# 15. Zur Charakterisierung von Kongruenzrelationen durch Abbildungen

*Elemente der Mathematik 27 (1972), 133-134.*

In einer Menge $A$ lässt sich bekanntlich jede Äquivalenzrelation $r$ mit Hilfe einer Abbildung $f$ von $A$ darstellen als

$$r = \{(x,y) \in A\times A | f(x) = f(y)\}.$$

Dabei ist $f$ bis auf eine Bijektion eindeutig durch $r$ bestimmt. Ist $(A,*)$ ein Verknüpfungsgebilde, dann ist $r$ genau dann Kongruenzrelation, wenn durch

(1) $$f(x)\circ f(y) \underset{\text{def}}{=} f(x*y)$$

eine Verknüpfung in $fA$ definiert ist.

Wir wollen nun zeigen, dass es zur Darstellung der Kongruenzrelationen von $A$ möglich ist, sich auf solche Abbildungen $f$ von $A$ in sich zu beschränken, für die gilt

(2) $$f(f(x)*f(y)) = f(x*y).$$

Zunächst liefern solche Abbildungen Kongruenzrelationen, denn

aus $f(x)=f(x')$ und $f(y)=f(y')$ folgt

$$f(x)*f(y) = f(x')*f(y').$$

Das ergibt mit (2)

$$f(x*y) = f(f(x)*f(y)) = f(f(x')*f(y')) = f(x'*y').$$

Ist umgekehrt $r$ eine Kongruenzrelation von $A$, dann kann man eine Abbildung dadurch definieren, dass man jedem $x$ aus $A$ ein vorher festgelegtes Element aus der Klasse $[x]r$ zuordnet. $f$ bildet also $A$ in sich ab, und wegen $[f(x)]r=[x]r$ gilt

(3) $$f(f(x)) = f(x).$$

Da $r$ Kongruenzrelation ist, gilt (1). Also erhalten wir

$$f(f(x))\circ f(f(y)) = f(f(x)*f(y)).$$

Wegen (3) folgt

$$f(x)\circ f(y) = f(f(x*y)).$$

Andererseits gilt nach (1)

$$f(x)\circ f(y) = f(x*y)\ .$$

Daraus folgt (2) . Das ergibt den

**Satz**. In einem Verknüpfungsgebilde $(A,*)$ lässt sich jede Kongruenzrelation $r$ darstellen als $r = \{(x,y) \in A\times A | f(x) = f(y)\}$ mit einer Abbildung $f$ von $A$ in sich, für die gilt

$$f(f(x)*f(y)) = f(x*y),$$

und für jede Abbildung dieser Art ist $r$ eine Kongruenzrelation von $A$.

Bei unseren Überlegungen konnten wir die Schlüsse ziehen :

Aus (2) folgt (1) und aus (1) und (3) folgt (2). Es fragt sich nun, ob umgekehrt aus (2) schon (3) folgt. Das ist aber nicht der Fall, Gegenbeispiel: $A = \{0, 1\}$, $0*0 = 0 = 1*1$, $1*0 = 1 = 0*1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. (2) ist erfüllt; (3) ist verletzt, denn $f(f(0)) = f(1) \neq f(0)$.