22. Ähnlichkeit von Rechtecken

H. Winter, E. Wittmann, Beiträge zur Mathematikdidaktik – Festschrift für Wilhelm Oehl, Hannover (Schroedel) 1976, 11-129

1. Einleitung

Aus Untersuchungen über die Fähigkeiten von Kindern verschiedenen Alters im Erkennen und Konstruieren ähnlicher Rechtecke ziehen PIAGET und INHELDER (1971) die Folgerung, daß sich im Alter von etwa 12 Jahren die Fähigkeit entwickelt hat, bei Vergleichs- und Konstruktionsaufgaben Proportionen als entscheidendes Hilfsmittel zur Lösung dieser Aufgaben zu entdecken

Daß es sich dabei um eine „spontane Entwicklung“ handeln soll (S. 15), erscheint befremdend, denn man weiß, daß gerade in diesem Alter im Mathematikunterricht wichtige Voraussetzungen zum Erfassen der Proportionen geschaffen werden: In den Anwendungen der Bruchrechnung wird mit „Verhältnissen“ gearbeitet, es werden maßstabsgerechte Vergrößerungen angefertigt, Sicherheit im Umgang mit gebrochenen Maßzahlen wird angestrebt, und die Fähigkeiten zum Messen und Vergleichen werden geschult.

Andererseits wird die Ähnlichkeit von Figuren im Mathematikunterricht explizit gewöhnlich erst im Alter von etwa 15 Jahren behandelt Da aber nach den Beobachtungen PIAGETS offensichtlich die Kinder bereits früher die Ähnlichkeit bei einfachen Figuren wie Dreieck und Rechteck mathematisch erfassen können, wird man zur Untersuchung angeregt, inwieweit solche Fragestellungen der Ähnlichkeitslehre im Mathematikunterricht sinnvoll vorgezogen werden könnten, um die Ähnlichkeitslehre vorzubereiten.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, durch eine Analyse des Ähnlichkeitsbegriffs und eine kritische Auseinandersetzung mit PIAGETS Untersuchungen und Folgerungen eine didaktische Grundlage zur Gestaltung des Themenkreises „Ähnlichkeit von Rechtecken“ in der Orientierungsstufe zu schaffen.

2. Zum Begriff der Ähnlichkeit

Der Mensch verwendet in einer Fülle unterschiedlichster Situationen das Attribut „ähnlich“ beim Vergleich von Handlungen, Formen, Zeichen, Namen, Objekten usw. In der Auseinandersetzung mit der Umwelt erweitert sich beim Kind in zunehmendem Maße der Bereich der Objekte, zwischen denen Relationen bestehen. die mit dem Begriff der Ähnlichkeit bezeichnet werden können, während gleichzeitig im Mathematikunterricht in einem Prozeß der Einengung (bezogen auf den allgemeinen Ähnlichkeitsbegriff) der Ähnlichkeitsbegriff zum mathematischen Ähnlichkeitsbegriff hin präzisiert wird.

Zunächst scheint es dem Menschen ohne weiteres klar zu sein, was es heißt. daß zwei Figuren ähnlich sind. Man kann aber leicht Situationen schaffen, in denen die bei den VPn zunächst vorhandene Sicherheit des Urteils verloren geht. So weist WITTENBERG (1963) daraufhin, daß unvoreingenommene Betrachter dazu neigen. Rechtecke der Art von Abb. 1

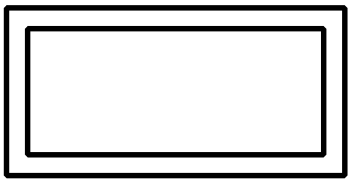

Abb. 1

als ähnlich zu bezeichnen. Vergrößert man dann schrittweise mit konstantem Abstand oder verkleinert man entsprechend, dann sieht man (Abb. 2), daß die vorher getroffene Feststellung falsch ist.

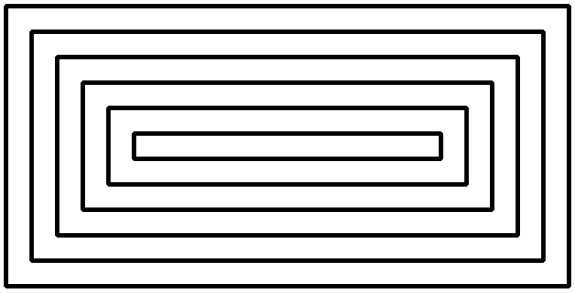

Abb. 2

Über den Prozeß, der zum mathematischen Ähnlichkeitsbegriff führte, kann man nur Vermutungen anstellen. In den „Elementen“ des EUKLID findet man im VI. Buch eine Definition der Ähnlichkeit von Vielecken. die der noch heute in der Elementargeometrie üblichen entspricht. Die Entscheidung für diesen Ähnlichkeitsbegriff scheint von dem großen Interesse EUKLIDS für Proportionen bestimmt zu sein. Obwohl man bis heute in der Geometrie den Euklidischen Ähnlichkeitsbegriff verwendet, sind doch implizit andere Ähnlichkeitsbegriffe für den Mathematiker wichtiger geworden.

Wenn man z.B. für Punktmengen G und H definiert, daß $Gr_T H$ genau dann gelten soll, wenn es einen Homöomorphismus gibt, der G auf H abbildet, dann drückt r_T die *topologische* Ähnlichkeit der Punktmengen G und H aus. Entsprechend kann man die Kongruenz r_K als auf *Bewegungen* und die *Flächengleichheit* r_F als auf flächentreue Abbildungen bezogene Ähnlichkeiten bezeichnen. Dieser Begriffsbildungsprozeß ist durch MÖBIUS bereits 1827 in seiner Schrift „Der baryzentrische Kalkül....“ eingeleitet worden. Er führt den Begriff der „Verwandtschaft“ für solche Beziehungen zwischen Figuren ein und benutzt diese Begriffe zur Klassifikation in der Geometrie. Damit bereitet er das Erlanger Programm von KLEIN vor.

PIAGETS Untersuchungen über die Entwicklung des räumlichen Denkens beim

Kinde scheinen zu zeigen, daß die Kinder in ihrer Entwicklung Figuren eher im Hinblick auf topologische Ähnlichkeit als auf Kongruenz betrachten. Zu verschiedenen Abbildungsarten gehören also bestimmte mathematische Ähnlichkeitsbegriffe, die ihrerseits als Niederschlag bestimmter Umwelterfahrungen gesehen werden können. Die Bindung des Ähnlichkeitsbegriffs an den Abbildungsbegriff läßt sich ebenfalls aus der Erfahrung rechtfertigen. Denn im täglichen Leben ist „Ähnlichkeit“ häufig verbunden mit „Abbilden“. Man denke etwa an Scherenschnitte, Zeichnungen, Fotografien, Zerrbilder an gewölbten Spiegeln usw.

Ähnliche Figuren erkennt man daran, daß sie in gewissen Merkmalen wie Eckenzahl, Winkelgröße. Seitenlänge, Seitenverhältnis usw. übereinstimmen. Man kann Ähnlichkeitsrelationen also auch durch übereinstimmende Merkmale von Figuren erfassen. Auch von diesem Zugang kann man verschiedene Ähnlichkeitsbegriffe erhalten. Der Begriff der euklidischen Ähnlichkeit von Figuren ist also keineswegs zwangsläufig, sondern nur im Hinblick auf gewisse Aufgabenstellungen zweckmäßig.

Aber selbst bei äquivalenten Definitionen für die euklidische Ähnlichkeit von Figuren werden Abhängigkeiten von Voraussetzungen, Zielvorstellungen, Interessen und Wertungen sichtbar.

Man kann den Relationsaspekt betonen, indem man z.B. für Vielecke (in Anlehnung an EUKLID) definiert:

> *Zwei n-Ecke heißen* ähnlich, *wenn sie sich umkehrbar eindeutig einander zuordnen lassen, so daß benachbarten Ecken wieder benachbarte Ecken entsprechen, entsprechende Innenwinkel gleich sind und die Verhältnisse von Seiten übereinstimmen, die gleiche Winkel einschließen.*

Ähnlichkeitssätze zeigen dann, daß sich bei bestimmten Figuren diese Forderungen abschwächen lassen. So erhält man z.B. für das Rechteck:

> *Rechtecke sind genau dann ähnlich, wenn die Verhältnisse ihrer Seiten gleich sind.*

Wenn ich im folgenden von den Seiten a, b und der Diagonalen d spreche, dann meine ich genauer die Längen a, b der Seiten und die Länge d der Diagonalen. Außerdem bezeichne ich die größere Seitenlänge mit a bzw. a'. Dann sind also zwei Rechtecke mit den Seiten a, b und a', b' genau dann ähnlich, wenn

$$(1)\ a : b = a' : b'.$$

Betont man den *Abbildungsaspekt,* so wird man definieren:

> *Zwei n-Ecke heißen* ähnlich, *wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, welche die eine Figur auf die andere abbildet.*

Ähnlichkeitsabbildungen sind winkel- bzw. streckenverhältnistreue Bijektionen der Ebene. Man erhält sie als Verkettung von zentrischen Streckungen mit Kongruenzabbildungen.

Für das Rechteck ergibt sich sofort der Satz:

> *Rechtecke sind genau dann ähnlich, wenn man sie so aufeinander abbilden kann, daß die Verhältnisse von Seite und Bildseite gleich sind.*

Zwei Rechtecke mit den Seiten a, b bzw. a', b' sind also genau dann ähnlich, wenn

$$(2)\ a : a' = b : b'.$$

Die erste Definition greift auf Merkmale der Figur zurück, während die zweite den Begriff der Ähnlichkeitsabbildung voraussetzt. Die erste Definition muß erheblich abgewandelt werden, wenn man sie auf beliebige abgeschlossene Punktmengen der Ebene übertragen will, dagegen bereitet das bei der zweiten keinerlei Schwierigkeiten.

Bei Bijektionen der Ebene sind Winkeltreue und Streckenverhältnistreue äquivalente Eigenschaften.

Betont man die Winkeltreue, dann wird man z. B. bei Rechtecken heraus-

stellen:

Zwei Rechtecke sind genau dann ähnlich, wenn sie in einem Winkel zwischen einer Diagonalen und einer Seite übereinstimmen.

Zwei Rechtecke wie in Abb. 3 sind also ähnlich.

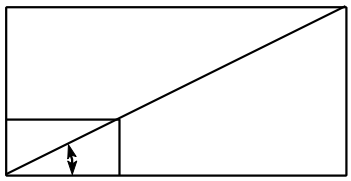

Abb. 3

Natürlich kann man auch die Diagonalen heranziehen, um die Ähnlichkeit von Rechtecken zu erfassen. Zwei Rechtecke mit den Seiten a, b und der Diagonalen d bzw. den Seiten a', b' und der Diagonalen d' sind genau dann ähnlich, wenn

$$(3)\ d : a = d' : a'$$

oder gleichwertig

$$(4)\ d : b = d' : b'.$$

Bei der Definition des Verhältnisbegriffes kann man so vorgehen, daß man aus der Vorstellung des Messens heraus feststellt, daß es für zwei Längen a und b eine positive reelle Zahl r gibt, so daß gilt a = r b. Man mißt also die Länge a mit der Länge b. Das Verhältnis a : b kann man nun als diese reelle Zahl r definieren.

Statt a : a' =b : b' kann man also gleichwertig fordern:

Es gibt eine positive reelle Zahl s, *so daß gilt*

$$(5)\ a' = s \cdot a \text{ und } b' = s \cdot b.$$

Entsprechend erhält man für a : b = a' : b':

Es gibt eine positive reelle Zahl r *mit*

$$(6)\ a = r \cdot b \ \textit{und}\ a' = r \cdot b'.$$

Weitere Aussagen über die Ähnlichkeit von Rechtecken erhält man sofort durch Umstellungen wie b : a = b' : a', a' : a = b' : b usw.

Jedem Satz über die Ähnlichkeit von Rechtecken kann man eine bestimmte Konstruktionsmethode zuordnen. So ergibt sich aus (5):

Will man zu einem Rechteck ein ähnliches konstruieren, so muß man die Seiten mit der gleichen Zahlvervielfachen.

Bei den Untersuchungen von PIAGET wird von den Schülern in Stufe IV im wesentlichen nach (1), (2), (5) und (6) argumentiert.

Seine Schlußfolgerungen beziehen sich hauptsächlich auf (1) und (2).

3. Das Problem der Aufgabenformulierung

PIAGET und seine Mitarbeiter sprechen ihre VPn mit Aufgabenformulierungen an, die sich auf allgemeine Vorstellungen von „ähnlich“, „das gleiche in größer“ u.ä. beziehen.

LORENZ und PIETZSCH (1969) weisen in einer kritischen Analyse gebräuchlicher Definitionen des Ähnlichkeitsbegriffes darauf hin, daß Formulierungen, die sich auf Vorstellungen beziehen, welche mit Redewendungen wie „besitzen gleiche Gestalt“ verbunden sind, zu erheblichen Fehlleistungen führen können. Sie bringen als Beispiel die geschachtelten Rechtecke (s.o.).

Das Urteil über Ähnlichkeit auf der Basis allgemeiner Vorstellungen hängt wesentlich von der Art der gestellten Aufgabe ab. Das wird z.B. deutlich, wenn man nur Ellipsen und Vierecke vergleichen läßt. In diesem Zusammenhang werden die Ellipsen untereinander und auch die Vierecke untereinander als

ähnlich bezeichnet. Die Ellipsen sind ähnlich, denn sie stimmen im Merkmal „krummlinige Begrenzung“ überein, während die Vierecke in den Merkmalen „Eckenzahl“ und „geradlinige Begrenzung“ übereinstimmen.

Inwieweit solche Merkmale in die Betrachtung einbezogen werden, hängt in einer konkreten Aufgabensituation von der *Kenntnis* solcher Merkmale und von ihrer *Auffälligkeit* ab. So zeigen die Versuche PIAGETS, daß Kinder in einem bestimmten Alter das Merkmal „Seitenverhältnis“ bei Rechtecken nicht wahrnehmen.

Beim Vergleich von Rechtecken der Art von Abb. 4 wird von den VPn das Merkmal „Winkel zwischen den Diagonalen“ nicht wahrgenommen, obwohl man damit ein Kriterium für die Ähnlichkeit von Rechtecken erhalten kann.

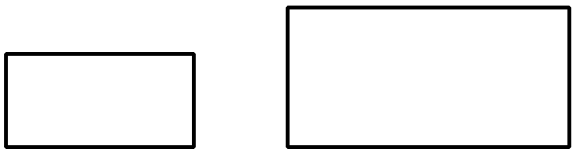

Abb. 4

Das ist natürlich von der Art der Aufgabenstellung her verständlich, denn in den gezeichneten Figuren sind die Diagonalen gar nicht eingezeichnet. Damit wird deutlich, daß bei Versuchen zur Ähnlichkeit von Figuren geklärt werden muß, ob das Nichtbeachten eines Merkmals auf Unkenntnis oder auf die Art der Aufgabenstellung zurückzuführen ist.

Schließlich kann man beobachten, daß Kinder im Alter von 11 Jahren kongruente Quadrate nicht als ähnlich beurteilen, denn „sie sind ja gleich“. Hier handelt es sich um ein bekanntes Phänomen, daß es Kindern dieses Alters schwer fällt, prägnante Sonderfälle als unter den Begriff fallend aufzufassen.

Diese Ausführungen zeigen, daß Aufforderungen an ein Kind, die den Begriff Ähnlichkeit im Zusammenhang mit mathematischen Objekten enthalten, ehe es

eine Definition davon gelernt hat, für das Kind nicht eindeutig bestimmt sind. Wenn das Kind trotzdem eine Lösung versucht, danndeshalb, weil ihm das Wort „Ähnlichkeit“ geläufig und bis zu einem gewissen Grad eine Variable ist, die in verschiedenen Situationen unterschiedlich belegt wird.

Das Kind ist im täglichen Leben häufig mit Aufforderungen konfrontiert, bei denen es erraten muß, was von ihm verlangt wird.

Fragt man z.B. ein 8jähriges Kind, ob die beiden Rechtecke von Abb. 5 ähnlich sind

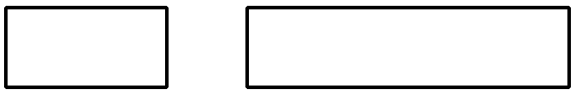

Abb. 5

und es bejaht (weil sie beide gleich breit sind), dann geht es ihm im Grunde wie dem Rekruten, der sich auf die Frage meldet, wer Klavier spielen kann, und der dann zum Klaviertransport abkommandiert wird.

Ähnlich verhält es sich mit der Aufforderung zu bestimmten Handlungen. Wenn man einer VP den Auftrag gibt, „diese Figur in größer“ zu zeichnen, dann handelt es sich um eine Aufforderung, die so vage ist, daß verschiedene Lösungen möglich sind. Zeichnet man z.B. auf den karierten Teil der Tafel ein Rechteck der Art von Abb. 6

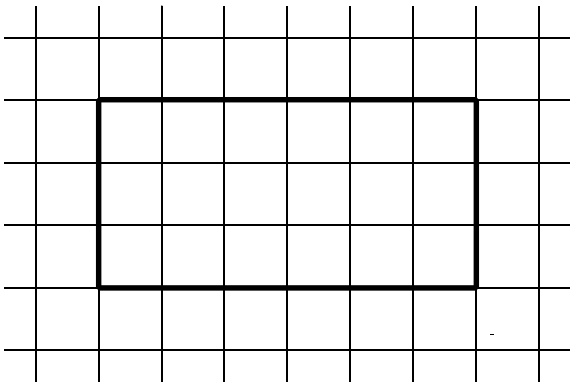

Abb. 6

und gibt 8jährigen Kindern den Auftrag: „Zeichnet das Rechteck in euer Heft“, dann zeichnet zwar die Mehrheit der Kinder auf dem karierten Papier ein Rechteck aus $6 \cdot 3$ Kästchen. Zeichnet man dagegen ein $9 \cdot 3\ dm^2$ Rechteck auf die karierte Tafel, so zeichnen nur wenige Schüler Rechtecke mit $9 \cdot 3$ Kästchen in ihr Heft. Sie erkennen von ihrem Platz aus die Zahl der Kästchen in der Vorlage nicht mit einem Blick und halten sie deshalb nicht für wichtig.

Im Unterricht erwartet der Lehrer sehr unterschiedliche Leistungen, wenn er die Schüler auffordert, eine Figur von der Tafel abzuzeichnen. Er kann z.B. ein Rechteck als Kontrastfigur zu einem Trapez hervorheben wollen, dann ist es wichtig. daß man in der Figur die rechten Winkel sieht. Will er den Flächeninhalt mit Hilfe der Seitenlängen bestimmen, dann legt er Wert auf die Karos. Geht es ihm um das Finden eines Beweises, so zeichnet er freihändig ein Rechteck an die glatte Tafel und markiert die einschlägigen Stücke. Um eine Behauptung finden zu lassen, wird er auf eine genaue Konstruktion Wert legen, also selbst mit dem Geodreieck zeichnen.

In all diesen Fällen liegt die Betonung auf bestimmten Merkmalen, die sich von Fall zu Fall ändern. Andererseits bleibt im Unterricht die Akzentsetzung während einer bestimmten Phase konstant, außerdem hält sich der Lehrer an gewisse Konventionen, die nicht unbedingt explizit genannt werden, so daß die Schüler Gelegenheit haben, sich anzupassen. Man kann in einem Versuch in neuer Umgebung Fähigkeiten zum Ausführen bestimmter Handlungen nur erfassen, wenn man den Auftrag operationalisiert.

Nun scheint es aber PIAGET weniger um die Fähigkeit zu gehen, bestimmte Handlungen auszuführen, als vielmehr darum, beim Lösen bestimmter Aufgaben Zusammenhänge zu entdecken, die für die Lösung wichtig sind. Insbesondere interessiert ihn die Frage, inwieweit diese Fähigkeiten altersabhängig sind.

Man weiß nun, daß es ein grundlegendes heuristisches Prinzip ist, die Aufgabe so zu formulieren, daß klar ist, welche Leistungen erwartet werden. Das bedeutet also, daß die VP z.B. wissen muß, was die Ähnlichkeit von Rechtecken bedeutet, wenn sie eine Aufgabe lösen soll, die die Ähnlichkeit von Rechtecken explizit formuliert. Wie wir bereits gesehen haben, kann man nicht damit rechnen, daß Kinder wissen, was die Ähnlichkeit von Rechtecken bedeutet, wenn man die Definition nicht mit ihnen erarbeitet hat. Wenn man aber eine Definition gegeben hat, z.B. mit Hilfe von $a:b = a':b'$, dann ist es interessant, $a:a' = b:b'$ entdecken zu lassen.

Man kann natürlich auch zunächst eine Konstruktionsvorschrift vorgeben und dann durch geeignete Impulse Eigenschaften der konstruierten Figur suchen lassen. Gibt man z.B. die Vergrößerungsvorschrift, jede Seite des Rechtecks zu verdoppeln, zu verdreifachen. zu vervierfachen usw., dann kann man die Seitenverhältnisse berechnen und vergleichen lassen. Es kann sinnvoll sein, Impulse auch offener zu geben als in diesem Beispiel, entscheidend ist jedoch, daß die Aufgabe überhaupt erfaßt wird.

Dagegen handelt es sich geradezu um eine Irreführung, wenn man auf der Basis eines verschwommenen Ähnlichkeitsbegriffes die Proportionen gleich-

sam als „Naturgesetz“ entdecken lassen will.

4. Das Problem einschlägiger Fähigkeiten

Zum Lösen von Aufgaben über Ähnlichkeit sind beim Schüler oder bei der VP Voraussetzungen nötig. die sich auf *einschlägige Kenntnisse* über den Gegenstand und gewisse *Fertigkeiten mit* im Umgang mit dem Gegenstand und auf *allgemeine Fähigkeiten* beziehen, die dazu dienen, die spezifischen Kenntnisse und Fähigkeiten in einer bestimmten Problemsituation zu organisieren. Ohne schon jetzt auf bestimmte Aufgaben einzugehen, kann man doch sagen, daß bei Fragen zur Ähnlichkeit von Rechtecken Kenntnisse über Seitenlängen, Diagonalen, Winkel, Längendifferenzen, Längenverhältnisse. Fertigkeiten im Zeichnen von rechten Winkeln, im Zeichnen von Strecken einer bestimmten Länge, im Verlängern und Vervielfachen von Strecken, im Ausmessen von Strecken und Winkeln, im Bestimmen von Längenverhältnissen, im Rechnen mit natürlichen und gebrochenen Maßzahlen eine Rolle spielen.

Es ist Angelegenheit einer didaktischen Analyse herauszufinden, welche dieser Kenntnisse und Fähigkeiten einschlägig sind für eine bestimmte Problemstellung. Entscheidend für das Finden einer Lösung des Problems ist dann die Fähigkeit, solche objektbezogenen Kenntnisse und Fertigkeiten zu aktivieren.

Die Erforschung solcher allgemeinen psychischen Fähigkeiten ist offensichtlich ein wichtiges Anliegen PIAGETS. Es handelt sich dabei um Fähigkeiten wie z.B., bei einer Vergrößerung des Rechtecks gleichzeitig Länge und Breite im Blick zu behalten, oder ein nach Überlegung gezeichnetes Rechteck durch den Einfluß der Wahrnehmung korrigieren zu können.

Insbesondere interessiert sich PIAGET für die Abhängigkeit des Verhältnisses zwischen *Wahrnehmung* („Transposition“) und *Konstruktion* vom Alter der Kinder. Dazu untersuchten er und seine Mitarbeiter, wie Kinder in verschiedenen Altersstufen auf die folgenden Aufgabenstellungen reagieren.

„Wahrnehmungsvergleich“:

Den Kindern werden auf getrennten weißen Bögen Vergleichsrechtecke vorgelegt. Das gleichbleibende Musterrechteck hat eine Länge von 3cm und eine Breite von 1,5cm. Auf den anderen Bögen ist jeweils ein Vergleichsrechteck mit einer Breite von 4 cm und einer Länge zwischen 6 und 20 cm aufgezeichnet. Die Kinder werden gefragt, ob das große Rechteck dem kleinen ähnelt oder nicht.

„Zeichnerische Konstruktion“:

Den Kindern wird wieder das Rechteck mit den Seiten 3 cm, 1,5 cm vorgelegt und sie sollen jetzt das Rechteck „in größer“ zeichnen. In der Regel wird weißes Papier benutzt. Mit zunehmendem Alter werden aber auch kariertes Papier und Lineal verwendet. Die Aufgabe wird dadurch variiert, daß eine Seite des Bildrechtecks vorgegeben wird und daß auch Rechtecke mit anderen Seitenverhältnissen als Muster vorgelegt werden.

Bei der ersten Versuchsreihe unterscheiden die Kinder im Alter von 7 bis 8 Jahren zwei Klassen verwandter Figuren: die der Rechtecke mit deutlich verschieden langen Seiten und die der Quadrate. Im Alter von etwa 8 Jahren können dann die VPn bereits die ähnlichen Rechtecke im wesentlichen richtig angeben. Das Fehlerintervall verringert sich mit zunehmendem Alter nur unwesentlich.

Bei der zweiten Versuchsreihe sind folgende Verhaltensweisen der VPn auffällig: Zunächst wird bei der Vergrößerung lediglich verlängert (bis zum Alter von etwa 8 Jahren: Stadium II), später wird jede Seite um das gleiche Stück verlängert (Stadium III), bis schließlich im Alter von 11-12 Jahren die Kinder die neuen Seiten durch Vervielfachen mit einem konstanten Faktor gewinnen oder das Seitenverhältnis des Musterrechtecks bestimmen und damit das Bild-

rechteck zeichnen (Stadium IV).

Auffällig ist also, daß im Bereich der Wahrnehmung die Gleichheit des Seitenverhältnisses eher entdeckt wird als im konstruktiven Bereich.

PIAGET unterscheidet die verschiedenen Stadien hinsichtlich des Verhältnisses zwischen Wahrnehmung und Denken. Bei Stadium 1 handelt es sich um ein „vorexperimentelles“ Stadium, bei dem Experimente mit den Kindern nicht sinnvoll erscheinen.

Im II. Stadium sind *Wahrnehmungsurteil* (die Wahrnehmung steuert das Denken) und *Denkkonstruktion* (das Denken steuert die Wahrnehmung), etwa gleichwertig. Im Stadium III hat das Wahrnehmungsurteil einen Vorsprung vor der Denkkonstruktion. Im letzten Stadium ist die Denkkonstruktion stärker ausgebildet als das Wahrnehmungsurteil.

Die angegebenen Versuchsprotokolle machen es schwer, die Leistungen der verschiedenen Altersgruppen zu vergleichen, da sich Aufgaben, Aufgabenstellungen und Lösungshilfen (Karopapier, Lineal) in den verschiedenen Altersgruppen unterscheiden.

Das entscheidende Problem besteht jedoch darin, daß die Versuchsanlage es nicht gestattet, den Einfluß der allgemeinen Fähigkeiten gegenüber dem Einfluß der gegenstandsbezogenen Fähigkeiten und Kenntnisse abzugrenzen. Wesentliche Einflüsse der individuellen Lerngeschichte und der Instruktion auf den Erfolg der VPn lassen sich nicht ausschließen. Letztlich sagen die Versuche also nur aus. daß der Erfolg der VPn vom Alter abhängt. Das ist aber nahezu trivial, denn durch Unterricht werden gerade in dem untersuchten Zeitraum einschlägige, stoffbezogene Kenntnisse und Fähigkeiten nach und nach vermittelt. Damit erscheinen Folgerungen über die Entwicklung einschlägiger psychischer Fähigkeiten aus diesen Versuchen äußerst fragwürdig.

5. Sortieren

Die von PIAGET in seinen Untersuchungen verwendeten Aufgaben zum „Wahrnehmungsvergleich“ kann man unter dem Aspekt des Sortierens betrachten. Beim Sortieren wird in einer gegebenen Menge von Objekten eine Klasseneinteilung hergestellt, indem man jeweils in bestimmten Merkmalen übereinstimmende Objekte zu Klassen zusammenfaßt.

Man kann eine Sortieraufgabe so formulieren. daß man explizit angibt, auf welche Merkmale es ankommt. z. B. kann man VPn auffordern, einen Satz Merkmalsklötze nach dem Merkmal „Farbe“ zu sortieren. Jedem Klotz x ist eindeutig eine bestimmte Farbe F(x) zugeordnet. Die Äquivalenzrelation r ist also gegeben durch die Festsetzung. daß x r y genau dann gelten, soll, wenn F(x) = F(y). Wenn die VPn die vorliegenden Farben unterscheiden und gleiche Farbe erkennen können, dann können sie die Sortieraufgabe lösen.

Solche Sortieraufgaben können also dazu dienen, die Fähigkeit zu überprüfen, bei vorgelegten Objekten Übereinstimmung bzw. Unterscheidung in bestimmten Merkmalen festzustellen. Will man andererseits Kindern Vorstellungen über bestimmte Merkmale vermitteln, ehe sie diese Merkmale mit einer formalen Definition erfassen können, dann kann man ebenfalls Sortieraufgaben verwenden.

Durch die Zusammensetzung des zu sortierenden Materials kann man es erreichen, daß auch auf die allgemein gehaltene Aufforderung hin, jeweils ähnliche Figuren zusammenzulegen, nach bestimmten Merkmalen sortiert wird.

Ich habe Kindern im Alter von 11-14 Jahren und Erwachsenen die folgende Aufgabe gestellt. Aus weißem Papier werden Figuren ausgeschnitten. Den VPn wurde jeweils ein bestimmter Satz auf dem Tisch ausgebreitet, und sie wurden aufgefordert: „Lege ähnliche Figuren immer auf einen Haufen!“. Die 1 Aufgabe wird übereinstimmend wie in Abb. 7 gelöst.

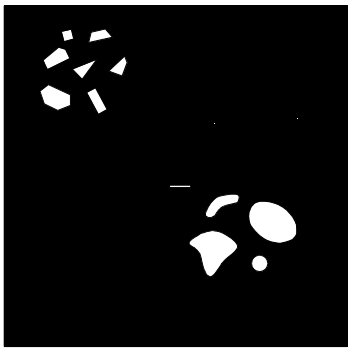

Abb. 7

Auf dem einen Haufen liegen alle „runden“, auf dem anderen alle „eckigen“Figuren. Feinere Klasseneinteilungen wurden nicht gewählt.

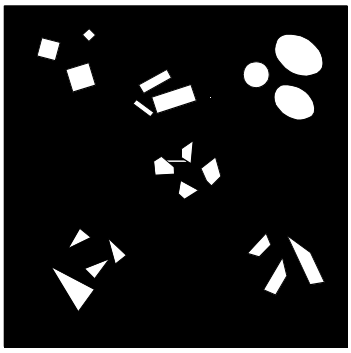

Abb. 8

Die 2. Aufgabe wird meistens wie in Abb. 8 gelöst. Es werden dabei zunächst die „runden“ Figuren aussortiert, dann werden “auffällige“ Formen wie Dreiecke, Rechtecke, Quadrate, Trapeze, Drachen, Vielecke (n > 4) zusammengelegt. Hier scheinen Eckenzahl und Winkelgrößen die relevanten Merkmale zu sein.

Bei den erwachsenen VPn zeigt sich gelegentlich eine gewisse Unsicherheit, die sich z.B. in der Frage niederschlägt „oder soll ich es noch mal unterteilen?“ (die Frage bezieht sich insbesondere auf die Klasse der Vielecke mit einer Eckenzahl größer als 4).

Auffällig ist, daß in diesem Zusammenhang Quadrate und Rechtecke als nicht ähnlich betrachtet werden, so daß also nicht allein das Merkmal „Eckenzahl“ bei den eckigen Figuren berücksichtigt wird. Im folgenden Versuch wird die Beziehung zwischen Rechtecken und Quadraten näher untersucht.

Überraschend ergibt sich bei der 3. Aufgabe die Einteilung wie in Abb. 9.

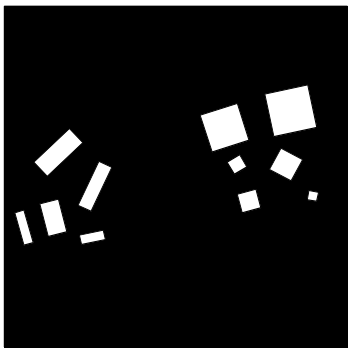

Abb. 9

Die Gleichheit der Seiten beim Quadrat ist hier offensichtlich ein so auffälliges Merkmal, daß dem nur die Verschiedenheit der Seiten bei den Rechtecken entgegensteht. Es wird also nicht die Möglichkeit gesehen, nach Übereinstimmung in den Seitenverhältnissen zu sortieren. In diesem Zusammenhang wird das Merkmal Seitenverhältnis selbst von solchen VPn nicht einbezogen, die dieses Merkmal kennen.

Da die Seitengleichheit der Quadrate offensichtlich stark über andere Merkmale dominiert, lasse ich in den folgenden Aufgaben Quadrate fort.

Abb. 10

In Aufgabe 4 wird übereinstimmend die Lösung von Abb. 10 gegeben.

Hier dominiert offensichtlich das Merkmal „Breite“. Es ist so auffällig. daß das Merkmal „Seitenverhältnis“, das zur Klasseneinteilung nach der euklidischen Ähnlichkeit führen würde, nicht beachtet wird.

Es wird in der 5. Aufgabe deshalb vermieden, Rechtecke vorzulegen. die in einer Seite übereinstimmen. Es zeigt sich große Unsicherheit bei den VPn. Folgende Lösungstypen sind auffällig.

In Abb. 11 wird in „groß“, „mittel“, „klein“ eingeteilt, ein etwas verschwommener Inhaltsbegriff scheint also das verwendete Merkmal zu sein.

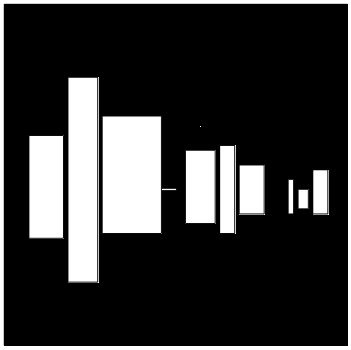

Abb. 11

Bei der Lösung von Abb. 12 tritt das 2:1-Rechteck hervor, die andere Klasse ist also die Komplementärmenge.

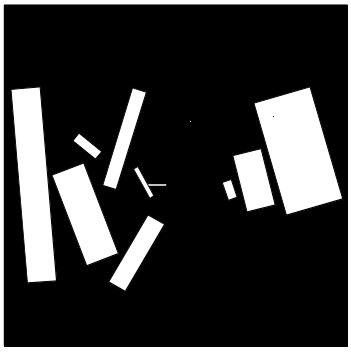

Abb. 12

Keine VP entdeckte das Seitenverhältnis als Merkmal. Das liegt daran, daß es abgesehen von den Fällen 1:1 und 2:1 nicht auffällig ist.

Die Ergebnisse des Versuchs bestätigen die bereits oben gezeigte Abhängigkeit des allgemeinen Ähnlichkeitsbegriffs von der gegebenen Aufgabe. Weiter wird deutlich, daß Merkmale unterschiedlich auffällig sind. Das kann dazu führen,

daß mathematisch wichtige Merkmale völlig übersehen werden.

Schließlich zeigt sich bei allen Merkmalen, daß die VPn nur einige markante Ausprägungen dieses Merkmals wahrnehmen. Die übrigen Fälle werden in die Komplementärmenge zur Vereinigung der „markanten Klassen“ getan.

Selbst wenn man die Rechtecke auf kariertem Papier in den Verhältnissen 2:1, 3:1, 4:1 vorlegt, bei denen keine zwei Rechtecke eine gleiche Seite haben, die sich aber im Flächeninhalt erheblich unterscheiden, wird nicht das Seitenverhältnis verwendet. Eher wird nach „groß“, „mittel“, „klein“, also einem groben Inhaltsbegriff, sortiert oder nach dem Seitenverhältnis 2:1 und einem Seitenverhältnis, das von 2:1 verschieden ist. Das Seitenverhältnis scheint also bei Rechtecken sehr unauffällig zu sein. Zur Entdeckung des Seitenverhältnisses als Merkmal eines Rechtecks scheinen Sortierprobleme mit Rechtecken wenig geeignet zu sein.

„Belebt“ man die Rechtecke allerdings durch Einzeichnen von „Extremitäten“, so wird auf einmal das Seitenverhältnis auffällig:

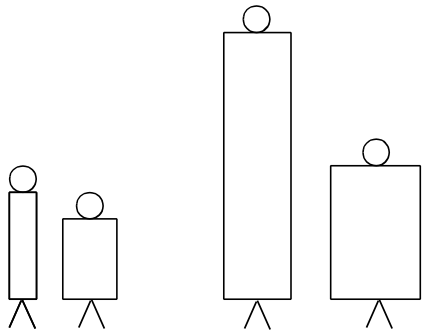

Abb. 13

Die Rechtecke 1 und 3 sind „schlank“, während die Rechtecke 2 und 4 „dick“ sind. Auch in Verbindung mit Architekturbetrachtungen können solche Streckenverhältnisse auffällig werden, etwa beim Vergleich Schornsteinhöhe –

Haushöhe, Kirchturmhöhe – Kirchenschiffhöhe, Fensterbreite– Fensterhöhe.

Im Kunstunterricht in Klasse 5 wird bei der Betrachtung von Schriften dem Schüler der Einfluß von Teilverhältnissen auf die Form bewußt. Etwa in der Reihe:

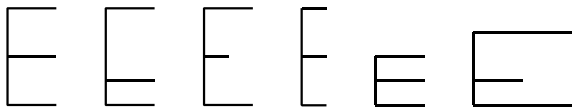

Abb. 14

Dabei wird deutlich, daß man auch hier durch Variation der Grundmenge die Aufmerksamkeit auf verschiedene Verhältnisse lenken kann.

In der Bruchrechnung werden Strecken geteilt, um Längenbruchteile zu veranschaulichen. Das Teilverhältnis von Strecken wie

Abb. 15

scheint ein auffälliges Merkmal zu sein, das in markanten Fällen wie 1:1, 1:2, 1:3 „ganzheitlich“ erfaßt wird, ohne daß bereits eine numerische Beschreibung vorliegt.

Diese Teilverhältnisse von Strecken scheinen auffälliger zu sein als die Seitenverhältnisse von Rechtecken.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß entscheidend für das Erfassen eines bestimmten Merkmals bei Figuren in einer Sortieraufgabe die Art und die Zusammenstellung der vorgelegten Figuren ist.

6. Abzeichnen

Gibt man Rechtecke an der Tafel vor und fordert Schüler auf, möglichst genau abzuzeichnen, dann hängt das Ergebnis auch hier davon ab, inwieweit gewisse Merkmale wichtig sind. Korrekte Lösungen dieser Aufgabe lassen sich mit 11-12 jährigen erzielen, wenn sie wissen, daß es auf die Kästchenzahl in Länge und Breite ankommt.

Bei dieser Ähnlichkeitsabbildung wird also die Längeneinheit verkleinert (1 dm $\rightarrow \frac{1}{2}$cm), die Maßzahlen der Seiten und die Winkel bleiben gleich.

$$a = k \cdot e \quad a' = k \cdot e'$$

$$b = m \cdot e \quad b' = m \cdot e'$$

Es entspricht der Anschauung, daß bei dieser Abbildung das Bild dem Urbild ähnlich ist. Das Merkmal Seitenverhältnis wird den Schülern jedoch nicht bewußt. Für sie ist das Rechteck durch das Paar (k, m) gegeben. das bei dieser Abbildung erhalten bleibt. Zeichnet man das vorgelegte Rechteck auf die glatte Tafel, dann muß klar sein, daß genaues Abzeichnen Ausmessen erfordert. In diesem Fall wird mit dem Demonstrationsmaß (Lineal, Geodreieck) gemessen und mit dem eigenen Maß mit gleichen Maßzahlen, aber kleinerer Einheit gezeichnet.

Es ist fraglich, ob sich die Schüler bei der Ausführung der Konstruktion dessen bewußt sind, daß sie ähnlich *verkleinern.* Sie sind aber in der Lage zu überprüfen, ob ihre Lösung korrekt ist. Beim Karopapier tritt die Gleichheit der Winkel in den Hintergrund, während bei glattem Papier die rechten Winkel bewußt gezeichnet werden müssen.

Stellt man 5jährigen Schülern diese Aufgaben, dann stellt man teilweise erhebliche Mängel in den konstruktiven Fähigkeiten fest: Mit Bleistift und Lineal eine gerade Linie, eine Strecke mit gegebener Länge, eine Linie auf einer Linie des Karonetzes zeichnen, einen rechten Winkel, einen rechten Winkel mit

Schenkeln bestimmter Länge zeichnen sind Tätigkeiten, die im Unterricht geübt werden müssen. Solche Fertigkeiten sind wesentliche Voraussetzungen zur Bewältigung dieser Aufgaben.

Bei einer Analyse ihrer Tätigkeit kann den Schülern bewußt gemacht werden, daß sie ähnliche Figuren konstruiert haben und worin diese Ähnlichkeit beruht.

Den Maßstab erhält man durch Vergleich der Einheiten. Bildet man z.B. ab: 1 dm $\rightarrow \frac{1}{2}$ cm, dann kann man auch schreiben 1 dm $\rightarrow \frac{1}{20}$ dm. Der Maßstab ist also durch den Bruch $\frac{1}{20}$ gegeben. Zur Beschreibung dieses Sachverhaltes benötigt man Kenntnisse der Bruchrechnung. Haben die Schüler eingesehen, daß man jeden Bruch als Quotienten natürlicher Zahlen darstellen kann, dann bereitet es keine Schwierigkeiten, die historische Bezeichnung 1 : 20 und die Lesart „1 zu 20“ den Schülern mitzuteilen oder diesen Zusammenhang zwischen Bruchrechnung und aus Umwelterfahrungen gewonnenen Kenntnissen herzustellen.

7. Vergrößern – Verkleinern

In PIAGETS Aufgaben zur „zeichnerischen Konstruktion“ sollen Figuren ähnlich vergrößert bzw. verkleinert werden. Die Aufgaben unterscheiden sich von den vorherigen dadurch, daß hier bewußt eine Größenänderung vorgenommen wird. Es ist den VPn klar, daß dazu die Seiten verändert werden müssen. Von der Grundschule her kennen die Schüler additive Veränderungen wie z.B. „3 Nüsse dazulegen“, „um 3 cm verlängern“, „noch 5 Min. warten“ usw. und multiplikative Veränderungen wie z.B. „3 mal so viele Nüsse nehmen“, „eine Strecke von 2 cm verdreifachen“ usw. sowie die zugehörigen Umkehrungen dieser Operationen. Bereits für die Grundschule wird von OEHL „die analytische Tätigkeit des Vergleichs“ als „Grundlage und Vorbereitung der synthetischen Operationen“ gesehen (19626, S. 88). Er hebt den additiven und den multiplikativen Vergleich hervor und betont seine Wichtigkeit „für das Ver-

ständnis des funktionalen Denkens“. In Verbindung mit der Bruchrechnung wird durch Betrachtung des „arithmetischen“ und des„geometrischen“ Verhältnisses die Schlußrechnung vorbereitet. Gerade für das Verständnis der Schlußrechnung ist es ja entscheidend, daß die Schüler die Proportionalität als einen wichtigen Sonderfall einer Abbildung zwischen Größenbereichen erkennen. Dort werden also bewußt auch andere Funktionen angesprochen.

Deshalb wäre es eine das Verständnis der „Schlußrechnung“ erschwerende Verengung, wenn man bei Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen in der Geometrie die Schüler auf Proportionalitäten fixieren würde.

Zeichnet man auf kariertem Papier ein Rechteck und läßt es vergrößern, dann bringen Kinder im Alter von 11-12 Jahren meist eine Lösung der Art

$$a' = a+k \quad b'= b+k$$

An beiden Seiten wird also das gleiche Stück zugefügt. Die Schüler verfügen in diesem Alter jedoch auch über Erfahrungen mit anderen Vergrößerungsarten. So kennen sie z.B. Verzerrungsspiegel, die in der Breite, und solche, die in der höhe überdehnen. Solche Typen von Abbildungen eines Rechtecks kann man erhalten durch:

$$a' = a \quad \text{bzw.} \quad a' = ka$$

$$b'= kb \quad \text{bzw.} \quad b' = b$$

Erfahrungen mit Diaprojektoren zeigen, daß es Abbildungen gibt, die in allen Richtungen um den gleichen Faktor dehnen. Damit ergeben sich Abbildungen der Art:

$$a' = ka$$

$$b' = kb$$

Auf dieser Stufe des Verständnisses wird man sich zunächst mit der kon-

struktiven Durchführung und verbalen Beschreibung dieser Abbildungsarten zufriedengeben.

Es ist im allgemeinen nicht schwer, Strecken zu verdoppeln, zu verdreifachen usw. Das lernen die Schüler systematisch in der Grundschule. Wenn man ihnen aber z. B. a = 3 cm, b = 2 cm und a' =5 cm vorgibt, dann gehören Kenntnisse der Bruchrechnung dazu, den Vergrößerungsfaktor $k = \frac{5}{3}$ und daraus $b' = 2 \cdot \frac{5}{3}$ cm zu bestimmen. Gerade das sind aber Leistungen, die PIAGET bei seinen Konstruktionsaufgaben verlangt.

8. Erkennen von Zusammenhängen

Neben den *elementaren* Fähigkeiten des Sortierens, Abzeichnens und Abbildens ist das Erkennen von Eigenschaften und Zusammenhängen entscheidend für die Erlangung des euklidischen Ähnlichkeitsbegriffs. Es handelt sich hier um einen heuristischen Prozeß, der durch entscheidende Impulse des Lehrers eingeleitet werden kann. Es kann sich hier darum handeln, den Einfluß gewisser Merkmale auf die Form allgemein zu erkunden, oder bei bestimmten Konstruktions- und Abbildungsverfahren Invarianten zu suchen.

In der Klasse 6 lassen sich nach der Behandlung der Bruchrechnung die Zusammenhänge bewußt machen, die sich in folgendem Diagramm wiedergeben lassen.

Man erhält das Bildrechteck, indem man beide Seiten mit dem Faktor k streckt. Ist die Seite b das r-fache von a, dann ist auch die Seite b' das r-fache von a'. Um diesen Zusammenhang zu erkennen, muß man sehen, daß man “die Seite b mit der Seite a messen kann“. Dabei erhält man $b = r \cdot a$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\cdot k"] \arrow[d, "\cdot r"'] & a' \arrow[d, dashed] \\ b \arrow[r, "\cdot k"'] & b' \end{tikzcd}$$

Abb. 16

Der umgekehrte Zusammenhang kommt in folgendem Diagramm zum Ausdruck.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\cdot k"] \arrow[d, "\cdot r"'] & a' \arrow[d, "\cdot r"] \\ b \arrow[r, dashed] & b' \end{tikzcd}$$

Abb. 17

Das bedeutet, daß man bei Rechtecken mit gleichem Seitenverhältnis die Seiten des einen durch Dehnung um den gleichen Faktor k aus den anderen erhalten kann.

Für den ersten Fall kann die Begründung so verlaufen:

Aus $a' = ka, \quad b' = kb, \quad b = ra$

folgt $b' = k \cdot b = k(ra) = r(ka) = ra'.$

Für den zweiten Fall erhält man:

aus $a' = ka, \quad b = ra, \quad b' = ra'$

das Ergebnis

$$b' = ra' = r(ka) = k(ra) = kb.$$

Dieser Argumentation liegen die Proportionalitäten $x \to r \cdot x$ und $x \to k \cdot x$ zugrunde.

Man kann Zusammenhänge auch mit Hilfe des Seitenverhältnisses herausarbeiten. Dazu gibt man die Konstruktionsvorschrift für eine Ähnlichkeitsabbildung f des Rechtecks R auf das Rechteck R' an und weist nach, daß f verhältnistreu ist, d.h.

$$\frac{a}{b} = \frac{f(a)}{f(b)}$$

Mit $f(a) = k \cdot a$ und $f(b) = k \cdot b$ hat man damit eine Kürzungs- bzw. Erweiterungsregel für Längenverhältnisse.

Umgekehrt kann man die Aufgabe stellen, verhältnistreue Abbildungen herzustellen. Durch Umformung der Verhältnisse und Proportionen lassen sich Kriterien für die Verhältnistreue von Abbildungen gewinnen. Damit werden weitere Zusammenhänge deutlich, und es kommt als neuer Aspekt die *Algorithmierung* hinzu. Sie führt dazu, daß die Behandlung der Ähnlichkeit von Rechtecken zu einem Anwendungsfeld der Bruchrechnung werden kann. Dazu ist natürlich erforderlich, daß die Schüler über eine sichere Beherrschung der wichtigsten Termumformungsregeln bei Brüchen verfügen. OEHL weist daraufhin, daß Proportionen nur unter dieser Voraussetzung sinnvoll im Unterricht behandelt werden können (1965, S.340).

Bei den Proportionen wird man heute hauptsächlich die Bruchschreibweise verwenden. Die herkömmliche Schreibweise a:b spielt nur noch im Zusammenhang mit Fragen des Maßstabs in der Praxis eine Rolle.

Diese Überlegungen sind wesentlich am Rechteck orientiert und beziehen sich auf verhältnismäßig elementare Fragen. Weitergehende Betrachtungen ergeben sich im Rahmen der Ähnlichkeitslehre, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann.

Aber auch vom allgemeinen Verhältnisbegriff her lassen sich diese Fragestellungen in einem allgemeinen Rahmen sehen.

FREUDENTHAL zeigt in einer gründlichen Analyse die ganze Bedeutung des Verhältnisbegriffs für den Mathematikunterricht und gibt für wichtige Aspekte des Verhältnisbegriffs Lernzielhierarchien an (1974). Dabei zeigt es sich, daß eine Vertiefung der Betrachtungen insbesondere über eine „didaktische Phänomenologie des Größenbegriffs“ zu gewinnen ist. Diese Überlegungen sind insbesondere wichtig für die „Schlußrechnung“.

9. Unterrichtsvorschläge

Fragen zur Ähnlichkeit von Rechtecken können im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe folgende wichtige Beiträge leisten:

(1) Bezieht man *zentrische Streckungen* in die Betrachtung grundlegender *geometrischer* Ab*bildungen* ein, dann werden bereits in der Orientierungsstufe alle für die Mittelstufengeometrie wichtigen Abbildungstypen auf einheitlicher begrifflicher Ebene behandelt.

(2) Erarbeitet man den Begriff des *Längenverhältnisses*, so gewinnt man einen wichtigen Begriff zur Erfassung geometrischer Zusammenhänge,

(3) Erfaßt man zentrische Streckungen als *verhältnistreue* Abbildungen, dann werden damit die für die *Schlußrechnung* fundamentalen verhältnistreuen Abbildungen zwischen Größenbereichen vorbereitet.

(4) *Längenverhältnisse* und *Proportionen* (Verhältnisgleichungen) schaffen ein Anwendungsfeld der *Bruchrechnung*.

Eine Analyse von Lehrgängen zeigt sehr unterschiedliche Lösungen zu diesen Bereichen.

Dazu einige Beispiele:

ANDELFINGER-NESTLE (1970) bringen in einer „Oase“ in Verbindung mit der Bruchrechnung einige Gedanken zum „Vergrößern und Verkleinern“. Dabei stehen Fragen des Maßstabs im Vordergrund. Dieser Ansatz läßt sich am ehesten dem Bereich (4) zuordnen. Bei den Betrachtungen geometrischer Abbildungen fehlen zentrische Streckungen. Bei Aufgaben zur „Schlußrechnung“ wird mit „quotientengleichen Größenpaaren“ gearbeitet. ohne daß ein Bezug zum Begriff der Verhältnistreue hergestellt wird.

LAMBACHER-SCHWEIZER (1973) betonen Streckungen als geometrische Abbildungen und benutzen sie zur Fundierung der Bruchrechnung. Bei der „Schlußrechnung“ werden Abbildungen betrachtet, die zu quotientengleichen Paaren führen. Der Begriff des Verhältnisses wird vermieden.

WINTER-ZIEGLER (1970) behandeln zentrische Streckungen als Anwendungsfeld der Bruchrechnung in Verbindung mit maßstäblichen Zeichnungen, ohne diese Betrachtungen in die Geometrie zu integrieren. Der Verhältnisbegriff wird sehr allgemein angegangen als Anwendung der Bruchrechnung auf Größenbereiche, der Abbildungsaspekt wird nicht herausgearbeitet.

Die teilweise interessanten Beiträge lassen sich m.E. durch eine etwas andere Akzentsetzung besser im Unterricht verwerten.

In der Grundschule bemüht man sich heute darum, in einem „geometrischen Vorspiel“ ein stärkeres Bewußtsein für die geometrischen Eigenschaften der Umwelt bei den Kindern zu erzeugen (WINTER). Dieser Unterricht ist orientiert an konkreten Handlungen mit strukturiertem Material, aus denen Erfahrungen und Einsichten erwachsen sollen. Man bemüht sich gleichzeitig; umgangssprachliche Ausdrücke und Redewendungen mit mathematischen Vorstellungen zu verbinden. In diesem Bereich sollte man auch Erfahrungen zum Ähnlichkeitsbegriff vermitteln.

Die Kinder können Erfahrungen sammeln mit durch Kerzen- oder Sonnenlicht oder Projektor erzeugten Schattenbildern von Gegenständen (DIENES). Insbesondere untersuchen sie den Einfluß von Art der Lichtquelle und Lage des

Gegenstandes auf Größe und Form des Bildes.

Sie können auf einen Luftballon zeichnen und beobachten, wie sich die Zeichnung beim Aufblasen und Luftablassen ändert.

Kinder schauen mit Begeisterung in Vergrößerungs-, Verkleinerungs- und Verzerrungsspiegel. Bei der Beschreibung ihrer Beobachtungen verwenden die Kinder Adjektive wie schlank, dick, gestaucht, gestreckt, verzerrt. ähnlich, rund, „eieckig“ (Darmstädter Bezeichnung für „rund“) und deren Steigerungen. Durch Skizzen folgender Art

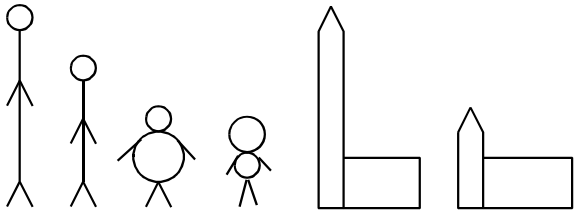

Abb. 18

kann man ein Gefühl für Größenverhältnisse wecken. Man wird sich auch um eine Verzahnung mit dem Kunstunterricht bemühen (WINTER, S.50).

In der Orientierungsstufe werden heute meist bei der „Einführung“ in die Längenmessung willkürlich gewählte Einheiten wie Länge der Heftseite, Handspanne usw. verwendet, obwohl die Schüler längst die konventionellen Einheiten kennen. Wenn man schon die Willkür festgelegter Einheiten herausarbeiten will, dann besser beim Erarbeiten des Verhältnisbegriffs. Aus einer Zeichnung wie

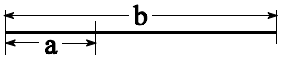

Abb. 19

entnimmt man sofort:

$$b = 3 \cdot a \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{1}{3}b.$$

Das ist eine Leistung, die in Klasse 5 ohne weiteres erbracht werden kann.

Als Anwendung der Bruchrechnung sollte man bei gleichartigen Größen die verschiedenen Vergleichsmöglichkeiten herausarbeiten. Der *absolute* Vergleich liefert für a, b mit a > b die Differenz

$$a - b,$$

der *relative* Vergleich ergibt für a, b mit a < b das Verhältnis:

$$\frac{a}{b}.$$

Für die Geometrie wichtig ist der Längenvergleich. Dabei wird man zunächst Streckenlängen wie in Abb. 20,

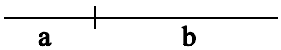

Abb. 20

dann auch wie in Abb. 21

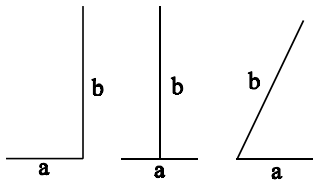

Abb. 21

untereinander vergleichen.

Vergleiche von Rechtecken führen dann auf die Fälle:

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}.$$

Diese Betrachtung kann man den Bereichen (2) und (4) zuordnen.

Man kann nun sogleich Proportionen anschließen, um mit ihnen Bruchrechenregeln zu üben (4), kann dies jedoch auch nach der Behandlung von Ähnlichkeitsfragen tun, um Zusammenhänge zu erfassen.

In der Geometrie wird man neben den Kongruenzabbildungen auch zentrische Streckungen einführen. Diese Abbildungen sollten sich nicht nur auf die Ecken beziehen wie in Abb. 22,

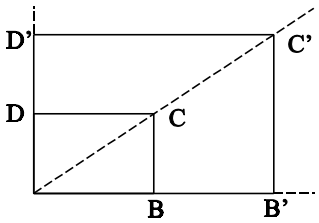

Abb. 22

sondern auf beliebige Punkte wie in Abb. 23.

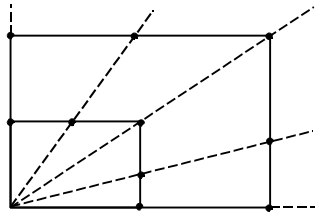

Abb. 23

(Das ist gut gelöst in WINTER-ZIEGLER).

Man sollte auch das Zentrum variieren und den Einfluß auf die Bilder betrachten.

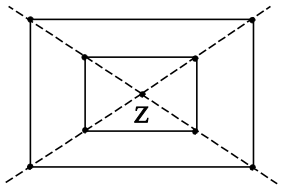

Abb. 24

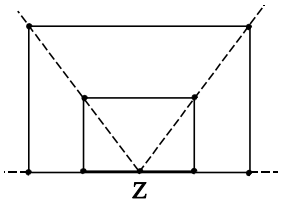

Abb. 25

Alle behandelten geometrischen Abbildungen sollten auf wichtige Invarianzen untersucht werden. Damit sind die Bereiche (1) und (3) angesprochen.

DIENES und CASTELNUOVO zeigen, wie man durch Variation von Lage des Gegenstandes und Lage der Bildebene bei Schattenwürfen die Schüler auf die unterschiedlichen Invarianzen aufmerksam machen kann. Zentrische Streckungen sollten als Abbildung erkannt werden, die Winkel und Seitenverhältnisse invariant sein lassen. Das ist besonders wichtig beim „maßstabsgerechten Zeichnen“ eines Hausplans.

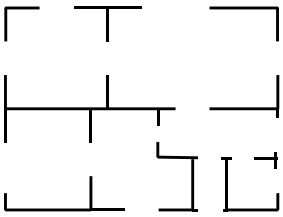

Abb. 26

Hier kommt es sowohl auf die Seitenverhältnisse der rechteckigen Räume als auch auf Längenverhältnisse von Strecken in einer Geraden an (z.B. Breite verschiedener Räume).

Solch eine Aufgabe findet sich z.B. bei KUYPERS, wird dort aber nicht geometrisch ausgenutzt.

Einfache Zusammenhänge wie

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

lassen sich mit Hilfe der Bruchrechnung leicht gewinnen (Bereich (4)) und geometrisch deuten (Bereich (2)) als Ähnlichkeitskriterien für Rechtecke.

Bei all diesen Betrachtungen sollten die Abbildungen im Vordergrund stehen, da sie am besten geeignet sind, weiterführende Betrachtungen einzuleiten. Das ist sinnvoll sowohl im Hinblick auf die geometrischen Betrachtungen als auch auf den Algebraunterricht der Mittelstufe.

Literatur

Andelfinger, B., Nestle, F,Mathematik 6. Schuljahr, Freiburg, 1970.

Castelnuovo, E., Objekt und Aktion im Unterricht in anschaulicher Geometrie. In: C. Gattegno, zur Didaktik des Mathematikunterrichts, Hannover, 1971, 36-53.

Dienes, Z.P., Lebendige Mathematik 4, Freiburg, 1974

Freudenthal,H.,Lernzielfindung im Mathematikunterricht, Z. Päd. 20 (1974), 710-738.

Kuypers,W., Mathematikwerk für Gymnasien, Band 1, Düsseldorf, 1964.

Lambacher,T., Schweizer, W., Rechnen und Raumlehre 2, Stuttgart, 1973.

Lorenz,G., Pietzsch, G., Das Stoffgebiet „2.Ähnlichkeit in der Klasse 8 nach dem neuen,Lehrplan' für Mathematik-Klassen 6-8“, MSch 7 (1969), 571-594.

Oehl,W., Der Rechenunterricht in der Hauptschule, Hannover, 1965

Oehl,W., Der Rechenunterricht in der Grundschule, Hannover, 1962[6]

Piaget, J., Inhelder, B., Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart,1971.

Winter, H., Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule, MU 17, H.5 (1971), 40-66.

Winter, H., Ziegler, Z., Neue Mathematik, 6. Schuljahr, Hannover, 1970.

Wittenberg, A., Bildung und Mathematik, Stuttgart, 1963.