## 7. Aspekte dialogischen Lehrens im Mathematikunterricht

*Die Deutsche Schule 60 (1968), S. 327-336*

> „Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrzehnten und die Bedeutung, die die neueren mathematischen Denkweisen für die geistige Orientierung unserer Gesellschaft gewonnen haben, lassen es wünschenswert erscheinen, Gedanken und Neuorientierungen, von denen die Mathematik der heutigen Zeit geprägt wird, in maßvoller Weise in den Unterricht aller Schulformen einzubeziehen.“ (Hessen 1967, S. 3)

Solche Überlegungen haben in der gesamten Bundesrepublik zu einer Neugestaltung der Stoffpläne geführt. Die Aufgabe des Lehrers ist es, die geeigneten Methoden zu entwickeln, um den Schülern diese neuen Denkweisen und Sachverhalte zu erschließen.

Verschiedene Strukturen der Bildungsinhalte bedingen verschiedene Methoden. Die Methode muß dem Inhalt des Stoffes und den Fähigkeiten des Schülers angemessen sein. Es kann also keine Universalmethode geben! Das gilt auch und in besonderer Weise für die Denkweisen in der modernen Mathematik.

Die Widerstände gegen die Reform der Stoffpläne von seiten der Lehrer sind im wesentlichen aus einer gewissen Hilflosigkeit heraus zu erklären, wie man die neuen Stoffe erfolgreich unterrichten kann. Das ist verständlich, denn viele Lehrer haben diese Begriffe während ihres Studiums nicht kennengelernt. Sie haben sie sich also selbst durch Literaturstudium oder in Fortbildungskursen *mühsam* aneignen müssen. Häufig war die einzige Motivation für ihre Bemühungen, nicht als rückständig zu gelten. Die Schwierigkeiten bei der eigenen Erarbeitung und die unzureichende Motivation führten häufig zu einer Abwehrhaltung, die pädagogisch durch die Erfahrung begründet ist, daß schon die klassischen elementaren Stoffe mit ihrem Minimum an Begrifflichkeit den

Schülern erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Um die Schwierigkeiten beim Rechnen oder in der Algebra zu überwinden, weicht der Lehrer leicht zu einem Aufgabendrill aus. Dieser „Dressur des Unverstandenen“ setzen WAGENSCHEIN und WITTENBERG eine geistige Vertiefung in einem problemorientierten genetischen Unterricht entgegen (WAGENSCHEIN 1962, WITTENBERG 1963). Den modernen Begriffen gegenüber äußern sie sich kritisch:

> „Nach dem Grundsatz ‚Kleider machen Leute‘ hängt man dem gymnasialen Unterricht ein Mäntelchen höherer Mathematik um und glaubt sich dadurch der Aufgabe enthoben, gründlicher und selbständig darüber nachzudenken, was es mit der Mathematik eigentlich auf sich hat.“ (WITTENBERG 1963, S. 54)

Sicher ist es falsch, wenn die neuen Begriffe dem herkömmlichen Stoff – vielleicht noch dozierend – aufgepfropft werden. (Manch neu erschienenes Lehrbuch erweckt diesen Eindruck!) Ein so reformierter Unterricht richtet eher Schaden an.

> „Seine Problemstellungen können für den Schüler sinn- oder belanglose Spielereien, seine Begriffsbildungen Spitzfindigkeiten, seine Beweise logische Überrumpelungen (‚Mausefallen') oder aber konventionelle geistige Manipulationen bleiben, gegen die man sich nicht wehren kann und die doch keine Überzeugung schaffen.“ (WITTENBERG 1963, S. 59)

Soll der Unterricht fruchtbar sein, so muß er von lebendigen Problemen und Fragen ausgehen. Die Lösung der Fragen darf dem Schüler nicht gegeben werden. Daß sich die Mathematik ganz dem eigenen Denken erschließen kann, zeichnet sie unter den anderen Wissenschaften aus und kann damit den Mathematikunterricht zum Modell eines erarbeitenden Unterrichts werden lassen.

Wir wollen uns hier auf den *Unterricht in dialogischer Form* beschränken und wollen Aspekte aufzeigen, die gerade für die Behandlung der neuen Problemstellungen, Aufgaben und Begriffe bedeutsam sind. Unter dem dialogischen

Lehren wollen wir alle Lehrformen verstehen, die sich im Unterrichtsgespräch vollziehen. Bei der Behandlung der Aspekte streben wir keine Vollständigkeit an.

## 1. Der heuristische Aspekt

Der Schüler soll unter der Leitung des Lehrers Problemstellungen, Begriffe, Sätze und Verfahren *erarbeiten.* Das heuristische Lehren wird in Gang gesetzt und gesteuert durch *Impulse,* die der Lehrer der Klasse gibt. Solche Impulse können die Lehrerfrage, Auf gabenstellungen, anregende Figuren u. ä. sein.

Wir könnten dies Verfahren auch die „sokratische Methode“ nennen, wir wollen es aber nicht tun, da wir dem Verfahren nicht die sokratische Philosophie zugrunde legen wollen. Aber natürlich sind auch unsere Überlegungen von gewissen Anschauungen über unsere Erziehungswirklichkeit geprägt. Das ist bei jeder Methode der Fall.

Im 18. Jahrh. wurde die heuristische Methode häufig als Wiederentdeckung der sokratischen Methode verstanden. (etwa MICHELSEN 1781) Sie wurde in der Pädagogik gründlich untersucht und kritisch beurteilt (BASEDOW, DINTER, DIESTERWEG, DOLINSKI, FRÖBEL, GAUDIG, WEIERSTRASS, WILLMANN u. a.). Im mathematischen Unterricht ist sie durch PO1YA, WAGENSCHEIN und WITTENBERG in unserer Zeit zu neuem Leben erweckt worden. Sie beschränken sich allerdings auf den herkömmlichen Lehrstoff und klassische Problemstellungen. Gerade damit aber legen sie sich eine Beschränkung auf, die ihnen eine völlig neue Komponente des heuristischen Verfahrens verschließt.

Die wesentliche *Kritik gegen das heuristische Verfahren* richtet sich gegen die „Despotie der Frage“ (GAUDIG). Im Grunde wird der Schüler durch die Frage des Lehrers bereits in eine bestimmte Richtung gelenkt. Der Anstoß zu geistiger Arbeit kommt von außen, und die weiterführenden Überlegungen werden stets durch einen neuen Impuls in Gang gesetzt. Andererseits ist ja wohl kaum damit zu rechnen, daß es einem durchschnittlich begabten Schüler möglich sein

sollte, völlig selbständig etwa die Elementargeometrie zu erschließen. Es ist doch ein Gebiet, das über Jahrhunderte in mühsamem geistigen Ringen geschaffen worden ist. So wird ein guter heuristischer Unterricht den Schülern geistigen Spielraum lassen, aber die Schüler durch das Hinführen auf bewährte Begriffsbildungen und Verfahren leiten müssen.

Ein echter heuristischer Unterricht ist letztlich nicht planbar. Andererseits gehört natürlich zu jeder Unterrichtsmethode ein pädagogisches Ziel und damit eine Planung, wenn der Unterricht Ertrag haben soll. Der Lehrer wird die *Makrostruktur* des Unterrichtsverlaufs bestimmen, den Schülern aber seine *Mikrostruktur* zur Gestaltung überlassen.

Gerade die Strukturbetrachtungen in der modernen Mathematik geben nun dem Schüler die Möglichkeit zu wirklich neuartiger produktiver Arbeit. Es ist z. B. möglich, bei der Mathematisierung eines alltäglichen Problemkreises adäquate mathematische Begriffe selbst zu schaffen. (STEINER 1966)

Auch das Feld sinnvoller Beispiele ist erheblich erweitert worden und regt zu eigener Arbeit und zu geeigneten Begriffsbildungen an innerhalb der klassischen Gegenstandsbereiche der Mathematik. In einer Jahresarbeit mit dem Thema: „Eine Untersuchung von im Mathematikunterricht vorkommenden Relationen“, stellte 1963 z.B. einer meiner Schüler selbständige fruchtbare Untersuchungen an.

Schließlich haben die neuen Begriffe auch zu neuartigen Fragestellungen innerhalb der Elementarmathematik geführt, die diese bereichern. Es ist damit zu rechnen, daß sich das Bild des Mathematikunterrichts aller Schularten in naher Zukunft entscheidend ändern wird sowohl im Hinblick auf die Stoffe als auch auf die Methoden.

Wir wollen am *Beispiel des gleichseitigen Dreiecks* zeigen, wie neue Betrachtungen einem klassischen Gegenstand neues Gewicht geben können (Hessen 1967). Unseren methodischen Betrachtungen liegt die Entscheidung zugrunde, gerade mit Hilfe der Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks den Gruppen-

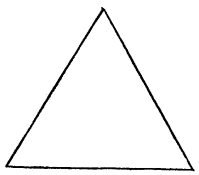
begriff zu erarbeiten. Wir greifen damit ein Modell auf, das die Didaktik bereitgestellt hat. Wir betrachten es überhaupt als Aufgabe der Didaktik der Mathematik, im Blick auf die Lehre gestaltete mathematische Bereiche anzubieten. Zu unserem Themenkreis liegen zahlreiche Arbeiten vor (z.B. BAUERSFELD 1961/62, LEPPIG 1966, STEINER 1965)

In der ersten Phase des Unterrichts heben wir die gleichseitigen Dreiecke von den übrigen ab. Der Impuls dazu geht in bewährter Weise durch Vergleich verschiedener Dreiecke aus, die an die Tafel gezeichnet worden sind. Ein solches Vorgehen findet sich z.B. schon bei MICHELSEN (1781, S. 44/45) das für unseren Geschmack vielleicht etwas zu gezielt und zu schwerfällig ist:

> „L. Betrachten Sie nun die Dreiecke Fig. 22, 26 und 27, und sagen Sie mir, wie Ihnen dieselben in Ansehung ihrer Seiten verschieden scheinen...
>
> S. Die Seiten des Dreyecks Fig. 22 sind ungleich, in dem Dreieck Fing. 26 aber sind zwey Seiten gleich, und in dem Dreieck Fig. 27 sind alle Seiten gleich.“

Die gleichseitigen Dreiecke zeichnen sich durch ihre Regelmäßigkeit aus. Wir analysieren diese Regelmäßigkeit. Sie ergibt sich zunächst in der *Homogenität* der Figur, d. h. „der inneren Ununterscheidbarkeit aller Seiten und aller Ecken (‚für einen Bewohner‘) des Dreiecks. Sie spielen alle genau die gleiche Rolle“.(WITTENBERG 1963, S. 86) Die Regelmäßigkeit beruht aber auch auf gewissen *Symmetrien.* Wir versuchen, diese Symmetrien zu erfassen. Die Schüler werden nun die Achsensymmetrien und die Drehsymmetrien zunächst intuitiv, dann in angemessenen Definitionen erfassen, die durch den Sachverhalt motiviert sind. Gerade in der Motivation der Begriffsbildungen und Verfahren besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen der systematischen Betrachtungsweise der Mathematik und der didaktischen.

Das unstrukturierte gleichseitige Dreieck Fig. 1 wird durch diese Betrachtungen strukturiert Fig. 2.



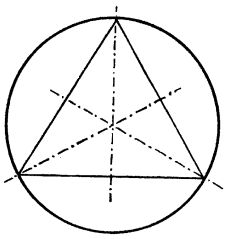


Fig. 1 Unstrukturierte ... Fig. 2 strukturierte Figur

Auf dieser Ebene unserer Untersuchungen werden wir entsprechende Überlegungen für kompliziertere Vielecke und ebene Figuren anstellen. Wir kehren auch die Frage um und suchen Figuren mit vorgegebenen Symmetrieeigenschaften. Auf diese Weise verschaffen wir den Schülern ein großes Feld anschaulich gegebener Objekte, die weiterführende Überlegungen gestatten.

Die zweite Phase des Unterrichts ergibt sich im Rahmen eines „lokalen Ordnens“ (FREUDENTHAL) bei der Frage nach den Zusammenhängen zwischen den Symmetrieeigenschaften etwa des gleichseitigen Dreiecks und seinen allgemeinen Dreieckseigenschaften. Wir erkennen z. B., daß die Symmetrieachsen gleichzeitig Höhen, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte des Dreiecks sind. Auf dieser Ebene sind Beweise sinnvoll. Sie setzen die Einsicht voraus, daß eine Forderung, etwa die Gleichheit der Seiten, unter Umständen andere Eigenschaften zur Folge hat, z. B. die Gleichheit der Winkel. Der Schüler erfährt auf dieser Stufe etwas von der „Hierarchie der Einsichten“ (WITTENBERG 1963, S. 111).

Die dritte Phase ist gekennzeichnet durch die „systematische Expansion“ (WAGENSCHEIN), in der es darum geht, das Gewebe der Mathematik zu erschließen, in das der spezielle Sachverhalt eingeknüpft ist. (Der Netz- oder Gewebecharakter der Mathematik wurde von LIETZMANN und später von

WAGENSCHEIN am Pythagoreischen Lehrsatz gezeigt.)

Innerhalb des herkömmlichen Unterrichts ist das von uns gewählte Beispiel nicht sehr ergiebig. Lediglich die Erkenntnis, daß gleichseitige Dreiecke *formgleich* sind, führt hier weiter, nämlich zur Ähnlichkeitslehre und dann zur Trigonometrie. Von daher erschließt sich also kaum das Netz der Mathematik. Moderne Betrachtungsweisen führen dagegen weiter. In der modernen Mathematik nehmen Abbildungen und Verknüpfungen einen großen Raum ein. Spiegeln wir z. B. das gleichseitige Dreieck an einer Achse, das Spiegelbild an der zweiten, so erhalten wir ein Bild, das wir auch durch Drehung um das Zentrum hätten erzeugen können (Fig. 3).

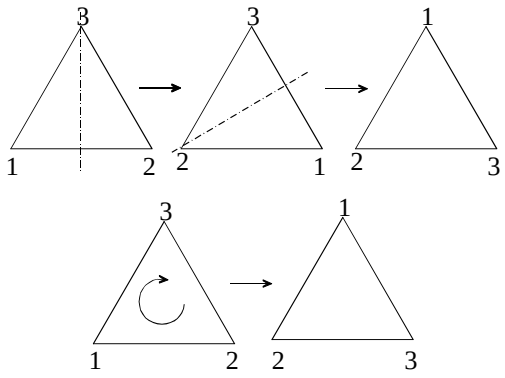



Fig. 3 Zusammensetzung von Abbildungen

Das führt uns auf das Verknüpfen von Abbildungen, die Verknüpfungsgesetze werden untersucht. Über die Invarianten von Abbildungen in der Geometrie ergeben sich spezielle Geometrien: die affine, die metrische, die projektive Geometrie.

Betrachten wir die Ecken 1, 2, 3 des gleichseitigen Dreiecks bei den verschie-

denen Abbildungen des Dreiecks auf sich, so werden wir auf die Permutationen geführt:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

Spiegelungen Drehungen

Sie erschließen uns die Kombinatorik und können zur Wahrscheinlichkeitsrechnung führen.

Betrachten wir die Drehwinkel bei den Abbildungen, so ergibt sich die Feststellung, daß die Winkel von 120°, 480°, ... entsprechend 240°, 600°, ... und 0°', 360°, ... jeweils die gleiche Wirkung erzielen. Die Winkel können addiert werden, und das Ergebnis kann wieder durch einen der Winkel 0°, 120°, 240° ausgedrückt werden.

Über die Uhr-Arithmetik gelangen wir so zu den Restklassen, von ihnen zur elementaren Zahlentheorie.

Von den drei letzten Fragestellungen her sind Strukturbetrachtungen sinnvoll. Sie gehören in die vierte Phase. Es ist die distanzierte Betrachtung, die das auseinanderstrebende Netzwerk der dritten Stufe überschaubar macht. Für unsere Problemstellung leistet das der *Begriff der Gruppe.*

Wir gelangen genetisch zu ihm, indem wir das *Verknüpfen* als gemeinsamen Prozeß bei Abbildungen eines regelmäßigen Vielecks auf sich, Permutationen und Restklassen abheben: Je zwei Elementen einer Menge wird (eindeutig) ein drittes dieser Menge zugeordnet. Mit diesem Begriff der Verknüpfung durchleuchten wir nun die bisher behandelten Gebiete der Mathematik. Die Rechenoperationen werden als Verknüpfungen erkannt, auch solche wie das Bilden des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen. Wenn dann auch die Beschränkungen auf die Mathematik fallengelassen werden, kommen die

Schüler zu selbständigen Leistungen, die im herkömmlichen Unterricht kaum Gleichwertiges finden lassen. Es handelt sich hier um eine Art von Mathematisierung, die jenseits aller „Textaufgaben“ liegt!

Die Erfahrungen mit derartigen Verknüpfungen werden nun wieder auf die von uns betrachteten Gegenstandsbereiche übertragen. Als gemeinsame Eigenschaften von Abbildungen des regelmäßigen Vielecks auf sich, Restklassen und Permutationen finden wir die Gruppeneigenschaften. Der Begriff der Gruppe ergibt sich als einerseits willkürlicher, andererseits aber treffender Begriff, der durch seine Ordnungsfunktion für ein mathematisches Gebiet motiviert ist.

Das selbständige Operieren mit dem Gruppenbegriff bleibt einer fünften Phase vorbehalten, die auf der Oberstufe des Gymnasiums sinnvoll ist, aber wohl auch erst dort.

Die dritte Stufe ist also bei unserem Problemkreis einerseits eine Phase abstandnehmenden Betrachtens, zugleich aber auch produktiven Handelns. Nicht bei jedem Stoff werden sich die Strukturbetrachtungen der modernen Mathematik anbieten. Es gibt auch eine abstandnehmende Betrachtung im klassischen Bereich (z.B. WAGENSCHEIN 1962). Doch ist sie sicher nicht die für die Schule allein sinnvolle.

Die Unterrichtsfunktion der heuristischen Unterrichtsform besteht also in einer durch Impulse zielgerichteten geistigen Aktivierung der Schüler bei der Erarbeitung mathematischer Sachverhalte. Der Wertmaßstab ergibt sich in dem Spielraum zu selbständiger Tätigkeit. Durch die Arbeitsmethoden der modernen Mathematik kann sie eine echte Komponente geistiger Freiheit erhalten.

## 2. Der katechetische Aspekt

Hier handelt es sich um das Zergliedern eines Sachverhaltes in Bestandteile, die dann vom Lehrer erfragt werden. Während beim heuristischen Verfahren

die Frage des Lehrers ein Impuls zu weiterführender geistiger Arbeit sein soll, wird die Frage beim katechetischen Lehren gerade so eng gestellt, daß der Lehrer eine eindeutig bestimmte Antwort erwarten kann. Äußerlich wird die Klasse auf diese Weise sicher aktiviert, aber wenn der Unterricht von diesem Verfahren beherrscht wird, werden doch die Schüler eigentlich menschenunwürdig gegängelt. Die pädagogische Reformbewegung zu Anfang des Jahrhunderts wandte sich deshalb mit Recht in aller Schärfe gegen dieses Verfahren. Und doch hat es in bestimmten Unterrichtssituationen auch heute seine Bedeutung. Neben der Erarbeitung geistiger Sachverhalte geht es ja im Mathematikunterricht auch um die Aneignung gewisser Fertigkeiten, die durch feste Regeln bestimmt sind. Natürlich muß der Aneignung dieser Fertigkeiten stets eine Einsicht vorangehen. Dann sollte aber auch die Aneignung der Regeln folgen. Viele Schüler versagen im Algebraunterricht, weil sie nicht sicher Kopfrechnen können, weil sie Bruchrechenregeln nicht beherrschen usw. Besondere Schwierigkeiten ergeben sich erfahrungsgemäß, wenn bei der Lösung einer Aufgabe mehrere Schritte nacheinander zu vollziehen sind. Bei der Addition ungleichnamiger Brüche z. B. muß der Schüler zunächst bedenken, daß nur gleichnamige Brüche ohne weiteres addiert werden können. Er muß also zunächst den Hauptnenner bestimmen. Dann sind die Brüche zu erweitern. Dazu muß jeweils die Erweiterungszahl gesucht werden. Die gleichnamig gemachten Brüche werden schließlich addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält.

Zweckmäßigerweise orientiert sich der Schüler an dieser Schrittfolge. Sie wird zunächst heuristisch erarbeitet und dann als Fragenfolge dem Schüler katechetisch eingeprägt, bis er selbständig mit ihr arbeitet.

Die Reformbestrebungen des Mathematikunterrichts zielen auf eine *Betonung der Begrifflichkeit.* Standen im herkömmlichen Unterricht Lösungsverfahren für bestimmte Aufgabentypen im Vordergrund, so geht es heute vorwiegend um die Fundierung der Verfahren. Litt der herkömmliche Unterricht unter der Gefahr, in Aufgabendrill auszuarten, so liegt nun im überbetonen des Begrifflichen die Gefahr, daß der Schüler „den Boden unter den Füßen verliert“. Er

weiß dann nicht einmal, was er fragen soll, die schlimmste Form des Nichtverstehens!

Früher bestand z.B. die Gleichungslehre in reinem Aneinanderreihen von Übungen mit wachsendem Schwierigkeitsgrad. Die Probe hatte die Bedeutung, zu prüfen, ob man auch richtig gerechnet hatte. Die Fälle, bei denen eine Gleichung keine oder unendlich viele Lösungen hat, fielen als pathologisch unter den Tisch. Heute stehen Überlegungen im Vordergrund, die die einzelnen Schritte im Hinblick auf das Ziel, gleichzeitig aber auch im Rückblick auf die Voraussetzungen kritisch betrachten. Erleichtert wird das durch Begriffsbildungen der Mengenlehre und Logik. Auch für die Gleichungslehre sind von der Didaktik zahlreiche Modelle entwickelt worden. Einen guten Überblick gibt (HÄNKE 1966).

Zu einer sicheren Beherrschung der Gleichungslehre gehört aber auch eine Strukturierung des Lösungsweges, die man durch Zergliedern in Frageketten mit der katechetischen Methode erreichen kann. Der katechetischen Methode kommt also gerade bei den Modernisierungsbestrebungen eine spezifische Unterrichtsfunktion zu: Sie leitet nach heuristischer Erarbeitung eines Sachverhalts über zur Aneignung des notwendigen Wissens oder Könnens.

### 3. Der eristische Aspekt

Die Sophisten verstanden unter der Eristik die Streitkunst. Dieser Aspekt des dialogischen Lehrens ist bisher für den Mathematikunterricht kaum beachtet worden. Und doch kann nach meiner Erfahrung auch er einen entscheidenden Beitrag zu den Modernisierungsbestrebungen leisten.

Innerhalb der Mathematik nimmt der Beweis **eine** zentrale Stellung ein. Er ist das Mittel zur Sicherung der mathematischen Wahrheit. Im herkömmlichen Unterricht spielte er eine stiefmütterliche, ja bis zu einem gewissen Grade paradoxe Rolle. In einem Alter, in dem die Schüler aus entwicklungspsychologischen Gründen mit dem Beweisen Schwierigkeiten haben, traktiert man sie

damit: Den 14- bis 16jährigen werden mehr oder weniger stark Beweise in der Geometrie aufgezwungen. Wenn sie dann aber eigentlich Beweise führen könnten und auch müßten, um ein gültiges Bild von der Mathematik zu erhalten, verlangt der Unterricht kaum noch welche von ihnen: Die 16- bis 19jährigen rechnen fast ausschließlich in der Analysis und in der analytischen Geometrie. Der Algebraunterricht für die 14- bis 16jährigen brachte bisher praktisch keine Beweise. Auch das soll anders werden. Das *Beweisen soll* stärker in den Vordergrund treten.

Für die Schüler besteht die Hauptschwierigkeit einmal in der Motivation des Beweisens, zum anderen im Abstraktionsgrad, den ein Beweis eben erfordert. Beiden Schwierigkeiten kann nach meinen Erfahrungen die eristische Unterrichtsform begegnen (s. VOLLRATH 1967).

Die Motivation über das Wahrheitsproblem läßt vielleicht den engagierten Lehrer „in Ehrfurcht erbeben“, nach meinen Erfahrungen aber kaum 14- bis 16jährige. Gerade in diesem Alter aber ist ein ausgeprägter Oppositionsgeist bei den Schülern festzustellen. Er richtet sich allerdings weniger gegen die mathematische Autorität des Lehrers als gegen die menschliche. Es sollte das Bestreben des Lehrers sein, in sachlichen Bahnen diesen Oppositionsgeist auf die Mathematik hinzulenken. Das kann durch eine unwahrscheinlich klingende Aussage des Lehrers geschehen, gegen die die Schüler opponieren; es kann auch durch den Lehrer in Gang gesetzt werden, indem z.B. eine Vermutung heuristisch erarbeitet wird, gegen die der Lehrer opponiert. Die Schüler müssen dann als *Proponenten* die Vermutung verteidigen.

Dazu ein Unterrichtsbeispiel: Wir haben heuristisch erarbeitet, daß sich jede ungerade Zahl als Differenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen darstellen läßt. Das wird in Dialogen verteidigt. Der *Opponent* (0) bezweifelt es (?) für 5 etwa, der Proponent (P) rechnet vor.

$$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$$

Schematisch:

| O | P |
|---|---|
| ? 5 | Jede ungerade Zahl läßt sich als Differenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen darstellen.<br>$3^2 – 2^2 = 9 – 4 = 5$ |

Ähnlich verlaufen mehrere Dialoge. Erfahrungsgemäß suchen die Schüler die Quadratzahlen zunächst durch Probieren. Sie operieren *blind konkret* im Dialog. Dann aber finden sie ein System, sie entwickeln eine *Gewinnstrategie.* Das wird im Schema deutlich:

| O | P |
|---|---|
| ? 7 | $\left(\frac{7+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7-1}{2}\right)^2 = 4^2 - 3^2$<br>$= (4+3)(4-3) = 7 \cdot 1 = 7$ |

Die Schüler operieren *produktiv konkret.* Sie haben eine Gewinnstrategie, damit im Grunde einen Beweis. Es ist also durchaus vertretbar, sich in einer gewissen Altersstufe auf diese *Nachweisebene* zu beschränken. Dies wird insbesondere für die Volksschule gelten.

Durch Formalisierung kommen wir zur *Dialogform,* die die Gewinnstrategie als Beweis enthält. Im Schema:

| O | P |
|---|---|
| ? n ungerade | $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 =$ <br> $\left(\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) =$ <br> $n \cdot 1 = n$ |

Bei dieser Unterrichtsform ist der Beweis motiviert als Gewinnstrategie im Dialog. Nach meinen Erfahrungen ist diese Motivation natürlicher für die Schüler als die über das Wahrheitsproblem.

Ein besonderer Vorteil des Verfahrens liegt darin, daß der Lehrer als Opponent sich durch *Variation der Nachweisebene* der psychologischen Entwicklung des Schülers anpassen kann. Ein Beweis ist im Grunde immer gefunden, wenn die Schüler als Proponenten eine Gewinnstrategie haben. Die erste Stufe des Beweisens besteht im Anwenden der Gewinnstrategie im Dialog. Die zweite läßt sie am konkreten Beispiel sichtbar werden. In der dritten Stufe können sie die Schüler sprachlich darlegen, in der vierten sind sie in der Lage, diese formal darzustellen in der Dialogform. Schließlich kann die Gewinnstrategie von der Dialogform gelöst werden, indem man sie im Rahmen eines Lehrsatzes als Beweis darstellt.

Dem Einwand, daß damit der Beweis abhängig wird von der Psyche des Opponenten, läßt sich dadurch begegnen, daß sich ja auch in der Geschichte der Mathematik die Nachweisebene geändert hat. Sie ist bis zu einem gewissen Grad immer abhängig vom jeweiligen Stand der mathematischen Forschung.

Die Möglichkeit der Variation der Nachweisebene macht aber auch die Beweise schon auf recht früher Altersstufe eigentlich in allen Schultypen sinnvoll, was bei dem bisher üblichen starren Schema sicher nicht der Fall ist.

Schließlich sei noch auf die starke *Aktivierung der Schüler* bei der Verwendung der eristischen Methode hingewiesen. Ich habe es wiederholt erlebt, daß

für eine Behauptung von den Schülern mehrere Gewinnstrategien entwickelt wurden. So hatten dann die Schüler die Möglichkeit, die Tragfähigkeit und den Aufwand verschiedener Strategien zu diskutieren. Natürlich kann man auch im herkömmlichen Verfahren unter Umständen mehrere Beweise erhalten, sie ergeben sich aber doch nicht so spontan, da die Forderungen auf einmal zu schwer sind. Beim eristischen Verfahren ergibt es sich ganz von selbst, daß die Schüler beim Operieren in konkreten Dialogen verschiedene Strategien finden.

Schließlich kann das eristische Verfahren auch im Arbeitsunterricht fruchtbar werden. Die Schüler können Gruppen bilden, in denen sie Dialoge führen und Gewinnstrategien entwickeln.

Wir wollen es aber ausschließlich in seiner Funktion sehen, die Schüler das Beweisen zu lehren. Damit versteht es sich von selbst, daß es nicht in allen Phasen des Unterrichts mit allen Stufen beim Beweisen herangezogen wird. In der Hauptsache wird es im Unterricht der 14- bis 16jährigen verwendet werden, wenn nach dem heuristischen Verfahren eine Vermutung gefunden worden ist, die es zu beweisen gilt.

Wir haben drei Aspekte des dialogischen Lehrens im Hinblick auf ihre spezifische Unterrichtsfunktion betrachtet. Wir haben sie insbesondere auf die Modernisierungsbestrebungen hin untersucht. Nur wenn die Reform des Mathematikunterrichts zu einer Verbesserung des Unterrichtsertrages führt, wird sie einen Fortschritt bedeuten. Das aber hängt ab von den verwendeten Methoden. Gerade die von uns genannten Aspekte scheinen es uns möglich zu machen, die Anliegen der verschiedenen Richtungen in den Reformbestrebungen fruchtbar werden zu lassen. Als Exponenten verschiedener Reformbestrebungen im deutschen Raum seien STEINER und WAGENSCHEIN genannt.

Die von uns behandelten Formen des Unterrichts genügen natürlich nur ihren spezifischen Funktionen, diese scheinen uns aber zentral im Unterrichtsgeschehen zu sein.

## Literatur

Bauersfeld, H., Ein Beitrag der Gruppentheorie zur Systematisierung geometrischer Figuren, MNU 14 (1961/62) S. 274-278;

Hänke, W., Gedanken zum Algebraunterricht der Mittelstufe, in H. Schröder, Der Mathematikunterricht im Gymnasium, Hannover 1966, 49-86

Leppig, M., Beispiele zum Rechnen mit endlichen Gruppen, MU 2 (1966) S. 39-49;

Michelsen, J.A.C., Versuch in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie, Berlin 1781.

Steiner, H.-G., Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie, MU 1 (1965) S. 20-29

Steiner, H.-G. , Mathematisierung und Axiomatisierung einer politischen Struktur, MU 3 (1966), S. 66-86.

Vollrath, H.-J., Der Beweis als Gewinnstrategie im Unterrichtsdialog, PM 11 (1967), 297-300

Wagenschein, M., Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht, MU 4 (1962)

Wittenberg, A. I., Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963