Lehrbüchern niedergeschlagen. Anscheinend sind diese Verfahren zu weit von den Intentionen der Schulbuchautoren und vielleicht auch der Lehrer entfernt, da sie nicht als praktikabel angesehen werden. Hinzu kommt, daß die dazu vorhandenen geschlossenen Darstellungen (z.B. zum genetischen Lehren der Analysis in WITTMANN 1973) sich nicht derart deutlich von anderen unterscheiden, daß an ihnen ein alternatives Unterrichtsverfahren erkennbar wäre. Vielleicht liegt es gerade im Wesen dieser Methoden, daß sie nicht für die Darstellung in Lehrbüchern geeignet sind.

Ein weiteres wichtiges methodisches Hilfsmittel ist die *Akzentuierung*. Nach einer Analyse der Zielvorstellungen für die beiden Kollegstufenkurse möchte ich vorschlagen, für den Leistungskurs Analysis *forschungsorientiert* zu unterrichten, während im Grundkurs in erster Linie *anwendungsorientiert* unterrichtet werden sollte. Das kann sich darin äußern, daß bei der Behandlung der Analysis im Grundkurs das Bestimmen von Grenzwerten, Tangentensteigungen, Differentialen, Ableitungen, Integralen, Flächen- und Rauminhalten im Vordergrund steht, während im Leistungskurs Konvergenz, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit, Flächeninhalts- und Rauminhaltsbegriff als wichtige Begriffsbildungen herausgearbeitet werden.

Die Forderung der Anwendbarkeit ist nicht neu. Gerade in Darmstadt hat sie eine lange Tradition. Vielleicht ist dieser Aspekt in der didaktischen Diskussion zeitweise vernachlässigt worden. Ich halte es jedoch für verfehlt, diesen Aspekt dem gesamten Mathematikunterricht zugrunde zu legen. Denn ich sehe nicht, wie sich damit wesentliche Zielsetzungen insbesondere des Leistungskurses verwirklichen lassen. Wohl fordern Lehrpläne »Kenntnis der grundlegenden Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft«, andererseits jedoch auch »Vertiefte Einsicht in den logischen und systematischen Aufbau der Mathematik« (Bayern o.J.).

Dagegen scheint mir die Anwendungsorientierung eher für den Grundkurs richtungweisend sein zu können. Denn hier sind die theoretischen Zielsetzungen wesentlich bescheidener. Analysis im Grundkurs wird sich auf die Dauer nur dann rechtfertigen lassen, wenn den Schülern Fähigkeiten vermittelt werden, die ihnen nützlich sind und die sie in die Lage versetzen, das Gelernte später anzuwenden.

Ich halte es für einen Fortschritt, wenn heute in den Leistungskursen das Bemühen um Erkenntnis gegenüber dem Üben von Techniken überwiegt. Andererseits scheint es mir gerade deshalb notwendig zu sein, im Grundkurs ein echtes Alternativangebot zu machen. Hier sollten die Schüler angesprochen werden, die später allenfalls als Anwender mit Mathematik zu tun haben werden. Bisher habe ich für diesen Kurs noch keine befriedigenden Lehrbücher gesehen. Immer noch scheint mir begrifflicher Ehrgeiz zu dominieren. Das mag zum Teil daran liegen, daß viele dieser Bücher eine »Verdünnung« oder einen »Auszug« aus dem Leistungskursbuch darstellen. Hier scheint mir eine ganz wichtige Aufgabe für die nächste Zeit zu liegen.

Dabei sollte man im Leistungskurs versuchen, den Schülern den Eindruck zu vermitteln, daß Mathematik etwas ist, für das ein hoher persönlicher Einsatz lohnt, das erforschenswert ist. Dazu gehört die Auseinandersetzung mit Mathematik, die auf Erforschung von Zusammenhängen gerichtet ist, die nach Ursachen für bestimmte Zusammenhänge fragt und die den Schüler motiviert, sich mit einem Problem intensiv auseinanderzusetzen.

Man sollte im Grundkurs den Eindruck zu vermitteln suchen, daß Mathematik anwendungsfreundlich ist, daß sie viele interessante Fragen beantworten kann und daß die dazu notwendigen Mittel ohne übermäßigen formalen Aufwand entwickelt werden können.

3.2. Unterschiedliche Dosierungen als Differenzierungshilfe

Ein weiteres wesentliches methodisches Instrument ist die Variation der *Dosierung* von Inhalten, Tätigkeiten und Unterrichtsphasen. Das prägt sich in ver-

schiedenen Variablen aus. Am auffälligsten dürfte der *Aufwand* sein, der für bestimmte Tätigkeiten im Rahmen einer Unterrichtseinheit oder des Lehrgangs vorgesehen wird. Darunter kann man das Verhältnis aus der Dauer einer bestimmten Phase und der Zeit der Unterrichtseinheit oder des Lehrgangs verstehen.

Wie bereits oben ausgeführt wurde, lassen die Lehrbücher erkennen, daß der Aufwand wichtiger Phasen wie *Erarbeiten eines Begriffs, Gewinnen von Sätzen, Erarbeiten von Algorithmen, Anwenden* und *Üben* in beiden Kursen etwa gleich ist. Hinsichtlich des unterschiedlichen Zielverhaltens, das für beide Kurse angestrebt wird, halte ich das nicht für realistisch. Für den Grundkurs muß nach den bisherigen Erfahrungen mit einem höheren Anteil des Erarbeitens, Anwendens und Übens gerechnet werden als im Leistungskurs.

Allerdings läßt sich der Aufwand der verschiedenen Phasen im Unterricht nur recht grob aus der Anlage der Lehrbücher erschließen. Deshalb habe ich den Aufwand auch auf die Lehrgangszeit und nicht auf den Umfang des Buches bezogen. In der Unterrichtspraxis kann man häufig beobachten: Es gibt einige Phasen hohen Theorieaufwands (Erarbeitung des Grenzwertbegriffs, der Ableitung, des Integrals), denen Phasen hohen Übungsaufwands folgen. Die Bedeutung der Reifeprüfung führt dann zu einem wesentlichen Schwinden des Theorieaufwandes. Das Diagramm in Abb.1 gibt diese Situation wieder:

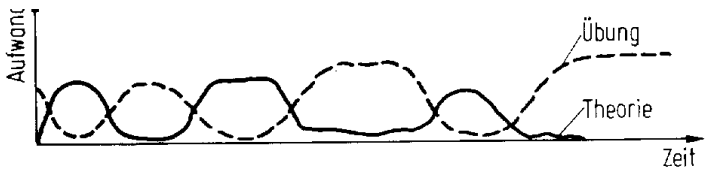

Abb. 1. Aufwandsprofile

Wenn auch der Lehrer den Aufwand unabhängig vom verwendeten Buch zu bestimmen sucht, so muß man andererseits doch sehen, daß das Buch intendiert, im Unterricht behandelt zu werden. Damit wird durch die Entscheidung

für den Aufwand der einzelnen Phasen ihre Dichte beeinflußt. Unter der Dichte verstehe ich das Verhältnis aus Inhalt einer Phase zu ihrer Dauer. Es ist klar, daß z. B. ein erhöhter Übungsaufwand bei vorgegebenem Lehrbuch zu einer Erhöhung der Begriffsdichte führt. Allgemein kann das Dichteprofil eines Lehrgangs die Planungsqualität des Unterrichts zeigen.

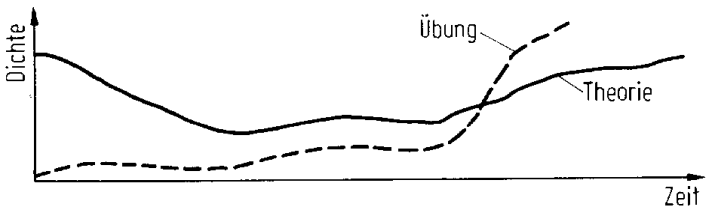

Abb. 2. Dichteprofile

Das durchgezogene Profil zeigt die Planung des »wilden Mannes«, der den Schülern zu Beginn viel zumutet, dann aber erkennen läßt, daß bei ihm auch nur »mit Wasser gekocht« wird, während das andere Profil die Planung des »Gemütsmenschen« zeigt, der zum Schluß des Lehrganges ins Gedränge kommt. Da bei den Grundkursteilnehmern Sicherheit wesentlich vom Umfang der Übungen, Verständnis wesentlich durch Theoriedichte bestimmt ist, sollte man den Mut haben, den Begriffsbildungsaufwand in den Lehrbüchern so zu reduzieren, daß auch die Theoriedichte vom Grundkursteilnehmer verkraftet werden kann. Auch das scheint mir eine wichtige Aufgabe für die nächste Zeit zu sein.

Schließlich ist in der didaktischen Literatur häufig auf Fragen des *Niveaus* hingewiesen worden. Die oft diskutierte »Strenge« dürfte im wesentlichen Ausprägung einer Variablen sein, die sich auf das Niveau der Sprachbildung und auf das Argumentationsniveau bezieht.

Ein Diktat dieser Niveauvariablen über die gesamte Curriculumentwicklung für die Mathematik der Kollegstufe in den letzten Jahren ist unverkennbar. Mit

Blick auf die Universität hat man hier auf der Schule ein formales Niveau angestrebt, das gelegentlich über dem liegt, was man heute an der Hochschule verwendet. (Auch extreme Lehrbuchanalysen im ZDM dürften hieran beteiligt sein.) Das wirkt besonders absurd angesichts der in der Schule immer noch verhältnismäßig elementaren Fragestellungen. Es besteht offensichtlich ein starker Trend, in der Schule umso formaler und subtiler zu verfahren, je einfacher die Sachverhalte sind. Das ist äußerst fragwürdig, denn erst bei komplexeren Zusammenhängen bringt höhere Formalisierung größere Durchsichtigkeit.

Das formale Niveau einer Definition läßt sich abstufen. LANG, ein bedeutender amerikanischer Mathematiker, spricht bei Konvergenzbetrachtungen in einem Buch für Collegestudenten einfach nur von »sich nähern«, ohne das zu definieren. Das mag uns für den Grundkurs als zu wenig erscheinen (obwohl es heute auch schon dafür empfohlen worden ist, z.B. BLUM 1975), es dürfte wohl eher der Propädeutik entsprechen, aber man sollte sich doch um eine angemessene Stufung bemühen. Die didaktische Diskussion der letzten Jahrzehnte hat ein Bewußtsein für verschiedene Stufen von Strenge entwickelt. Es scheint jedoch der Mut zu fehlen, für die verschiedenen Kurse das angemessene Niveau zu wählen.

Allerdings wirkt auch hier wieder die Unterrichtswirklichkeit korrigierend, indem nämlich Phasen hohen Argumentationsniveaus verhältnismäßig isoliert auftreten und von langen Phasen niedrigen Argumentationsniveaus abgelöst werden.

In der didaktischen Diskussion ist immer wieder darauf hingewiesen worden, daß es notwendig ist, die Inhalte des Mathematikunterrichts zu integrieren. Das bezieht sich auf den *Bindungsgrad* der Aktivitäten. Auch hier ist in der letzten Zeit recht einseitig übertrieben worden, indem der logische Bindungsgrad überbetont wurde. Weitere wichtige Bindungsgrade beziehen sich auf Anwenden (Anwendungsbezug), auf Betrachtung von Modellen (Anschaulichkeit), auf Entwicklung von Kalkülen (Kalkülabhängigkeit) und auf Problemlösen.

(Eine Fülle von Anregungen dazu kann man dem Buch von KROLL 1976 entnehmen.)

Auch hier ergibt sich wieder eine gute Differenzierungsmöglichkeit. Während man im Leistungskurs ein höheres Maß an logischer, problemhaltiger und kalkülmäßiger Bindung anstrebt, wird man im Grundkurs den Modellbezug, den Anwendungsbezug und den Beziehungsgehalt (FREUDENTHAL) besonders betonen.

Es scheint mir notwendig zu sein, in der didaktischen Diskussion diese methodischen Variablen stärker in den Blick zu bekommen. Sie sind keineswegs unabhängig voneinander, und es war auch nicht beabsichtigt, hier alle methodischen Möglichkeiten zu erfassen. Wenn jedoch diese Bemühungen dazu führen, in den Lehrbüchern und im Unterricht zu einem auch methodisch differenzierten Angebot zu gelangen, dann ist ein wesentliches Ziel erreicht.

Gerade die Differenzierungsprobleme des Analysisunterrichts bedürfen dringend einer Lösung. In den letzten Jahren war der Mathematikunterricht in der glücklichen Lage, nicht immer wieder die Existenzberechtigung im Rahmen der Fächer nachweisen zu müssen. Ich habe den Eindruck, daß gerade bei den Analysiskursen diese Schönwetterlage zu Fehlentwicklungen geführt hat. Ich fürchte, daß uns in den nächsten Jahren der Wind wieder stärker ins Gesicht wehen wird. Es gibt Länder, in denen heute noch darum gerungen wird, Analysis an der Schule einzuführen (z. B. in Ungarn). Wir sollten die uns gegebenen Möglichkeiten zum Wohl der Schüler nutzen, damit bei uns Analysis nicht wieder ausgeführt wird.

Literatur

Ade, A., H. Schell, Numerische Mathematik, Stuttgart (Klett) 1975.

Bayern: Staatsinstitut für Schulpädagogik, Curriculare Lehrpläne für Mathematik und Phvsik in der Kollegstufe, München o. J.

Blum, W., Ein Grundkurs Analysis, DdM 3 (1975), 163-184.

Grauert, H., L. Lieb, Differential- und Integralrechnung 1,. Berlin (Springer) 1967.

Kroll, W., Differentialrechnung, Bonn (Dümmler) 1976.

Kuypers, W., Mathematikwerk für Gymnasien, Analysis, 1, II. Düsseldorf (Schwann) 1975.

Kuypers, W., J. LAUTER: Analysis Grundkurse, Düsseldorf (Schwann) 1975.

NRW: Der Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen, Schulreform Nordrhein-Westfalen Sekundarstufe, Arbeitsmaterialien und Berichte, Heft 12. Gymnasiale Oberstufe Mathematik, Empfehlungen für den Kursunterricht, Ratingen (Henn) 1972.

Schröder, H., H. Uchtmann, Einführung in die Mathematik, Analysis, Frankfurt a. M. (Diesterweg) 1973.

Schröder, H., H. Uchtmann, Mathematik, Grundkurs Analysis. Frankfurt a.M. (Diesterweg) 1974.

Stoer, J., Einführung in die Numerische Mathematik 1, Berlin (Springer) 1972.

Vollrath, H.-J., Ware-Preis-Relationen im Unterricht, MU 19 Heft 6 (1973), S.58-76.

Waerden, B.L.van der, Mathematik für Naturwissenschaftler, Mannheim (BI) 1975.

Wittmann, E., Infinitesimalrechnung in genetischer Darstellung I, II, Ratingen (Henn) 1973.