# 74. Die Rolle des Didaktischen in der Grundlegung der Arithmetik

*Mathematische Semesterberichte 43 (1996), 109-122.*

*Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Günter Pickert zum 80. Geburtstag*

## 1. Das Didaktische und das Wissenschaftliche als scheinbare Gegensätze

In seiner 1872 erschienenen Schrift *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* berichtet RICHARD DEDEKIND (1831-1916), wie in ihm das Bedürfnis nach einer Grundlegung der Arithmetik entstanden und wie er auf die entscheidenden Ideen gekommen ist:

> „Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwert und namentlich beim Beweise des Satzes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen. Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für außerordentlich

> nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. Aber daß diese Art der Einführung in die Differentialrechnung keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, wird wohl niemand leugnen. Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, daß ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde.“ (DEDEKIND 1872, 3-4)

DEDEKIND schildert sehr eindringlich, wie er auf das Problem gestoßen ist. Beim Halten einer Vorlesung über Infinitesimalrechnung wird er sich des Mangels einer „wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik“ bewußt. Mit der von ihm nach langem Ringen gefundenen Lösung des Problems, hat er wissenschaftlich neue Maßstäbe gesetzt. Die bisher gegebene und bis dahin anscheinend allgemein übliche Begründung ist nun *wissenschaftlich* nicht mehr akzeptabel. Im Hinblick auf die Lehre räumt er ein, daß die herkömmliche Einführung *didaktisch* durchaus noch als „außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich“ angesehen werden kann. Es fragt sich allerdings, ob die wissenschaftliche Entwicklung bei den Grundlagen nicht letztlich doch auch didaktische Konsequenzen hatte, ja haben mußte.

In DEDEKINDS Betrachtungen werden ein *didaktischer Standpunkt* und ein *Anspruch auf Wissenschaftlichkeit* einander gegenübergestellt. Sie führen zu unterschiedlichen *Wertungen*. In dieser Sicht erscheinen das „Wissenschaftliche“ und das „Didaktische“ als Gegensätze. Im folgenden wollen wir die von DEDEKIND geschilderte Situation, seine Argumentationen, seine Lösung und die weitere Entwicklung der Begründung der reellen Zahlen etwas näher beleuchten und untersuchen, in welcher Beziehung diese beiden Sichtweisen zueinander stehen. Dabei ist es mir wichtig, möglichst eng an den historischen Texten zu bleiben, um die Intentionen der Verfasser zu verstehen.

**2. Ein didaktisches Problem als Quelle eines mathematischen Problems**

Eine *didaktische Situation* warf für DEDEKIND ein Problem auf, das sich als *mathematisches Grundlagenproblem* entpuppte. Zwar sind es nicht die Studenten, die das Problem erkennen und die unzulängliche Argumentation kritisieren, doch ist entscheidend, daß sich DEDEKIND in dieser didaktischen Situation seiner unzulänglichen mathematischen Begründung bewußt wird. Er selbst ist der kritische Hörer, dem seine Argumente nicht ausreichen.

Jeder Lehrende kennt diese Situation. Denn Mathematik wird im Lehren immer wieder neu entwickelt. Darin liegt der besondere Reiz des Lehrens von Mathematik. Da geschieht es, daß man mal nicht weiter weiß, daß man die entscheidende Idee eines Beweises vergessen hat. Oder daß einem die im Manuskript am Schreibtisch formulierte und dort auch überzeugende Zeile nun an der Tafel auf einmal nicht mehr einleuchtet. Das Lehren von Mathematik stößt in diesem Falle mathematisches Forschen an. Damit muß nicht unbedingt etwas ganz Neues entstehen, doch kann das immerhin geschehen. Bei DEDEKIND war dies offensichtlich der Fall.

Schauen wir uns das Problem näher an. Für DEDEKIND war das Kernproblem einer Begründung der reellen Zahlen, daß er beim Beweis grundlegender Sätze der Analysis „Zuflucht zu geometrischen Evidenzen“ nehmen mußte. Betrachtet man seine Lösung des Problems, so wird deutlich, daß er folgende Aufgaben sah:

(1) Zunächst mußte der Kern der „Geometrischen Evidenzen“ herausgearbeitet werden. Für DEDEKIND war dies die „Stetigkeit der Geraden“.

(2) Der Begriff der „Stetigkeit der Geraden“ mußte begrifflich so präzisiert werden, daß er bei Beweisen verwendet werden konnte.

(3) Die Stetigkeit der Geraden war in die Sprache der Arithmetik als „Stetigkeit der reellen Zahlen“ zu übersetzen.

(4) Die „Stetigkeit der reellen Zahlen“ war zu beweisen.

Aus dem didaktischen Problem ist also ein mathematisches geworden, das nun auch mathematisch gelöst wird. DEDEKIND präzisiert den Begriff der „Stetigkeit der Geraden“. Für ihn liegt das „Wesen“ der Stetigkeit in der Eigenschaft, daß jeder „Schnitt“ der Geraden durch einen Punkt erzeugt werden kann.

> „Ich finde nun das Wesen der Stetigkeit ... in dem folgenden Prinzip:
>
> Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher die Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.“ (DEDEKIND 1872, 10)

Geniale Ideen sind meist „einfach“. Häufig wundert sich der Entdecker selbst darüber, daß man nicht eher darauf gekommen ist. DEDEKIND vermutet:

> „die meisten meiner Leser werden sehr enttäuscht sein, zu vernehmen, daß durch diese Trivialität das Geheimnis der Stetigkeit enthüllt sein soll.“ (DEDEKIND 1872, 10-11)

Die Übersetzung dieser Eigenschaft in die Sprache der Arithmetik stellte keine besondere Schwierigkeit dar. Der andere wichtige Schritt bestand darin, die Schnitte, die nicht durch rationale Zahlen erzeugt werden können, als *irrationale* Zahlen zu betrachten. Er erhält also die *reellen Zahlen* als Schnitte rationaler Zahlen. Die entscheidende Idee ist hier, das leistungsfähige *Werkzeug* „Schnitt“ als neuen *Gegenstand* „reelle Zahl“ zu betrachten. In der Menge der reellen Zahlen kann man wiederum Schnitte bilden. Nun kann DEDEKIND beweisen, daß jeder Schnitt in der Menge der reellen Zahlen durch eine reelle Zahl erzeugt wird, daß also die Menge der reellen Zahlen *vollständig* ist, wie wir heute sagen.

**3. Andere Begründungen der reellen Zahlen**

In der Folge wurden auch andere Wege zur Begründung der reellen Zahlen gegangen. GEORG CANTOR (1845-1918) benutzte *Fundamentalfolgen* („Fundamentalreihen", 1872) und PAUL BACHMANN (1837-1920) *Intervallschachtelungen* („Wertreihen", 1892). KARL WEIERSTRASS (1815-1897) hatte etwa seit 1860 in seinen Vorlesungen *konvergente Aggregate* verwendet, diese Begründung aber nicht veröffentlicht.

CANTOR diskutiert die verschiedenen Wege (Cantor, 1883, 183-190). Er betont bei den Schnitten den Vorteil, daß sie keine Äquivalenzklassenbildung erfordern, empfindet es aber als Nachteil, „daß die Zahlen in der Analysis sich *niemals* in der Form von ‚Schnitten' darbieten, in welche sie erst mit großer Kunst und Umständlichkeit gebracht werden müssen."(Cantor, 1883, 185)

Allerdings wurde im weiteren Verlauf der Grundlagendiskussion DEDEKINDS ganzer Ansatz „wissenschaftlich" in Frage gestellt. In einer Arbeit *Über den Zahlbegriff* aus dem Jahre 1900 stellt DAVID HILBERT (1862-1943) der bis dahin üblichen Begründung der Arithmetik die von ihm gegebene axiomatische Begründung der Geometrie gegenüber und fordert auch für die Arithmetik eine axiomatische Begründung.

> „Wenn wir in der Litteratur die zahlreichen Arbeiten über die Principien der Arithmetik und über die Axiome der Geometrie überschauen und mit einander vergleichen, so nehmen wir neben zahlreichen Analogien und Verwandtschaften dieser beiden Gegenstände doch hinsichtlich der Methode der Untersuchung eine Verschiedenheit wahr.
>
> Vergegenwärtigen wir uns zunächst die Art und Weise der Einführung des Zahlbegriffs. Ausgehend von dem Begriff der Zahl 1, denkt man sich gewöhnlich durch den Proceß des Zählens zunächst die weiteren ganzen ra-

tionalen positiven Zahlen 2, 3, 4 ... entstanden und ihre Rechnungsgesetze entwickelt; sodann gelangt man durch die Forderung der allgemeinen Ausführung der Subtraction zur negativen Zahl; man definirt ferner die gebrochene Zahl, etwa als ein Zahlenpaar ... , und schließlich die reelle Zahl als einen Schnitt oder eine Fundamentalreihe ... Wir können diese Methode der Einführung des Zahlbegriffs die *genetische Methode* nennen, weil der allgemeinste Begriff der reellen Zahl durch successive Erweiterung des einfachen Zahlbegriffes erzeugt wird.

Wesentlich anders verfährt man beim Aufbau der Geometrie. Hier pflegt man mit der Annahme der Existenz der sämtlichen Elemente zu beginnen, d.h. man setzt von vorne herein drei Systeme von Dingen, nämlich die Punkte, die Geraden und die Ebenen, und bringt sodann diese Elemente - wesentlich nach dem Vorbilde von Euklid - durch gewisse Axiome, nämlich die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Congruenz und der Stetigkeit, mit einander in Beziehung. Es besteht dann die notwendige Aufgabe, die Widerspruchslosigkeit und Vollständigkeit dieser Axiome zu zeigen ... Wir wollen das hier eingeschlagene Untersuchungsverfahren die *axiomatische Methode* nennen.

Wir werfen die Frage auf, ob wirklich die genetische Methode gerade für das Studium des Zahlbegriffs, und die axiomatische Methode für die Grundlagen der Geometrie die allein angemessene ist; auch scheint es von Interesse, beide Methoden gegenüberzustellen und zu untersuchen, welche Methode die vorteilhaftere ist, wenn es sich um die logische Untersuchung der Grundlagen der Mechanik und anderer physikalischer Disciplinen handelt.

Meine Meinung ist diese: Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axioma-

> tische Methode den Vorzug." (HILBERT 1900, 180-181)

HILBERT entwickelt dann in weitgehender Analogie zu dem Axiomensystem, das er in den *Grundlagen der Geometrie* angegeben hatte, ein Axiomensystem für die Menge der reellen Zahlen. Im wesentlichen fordert er einen vollständigen, archimedisch angeordneten Körper. Er zeigt also die Möglichkeit auf, die reellen Zahlen auch *axiomatisch* zu begründen.

Man versteht aber heute nicht so recht, weshalb HILBERT die von ihm so genannte „genetische Methode" ablehnt. Denn sie läßt sich schließlich ja auch axiomatisch begründen. So beginnt EDMUND LANDAU (1877-1938) in seinen *Grundlagen der Analysis* 1930 mit den Peano-Axiomen für die natürlichen Zahlen, konstruiert dann die positiven rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen von Paaren natürlicher Zahlen. Mit Schnitten rationaler Zahlen erhält er die positiven reellen Zahlen, die er dann mit Hilfe der negativen Zahlen zu den reellen erweitert. Der Erweiterungsprozeß wird mit den komplexen Zahlen abgeschlossen, die er mit Hilfe von Paaren reeller Zahlen gewinnt. Für LANDAU besteht der wesentliche Unterschied bei den beiden Begründungsweisen der reellen Zahlen in der Wahl des Axiomensystems. Er schreibt im „Vorwort für Kenner":

> „Bei der Wahl der Axiome kann man bekanntlich verschieden verfahren; ich erkläre es also nicht etwa für falsch, sondern für meinem persönlichen Standpunkt fast diametral entgegengesetzt, wenn man für reelle Zahlen zahlreiche der üblichen Rechengesetze und den Dedekindschen Hauptsatz 205 der folgenden Schrift als Axiome postuliert. Gewiß beweise ich nicht die Widerspruchslosigkeit der fünf Peanoschen Axiome (weil man es nämlich nicht kann); aber jedes derselben ist offenkundig von den vorigen unabhängig. Andrerseits drängt sich bei jener erweiterten Zahl von Axiomen sofort die Frage auf, ob sich nicht so manches darunter aus dem Vorangehenden beweisen (ein Schlauer würde hinzufügen: oder widerlegen) läßt; und da man

> seit vielen Jahrzehnten die Beweisbarkeit aller dieser Dinge kennt, ist es dem Lernenden wirklich zu gönnen, daß er die (durchweg ganz leichten) Beweise zu Beginn seines Studiums lernt." (LANDAU 1930, 17-18)

Während für HILBERT „zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhalts unserer Erkenntnis" nur die axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen infrage kommt, macht LANDAU klar, daß es sich bei einem Vergleich der beiden Zugänge nicht um einen Vergleich zwischen einem „wissenschaftlichen" und einem „didaktischen" Vorgehen handelt, in jedem Fall würde LANDAU mit der ihm eigenen *Strenge* Wissenschaftlichkeit für seine Darstellung in Anspruch nehmen. Er macht vielmehr deutlich, daß es sich um eine *didaktische Entscheidung* handelt, für die er *didaktische Argumente* angibt.

### 4. Entwicklung der Ansprüche

Betrachtet man die Entwicklung der Grundlagenproblematik, so wird zunächst deutlich, daß im Laufe der Entwicklung mit den erzielten Resultaten auch die *wissenschaftlichen Ansprüche* steigen.

Der Ausgangspunkt war ja eine Situation, in der eine bis dahin allgemein akzeptierte Begründung nun auf einmal als wissenschaftlich nicht mehr ausreichend angesehen wurde. Die gefundene Lösung stellte zwar einen Fortschritt dar. Doch konnte man an dem Ansatz von DEDEKIND kritisieren, daß der Beweis der Stetigkeit der Menge der reellen Zahlen in *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* sich auf Eigenschaften der rationalen Zahlen stützte, die ihrerseits einer Begründung bedurften. Hier setzte er die Eigenschaften eines *Zahlkörpers* voraus. Eine Begründung der natürlichen Zahlen lieferte er 1887 mit seiner Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?*

Die von DEDEKIND dabei benutzten Begriffe und Techniken über „Systeme" entsprachen weitgehend Vorstellungen von CANTOR, die er in seiner Mengenlehre begründete. Die Terminologie der Mengenlehre setzt sich durch und prägt damit auch die genetische Begründung der reellen Zahlen wie wir sie bei LANDAU finden.

Aber auch LANDAU mußte sich kritisieren lassen. Er schreibt im „Vorwort für den Kenner“:

> „Und nun passierte mir folgendes schreckliche Abenteuer. An Hand meines Kollegheftes las mein damaliger Assistent und lieber Kollege Privatdozent Dr. Grandjot (jetzt Professor an der Universität Santiago) über Grundlagen der Analysis und gab mir mein Manuskript mit dem Bemerken zurück, er hätte es für notwendig befunden, zu den Peonoschen Axiomen im weiteren Verlaufe andere hinzuzufügen, da der übliche Weg, den ich gegangen war, eine bestimmte Lücke aufweise.“ (LANDAU 1930, 19)

Die von GRANDJOT zusätzlich gewählten Axiome erwiesen sich zwar als beweisbar, doch sah sich LANDAU genötigt, bei den Aussagen über die Verknüpfungen eine Lücke zu schließen.

Auch nach Klärung dieser Frage wurde die Begründung der Zahlen weiter kritisch betrachtet. So löste z.B. die Formulierung des Induktionsaxioms tiefsinnige Untersuchungen in der Logik aus, die schließlich zur Unterscheidung der Prädikatenlogik 1. und 2. Stufe führten (s. Hermes, 1969). Langsam setzte sich die Einsicht durch, daß die Anforderungen an Strenge einem fortwährenden Wandel unterworfen sind.

DEDEKINDS Lösung des Begründungsproblems regte andere Lösungen an. Hinsichtlich der wissenschaftlichen Qualität der Begründungen lassen sich keine wesentlichen Unterschiede feststellen. Wenn CANTOR sie diskutiert, dann beziehen sich seine Betrachtungen auf *Praktikabilität* und *Verallgemeinerungsfähigkeit* der Konstruktionen. Bei dieser Diskussion kommen die von ihm favorisierten Fundamentalfolgen besonders gut weg, denn bei den Beweisen der Rechenregeln bereiten negative Zahlen keine Schwierigkeiten, und bei Existenzsätzen der Analysis sind Fundamentalfolgen ein natürliches Hilfsmittel. Schließlich kann man z.B. in der Funktionalanalysis und in der Algebra die Erweiterungskonstruktion mit Fundamentalfolgen leicht verallgemeinern. Mathematiker können sich nun bei der Darstellung einer mathematischen Theorie für die Begründung der reellen Zahlen auf unterschiedliche Verfahren stützen.

## 5. Didaktische Entscheidungsspielräume

Doch auch in didaktischer Sicht haben entscheidende Veränderungen stattgefunden. Wenn DEDEKIND nach seiner mathematischen Lösung des Begründungsproblems das alte Vorgehen *didaktisch* rechtfertigt, so hat sich die Situation insofern verändert, als jetzt zumindest ein *Entscheidungsspielraum* vorhanden ist. Es kann ja durchaus gerade aus didaktischen Gründen notwendig sein, in einer bestimmten Unterrichtssituation die Analysis mit Hilfe von Schnitten zu begründen. Die Entwicklung anderer Erweiterungsmethoden *vergrößerte* den didaktischen Entscheidungsspielraum.

Andererseits können Entscheidungen bei wissenschaftlichen Darstellungen durch ihre Vorbildwirkung unter Umständen den didaktischen Spielraum einengen. So orientierte man sich z.B. im Mathematikunterricht der DDR in den sechziger Jahren beim Aufbau der Bruchrechnung an dem in der Mathematik allgemein üblichen Erweiterungsverfahren mit Klassen äquivalenter Paare natürlicher Zahlen. In der Bundesrepublik ging man damals einen anderen Weg. Hier wurde es als Mangel empfunden, daß die in der Mathematik üblichen Begründungen des Bruchrechnens zu weit von den üblichen Vorstellungen, dem Erfahrungshintergrund der Schüler und ihren Bedürfnissen entfernt waren. So erschien es schwierig, eine Beziehung zwischen der Redewendung „zwei Drittel von“ und der Äquivalenzklasse [2;3] zu sehen. Natürlicher wirkte es, eine Beziehung zur Auffassung der Bruchzahlen als

Operatoren herzustellen, wie sie sich z.B. in dem Buch *Das Kontinuum* von HERMANN WEYL aus dem Jahre 1918 findet.

> „Die Brüche treten, im täglichen Leben und wo immer sie zur Messung addierbarer Größen dienen, als *Multiplikatoren* auf. Sprechen wir etwa von den Vektoren auf einer Geraden, so entspringt durch wiederholte Addition eines Vektors zu sich selbst (siehe Kap.I, §7) die *Vervielfältigung*; für jede natürliche Zahl $m$ bedeutet danach $m\boldsymbol{a}$ , das $m$ -fache des Vektors $\boldsymbol{a}$, wiederum einen bestimmten Vektor. Es gestattet diese Operation eine eindeutige Umkehrung, die *Teilung*: Ist $\boldsymbol{a}$ ein Vektor, $n$ eine natürliche Zahl, so gibt es einen und nur einen Vektor $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}}{n}$ , für welchen $n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ ist. Die Operation der Vervielfältigung kann man mit der Teilung kombinieren; so entsteht $\frac{m\boldsymbol{a}}{n}$, das $\frac{m}{n}$ - fache von $\boldsymbol{a}$." (WEYL 1918, 44-45)

Genau dieser Ansatz wurde in den sechziger Jahren zur Hintergrundtheorie für die Bruchrechnung (Braunfeld, 1968; Pickert, 1968). KIRSCH baute 1970 diesen Zugang in seinem Buch *Elementare Zahlen- und Größenbereiche* zu einer Begründung der Arithmetik mit Hilfe von Operatoren auf Größenbereichen aus.

Sowohl in der Forschung als auch in der Lehre kann bei der Grundlegung der reellen Zahlen zwischen verschiedenen Möglichkeiten gewählt werden. In beiden Bereichen drücken damit Entscheidungen subjektive *Wertungen* aus, die von Intentionen bestimmt sind. Mathematik wird damit sowohl im Hinblick auf die Forschung als auch im Hinblick auf die Lehre bewertet. Hinsichtlich der Qualität der Begründung solcher Bewertungen zeigen sich keine so großen Unterschiede, wie das Gegensatzpaar „wissenschaftlich" und „didaktisch" erwarten lassen würde. Dies läßt sich in Ansätzen bereits an der Grundlagendiskussion deutlich machen.

**6. Didaktische Wertungen**

Während die Urteile „wahr" oder „falsch" metamathematisch auf einem hohen Niveau begründet werden können, gibt es *Werturteile* wie „einfach", „elegant", „nützlich", „zweckmäßig" und „richtig", für die zwar Argumente angegeben werden können, bei denen aber auch „Standpunkte" eingenommen werden, die unter Umständen „diametral entgegengesetzt" sind, ohne daß der eine Vertreter die Position des anderen als falsch ansehen müßte.

So setzt sich z.B. LANDAU kritisch mit Kollegen auseinander, die in der Analysisvorlesung überhaupt auf eine Grundlegung der reellen Zahlen verzichten. Dabei wird deutlich, daß er hier unterschiedliche *pädagogische* Richtungen sieht:

> „Diese Schrift – wenn sie von ihm für passend befunden wird – soll jedem Kollegen der anderen pädagogischen Richtung, der also die Grundlagen nicht durchnimmt, wenigstens die Möglichkeit geben, auf eine Quelle zu verweisen, wo das Fehlende und nur das Fehlende in lückenlosem Zusammenhang dargestellt ist." (LANDAU 1930, 18-19)

Hier ist auch Raum für „Feindschaften". So schreibt LANDAU:

> „Und keiner jener meiner verehrten Freunde und Feinde würde bezweifelt haben, daß z.B. in meinen Vorlesungen sich alles Nötige findet." (LANDAU 1930, 19)

Wie problematisch freilich derartige Standpunkte sind, wird bei LANDAU selbst deutlich. Es ist eine gewisse Tragik, daß LANDAU trotz seines Bemühens um die Lernenden diesen erhebliche Schwierigkeiten bereitet, weil er ihnen niemals verrät was ihn jeweils zu den gegebenen Definitionen veranlaßt. Während er also selbstverständlich seine Sätze begründet, werden Definitionen einfach nur mitgeteilt. Lediglich das Funktionieren rechtfertigt sie im Nachhinein. Dabei hatte bereits 1916 ALFRED PRINGSHEIM (1850-1941) in seinen *Vorlesungen über Zahlenlehre* gezeigt, wie man den jeweils nächsten Erweiterungsschritt sinnvoll vorbereiten kann. Er beschreibt sein Vorgehen, das dem Erweiterungsschritt „den Charakter einer gewissen logischen Notwendigkeit verleiht", wie folgt:

> „Es werden nämlich allemal *neue Zahlzeichen* in solchem Umfange eingeführt, daß eine Teilmenge derselben lediglich neue Zeichen für *bereits vorhandene* Zahlen vorstellt. Für diese letzteren bestehen also schon ganz bestimmte, auf die Feststellung ihrer Sukzession und die Definition der Rechnungsoperationen bezügliche Regeln, die sich ohne weiteres in die neuen Bezeichnungen *um*schreiben lassen. Soll dann in der Handhabung des gesamten neu geschaffenen Zahlenvorrats nicht eine vollständige Verwirrung eintreten, so bleibt kaum etwas anderes übrig, als jene für einen Teil desselben bereits zu Recht bestehenden Regeln definitionsweise auf die Gesamtheit auszudehnen und diesen Schritt durch den Nachweis zu legitimieren, daß die so getroffenen Festsetzungen den an sie zu stellenden Anforderungen widerspruchslos genügen." (PRINGSHEIM 1916, VII-VIII)

Daß LANDAU seine Definitionen nicht motiviert, ist Konsequenz seines Stils, sich auf die Mitteilung von Axiomen, Definitionen, Sätzen und Beweisen zu beschränken. Dies wird für ihn zu einem didaktischen Prinzip, dem er Vorrang vor anderen didaktischen Prinzipien einräumt. Der „Landau-Stil" ist letztlich das Ergebnis einer „Prinzipienreiterei", die zu Lasten der Lernenden geht.

### 7. Mathematische Wertungen

Doch auch Entscheidungen im *wissenschaftlichen* Bereich sind stark persönlich geprägt. Im Grunde hatte bereits DEDEKIND eine mathematische Entscheidung zu treffen. Er hätte ja z.B. einfach nur die von ihm genannte Eigenschaft der „Annäherung einer veränderlichen Größe an einen Grenzwert" als Axiom zu wählen brauchen. Dem stand jedoch seine Auffassung entgegen: „Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden.“ (Dedekind, 1887, III) Andererseits war er bereit, in der Geometrie die Stetigkeit der Geraden als Axiom zu akzeptieren:

> „Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken.“ (DEDEKIND 1872, 11)

Es bleibt also unklar, weshalb er nicht auch für die Grundlegung der reellen Zahlen die Schnitteigenschaft als Axiom fordert, zumal er ja erst später in einer besonderen Schrift den genetischen Aufbau von den natürlichen zu den reellen Zahlen liefert.

Es bereitet uns aber heute auch Schwierigkeiten, HILBERTS Bevorzugung der axiomatischen Methode gegenüber der „genetischen“ Methode, die ja ebenfalls axiomatisch ist, nachzuvollziehen. HILBERT geht es dabei letztlich wohl um die Durchsetzung seines „Programms“.

In diesen Wertungen drücken sich Beziehungen zwischen Menschen und Mathematik aus. Man verläßt mit derartigen Wertungen und Entscheidungen die Mathematik und bewegt sich auf einer *Metaebene*, auf der Urteile keineswegs so sicher fundiert sind wie innerhalb der mathematischen Theorie. Hier ist durchaus Platz für Fragen des „Geschmacks“, so daß z.B. *Autoritäten* Maßstäbe setzen können, die der wissenschaftlichen Entwicklung förderlich, doch gelegentlich auch hinderlich sein können.

Betrachtet man diesen „Dschungel“ aus Sachzwängen, Handlungsspielräumen, persönlichen Standpunkten, Vorlieben und Interessen, so wirken Argumente häufig vorgeschoben. Ist es auf dieser Ebene überhaupt möglich, fundiert zu urteilen, zu argumentieren und zu entscheiden? Wir wollen das im folgenden zumindest für den Bereich der Lehre näher untersuchen, indem wir die Argumentationen didaktisch analysieren.

## 8. Die Entwicklung des Begründungsproblems in didaktischer Sicht

Bei den didaktischen Entscheidungen und Wertungen der Grundlagendiskussion klangen Argumente an, die sich von bestimmten *didaktischen Prinzipien* her deuten lassen. Im folgenden will ich versuchen, solche Bezüge herzustellen, um damit die Argumentationsstränge transparent zu machen. Damit will ich allerdings nicht behaupten, daß die Mathematiker ihre didaktischen Argumentationen *explizit* auf diese Prinzipien gestützt hätten.

Didaktische Prinzipien gründen in einer Jahrhunderte alten Lehrtradition der Mathematik. In ihnen drücken sich Erfahrungen, aber auch Zielvorstellungen aus. Sie werden wissenschaftlich analysiert und sind selbst ein Mittel zu wissenschaftlicher Analyse (Wittmann, 1975). Sie sind Grundlage vieler empirischer Untersuchungen, doch werden sie selbst immer wieder empirisch untersucht, um ihren Gültigkeitsbereich zu bestimmen.

Der von DEDEKIND beschriebene Rückgriff auf geometrische Evidenzen ließe sich mit dem *Prinzip der Anschaulichkeit* begründen. Die Verbindung arithmetischer und geometrischer Vorstellungen kann man mit dem *Integrationsprinzip* begründen. Umgekehrt folgt man beim bewußten Eliminieren geometrischer Vorstellungen aus der Arithmetik dem *Prinzip der Methodenreinheit*. Die Forderung nach einer Präzisierung des Begriffs der Stetigkeit läßt sich auf das *Prinzip der Strenge* zurückführen. Der schrittweise Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen zu den reellen Zahlen folgt dem *genetischen Prinzip*. Wenn HILBERT Gemeinsamkeiten zwischen den Grundlagen der Geometrie und den Grundlagen der Arithmetik betont, so kann man dies mit dem *Analogieprinzip* begründen. Wenn schließlich LANDAU seine Definitionen nicht rechtfertigt, dann verstößt er damit gegen das

Prinzip des *sinnvollen zielgerichteten Lehrens*.

In didaktischer Sicht stellt sich DEDEKINDS Problem als *Konflikt zwischen verschiedenen Prinzipien* dar. Einerseits sieht er, daß es aus Gründen der Verständlichkeit und des geringen Zeitaufwandes sinnvoll ist, sich nach dem Prinzip der Anschaulichkeit auf geometrische Evidenz zu stützen. Andererseits fühlt er sich den Prinzipien der Strenge und der Methodenreinheit verpflichtet und sucht daher nach einer arithmetischen Begründung. Diesen beiden Prinzipien gibt er für sich selbst zunächst den Vorrang. Dabei läßt er zu, daß man sich aus didaktischen Gründen auch anders entscheiden kann. Ein solcher Konflikt kann also durch das *Setzen von Prioritäten* gelöst werden.

Auch Konflikte zwischen unterschiedlichen didaktischen Auffassungen können häufig so gedeutet werden, daß die Prioritäten unterschiedlich gesetzt werden. Die verschiedenen Standpunkte von LANDAU und seinen „Feinden" kann man so sehen, daß LANDAU dem Prinzip der Strenge, seine Kollegen dem Prinzip der Anschaulichkeit Priorität einräumen.

Man kann natürlich auch versuchen, Konflikte zwischen didaktischen Prinzipien zu entschärfen, indem man den Unterricht in verschiedene Phasen gliedert, bei denen man unterschiedlichen Prinzipien Priorität einräumt. Während z.B. BACHMANN Irrationalzahlen noch ausschließlich arithmetisch formal mit seinen „Wertereihen" einführt, schlägt KONRAD KNOPP (1882-1957) zunächst bewußt eine Brücke zur Geometrie, indem er in der Einführungsphase „Intervallschachtelungen" betrachtet (Knopp, 1921). Zunächst folgt er hier dem Prinzip der Anschauung. Indem er dann in der folgenden Phase die Schlüsse arithmetisch formal durchführt, folgt er dem Prinzip der Methodenreinheit. Beide Prinzipien ordnen sich dem Integrationsprinzip unter.

Hatten wir zunächst die Lösung des didaktischen Problems von der Mathematik her gesehen, so wird nun deutlich, daß dies für die eigentlichen didaktischen Entscheidungen und ihre Begründungen nicht ausreicht. Denn diese Entscheidungen beziehen sich eben nicht nur auf den Gegenstand allein, sondern auf die Beziehung zwischen Mensch und Gegenstand, genauer auf die Beziehung *Lehrer – Lernende – Lerninhalt*, die traditionell als *didaktisches Dreieck* ausgedrückt wird. Sehr deutlich tritt dies bei LANDAU in Erscheinung. Er als *Autor* (als Lehrender) nimmt im Hinblick auf seine *Leser* (als Lernende) in Bezug auf die Begründung der *reellen Zahlen* (als Lerninhalt) eine didaktische Position ein (als Beziehung zwischen Lehrer und Lehrinhalt), um seinen Lesern ein Verständnis der reellen Zahlen (als Beziehung zwischen Lernendem und Lerninhalt) zu vermitteln. Die Begründungen, die LANDAU für seine didaktische Entscheidung angibt, beziehen sich in erster Linie auf die *Lernenden*. Er spricht sie in einem eigenen Vorwort direkt an und versucht, sie für sein Vorhaben zu gewinnen. Im „Vorwort für den Kenner" macht er deutlich, daß es ihm im Interesse der Studienanfänger um Einfachheit, Durchsichtigkeit und Überschaubarkeit der Darstellung geht.

## 9. Die reellen Zahlen in der Analysis-Vorlesung

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen über die Grundlagen der reellen Zahlen war für DEDEKIND seine Analysis-Vorlesung. Wenn er auch zugestand, daß man aus didaktischen Gründen bei einer anschaulichen Begründung bleiben könne, so hatten die Fortschritte bei der Begründung der reellen Zahlen doch Einfluß auf die Analysis-Vorlesungen. Gegen Ende des vorigen Jahrhunderts entspann sich eine heftige Auseinandersetzung darüber, ob diese Vorlesungen mit einer Grundlegung der reellen Zahlen beginnen sollten. PRINGSHEIM sprach sich in einem Vortrag 1897 auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Braunschweig *Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht* dafür aus. Er prophezeite:

> „Nach meiner Überzeugung ist die Zeit nicht mehr fern, wo die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen für so ‚evident und notwendig' gelten

> werden, daß man eine Einführung in die Analysis ohne dieses Hülfsmittel für schlechterdings unmöglich ansehen wird.“ (PRINGSHEIM 1899, 83)

FELIX KLEIN (1849-1925) empfand dies als „einen unmittelbaren Angriff gegen die von mir vertretenen, auf Geltendmachung der geometrischen Anschauung gerichteten Tendenzen“ und reagierte im folgenden Jahr scharf, indem er feststellte: „...ich will aussprechen, daß ich jeden Mathematiker herzlich bedaure, dem die Natur kein lebhaftes Raumvorstellungsvermögen verliehen hat!“ (Klein, 1899, 137). Er verteidigte seine Auffassung, die er 1895 in dem Vortrag „Über Arithmetisierung der Mathematik“ geäußert hatte und die von PRINGSHEIM kritisiert worden war:

> „Das soll mich nicht hindern auszusprechen, daß jedenfalls zwei Kategorien mathematischer Vorlesungen notwendig von der Anschauung ihren Ausgangspunkt nehmen sollten. Das sind erstlich die Elementarvorlesungen, welche den Anfänger überhaupt in die höhere Mathematik einleiten – wird doch der Lernende naturgemäß im kleinen immer denselben Entwickelungsgang durchlaufen, den die Wissenschaft im großen gegangen ist. Das sind ferner diejenigen Vorlesungen, deren Zuhörer von vornherein darauf angewiesen sind, sehr wesentlich mit der Anschauung zu arbeiten, also die Vorlesungen für Naturforscher und Ingenieure.“ (KLEIN 1899, 127)

PRINGSHEIM reagiert mit dem Hinweis:

> „Sollen wir in jenen einführenden Vorlesungen über höhere Analysis schon versuchen, unentbehrliche Fundamentalbegriffe mit angemessener Gründlichkeit zu erörtern, oder uns statt dessen mit gewissen alt hergebrachten Surrogaten begnügen? Die Beantwortung dieser Frage wird aber immer bis zu einem gewissen Grade vom individuellen Geschmack, von allerhand Erfahrungen und von Nebenumständen verschiedener Art abhängen. Mir persönlich will es scheinen, daß jener angeblich leichtere Weg sich gar bald als ein

> recht dornenvoller Umweg erweist. Und das bekannte Sprichwort: 'Wer billig kauft, kauft teuer', halte ich, wie zumeist im gewöhnlichen Leben , so auch hier für zutreffend." (PRINGSHEIM 1899, 142)

Als LANDAU seine Grundlagen der Analysis veröffentlicht, ist man sich weitgehend einig, „daß der Studierende bereits im ersten Semester lernt, auf welchen als Axiomen angenommenen Grundtatsachen sich lückenlos die Analysis aufbaut und wie dieser Aufbau begonnen werden kann." (LANDAU 1930, 17)

Es schälen sich dabei drei Vorgehensweisen heraus:

(1) Man beginnt bei den natürlichen Zahlen und baut schrittweise das Zahlensystem bis zu den reellen oder gar bis zu den komplexen Zahlen auf.

(2) Man beginnt mit einem Axiomensystem für die rationalen Zahlen und konstruiert dann die reellen.

(3) Man beginnt mit einem Axiomensystem der reellen Zahlen.

Heute hat sich der dritte, also der von HILBERT vorgeschlagene, Weg als der am wenigsten aufwendige weitgehend durchgesetzt. Doch bereitet eben dieser axiomatische Beginn vielen Studierenden beim Übergang von der Schule zur Hochschule erhebliche Schwierigkeiten. Gerade das wollte KLEIN vermeiden. Er beschreibt sein Anliegen wie folgt:

> „Um zu resumiren: ich strebe in meinen Elementarvorlesungen vor allem dahin, meinen Zuhörern Interesse und Verständnis für die Fragestellungen und den Sinn und Zweck der mathematischen Behandlung beizubringen." (KLEIN 1899, 132)

Problematisch ist nach wie vor die Beziehung der Analysisvorlesung zum Analysis-Unterricht der höheren Schule. LANDAU hatte in seinem Vorwort für den Lernenden provozierend geschrieben:

> „Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt.“ (LANDAU 1930, 15)

Er setzt dann allerdings fort:

> „Bitte denke bei allem an die entsprechenden Stellen des Schulpensums; denn Du hast es doch nicht vergessen.“ (LANDAU 1930, 16)

In didaktischer Sicht kann man ein angemessenes Verständnis der reellen Zahlen ausschließlich auf der Grundlage eines Axiomensystems nicht gewinnen. Es ist also naiv, wenn Hochschullehrer wie LANDAU behaupten:

> „Ich setze nur logisches Denken und die deutsche Sprache als bekannt voraus; nichts aus der Schulmathematik oder gar der höheren Mathematik.“ (LANDAU 1930, 15)

Das ist zwar im Sinne eines wissenschaftlichen Aufbaus richtig, dabei übersieht man jedoch, daß grundlegende Begriffe wie Zahl oder Funktion nur in *langfristigen Lernprozessen* verstanden werden (VOLLRATH 1995).

Tatsächlich läßt sich eine axiomatische Grundlegung der Analysis mit den reellen Zahlen durchaus als Abschnitt eines langfristigen Lernprozesses rechtfertigen: Beginnend mit den natürlichen Zahlen in der Grundschule lernen die Schüler in einem Erweiterungsprozeß schrittweise immer neue Zahlen kennen. So werden in der 6. Jahrgangsstufe die Bruchzahlen, in der 7. Jahrgangsstufe die rationalen und in der 9. Jahrgangsstufe die reellen Zahlen eingeführt. Im wesentlichen folgt dieses *Lernen durch Erweiterung* dem schrittweisen Aufbau (1). Allerdings entwickelt sich dabei zugleich die Art der Betrachtungsweise. In einem *Lernen in Stufen* wird ausgehend von einem intuitiven Verständnis in der Grundschule schließlich ein formales Verständnis in der Sekundarstufe II erreicht. Wenn dann die Analysisvorlesung mit einer Axiomatik der reellen Zahlen gemäß (3) beginnt, so kann man dies als Bemühen ansehen, durch Zusammenfassung und Vertiefung des in der

Schule Gelernten ein kritisches Verständnis der reellen Zahlen zu erzielen.

Dazu ist es jedoch nicht ausreichend, den Studierenden zu Beginn der Analysis-Vorlesung einfach ein Axiomensystem der reellen Zahlen mitzuteilen. Sie werden nur dann den Sinn eines solchen Axiomensystems begreifen, wenn sie es als Ergebnis eines Präzisierungsprozesses erfahren. Indem man am Anfang bewußt bei den Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht anknüpft, diese positiv aufgreift, zugleich aber einer kritischen Analyse unterzieht, kann man den Studierenden einen gültigen Eindruck dieses Prozesses in der Entwicklung der Mathematik vermitteln. Das meinte wohl KLEIN mit der Forderung, daß die Studierenden „im kleinen immer denselben Entwickelungsgang durchlaufen, den die Wissenschaft im großen gegangen ist." (Klein, 1899, 127) PRINGSHEIM bemerkte dazu ironisch:

> „Und wie die heutigen Ärzte nicht mehr der Ansicht sind, daß jeder gewisse Kinderkrankheiten durchmachen müsse, und man demgemäß bestrebt ist, dieselben durch eine verständige Prophylaxe so viel als möglich fern zu halten, so sollten wir doch wohl auch darauf ausgehen, dem Anfänger die Kinderkrankheiten, welche die Wissenschaft bei ihrer Entwickelung durchgemacht hat, möglichst zu ersparen." (PRINGSHEIM 1899, 74)

Er hatte damit wohl die Lacher auf seiner Seite. Doch KLEIN ließ sich in seiner pädagogischen Überzeugung nicht beirren. Die Einschätzung von FABER, daß PRINGSHEIM das leichtere Spiel hatte, „weil er die bessere Sache vertrat" (FABER 1959, 33), kann ich nicht nachvollziehen.

Schließlich erscheint es mir für Studierende des Lehramtes notwendig, daß sie im Studium auch eine wissenschaftliche Begründung gemäß (1) kennenlernen. So erhalten sie eine mathematische Hintergrundstheorie für ihr späteres Unterrichten. Eine solche Vorlesung sollte sich nicht nur auf jeweils ein Verfahren beschränken, sondern unterschiedliche Wege aufweisen und diese im Hinblick auf den Unterricht werten (z.B. ARTMANN 1983).

### 10. Beziehungen zwischen dem Didaktischen und dem Wissenschaftlichen

Aus einem didaktischen Problem wurde ein mathematisches, das mathematisch gelöst wurde. Diese Lösung regte weitere mathematische Lösungen an. All dies hatte Konsequenzen für die Lehre. Die Entwicklung der Begründung der reellen Zahlen zeigt eine lebendige Beziehung zwischen Forschung und Lehre, zwischen mathematischen und didaktischen Sichtweisen. Dies wird von den Mathematikern im eigenen Denken, aber auch im Gedankenaustausch erfahren. Im Zuge einer Differenzierung der Wissenschaften ist Mathematikdidaktik zu einem eigenen Forschungsgebiet geworden. Damit besteht zwar die Gefahr einer Isolierung der Betrachtungsweisen. Es bietet sich aber auch die Chance zu einem fundierten Dialog zwischen Mathematikern und Didaktikern, der sich letztlich zum Wohl der Lernenden auswirkt.

**Anmerkung**

GÜNTER PICKERT hat den Dialog zwischen Mathematikern und Didaktikern mit seinen Ideen, vor allem aber mit dem Ausdruck seiner Wertschätzung didaktischer Betrachtungen ungemein gefördert. Dieser Beitrag will ihm Dank und Hochachtung ausdrücken.

## Literatur

Artmann, B.: Der Zahlbegriff. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1983

Bachmann, P.: Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig: Teubner 1892

Braunfeld, P.: Ein neuer Zugang zur Bruchrechnung vom Standpunkt der Operatoren. Beiträge zum Mathematikunterricht 1968, 209-217

Cantor, G.: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Mathematische Annalen 21 (1883), 545-586

Cantor, G.: Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Mathematische Annalen 5 (1871), 123-132

Dedekind, R.: Stetigkeit und Irrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg 1872

Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen ? Braunschweig: Vieweg 1887

Faber, G.: Mathematik. In: Geist und Gestalt. Biographische Beiträge zur Geschichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd.2, München: Beck 1959, 1-45

Hermes, H.: Einführung in die mathematische Logik. Stuttgart: Teubner 1969

Hilbert, D.: Über den Zahlbegriff. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8 (1900), 180-184

Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Teubner 1899

Kirsch, A.: Elementare Zahlen- und Größenbereiche. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1970

Klein, F.: Über Arithmetisirung der Mathematik. Göttinger Nachrichten (1895), 82-91

Klein, F.: Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 6 (1899), 126-138

Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin: Springer 1921

Landau, E.: Grundlagen der Analysis. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1930

Pickert, G .: Die Bruchrechnung als Operieren mit Abbildungen. Mathematisch-Physikalische Semesterberichte XV (1968), 32-47

Pringsheim, A.: Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 6 (1899), 73-83

Pringsheim, A.: Zur Frage der Universitäts-Vorlesungen über Infinitesimalrechnung. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 7 (1899), 138-145

Pringsheim, A.: Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. I. Reelle Zahlen und Zahlenfolgen, Leipzig: Teubner 1916

Vollrath, H.-J.: Modelle langfristigen Lernens von Begriffen im Mathematikunterricht. Mathematik in der Schule 33 (1995), 460-472

Weyl, H.: Das Kontinuum. Leipzig: Veit 1918

Wittmann, E.: Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik. Beiträge zum Mathematikunterricht 1975, Hannover 1975, 226-235