68. Strukturelles Denken im Algebraunterricht

Der Mathematikunterricht 40, H. 4 (1994), S. 5-25.

1. Positionen

Zu Beginn unseres Jahrhunderts begann sich in der algebraischen Forschung ein grundlegender Wandel zu vollziehen: das Interesse verlagerte sich von den Gleichungen zu den Strukturen. Diese neue Sicht setzte sich 30 Jahre später mit dem 1930 erschienenen Lehrbuch „Moderne Algebra" von B.L. VAN DER WAERDEN in der Wissenschaft durch. Weitere 30 Jahre später zeigte dieser Wandel auch im Mathematikunterricht seine Spuren: Algebraische Strukturen wurden in der Reformbewegung der sechziger Jahre zu einem wichtigen Anliegen von Reformen. Es gab jedoch auch entschiedene Ablehnung. Es ist reizvoll, aus dem Abstand von weiteren 30 Jahren zwei kontroverse Positionen aus der Reformdiskussion einander gegenüberzustellen und zu werten.

Den Reformern, die empfehlen, Strukturbegriffe wie Gruppe, Ring und Körper im Mathematikunterricht zu behandeln, setzt A.I. WITTENBERG 1963 in „Bildung und Mathematik" massiven Widerstand entgegen, er schreibt:

> „In der höheren Mathematik werden jene Begriffe und Methoden nicht um ihrer selbst willen eingeführt, sondern weil sie mathematisch etwas leisten - sie dienen dazu, neuartige mathematische Erkenntnisse zu erschließen. Wäre dem nicht so, so würde sich kein schöpferischer Mathematiker dazu hergeben, auch nur einen Gedanken an sie zu verschwenden. Am Gymnasium leisten sie aber charakteristischerweise nichts. Sie bleiben Selbstzweck - und damit Unsinn". (WITTENBERG 1963, S. 55).

Nicht weniger emotional reagiert H.-G. STEINER:

> „Dies ist eine rein dogmatisch vorgetragene Behauptung, für deren Gültigkeit uns WITTENBERG bisher den Nachweis schuldig geblieben ist. Ihr stellen wir strikt die These entgegen, daß die neue mathematische Denk-

> weise und moderne Theorien, Begriffe und Methoden in einem gewissen Ausmaß charakteristischerweise gerade am Gymnasium etwas leisten.“ (STEINER 1965 , S. 194).

Nachdem heute die Strukturbegriffe der Algebra wie Gruppe, Ring und Körper weitgehend aus dem Mathematikunterricht des Gymnasiums verschwunden sind, kann man die These von STEINER als empirisch widerlegt ansehen. Vielleicht hätte STEINER vorsichtiger formulieren sollen „leisten können“. Hat damit Wittenberg Recht bekommen? Vordergründig sicherlich. Doch wäre er mit dem gegenwärtigen Zustand des Mathematikunterrichts am Gymnasium wohl auch nicht einverstanden. Beide Mathematikdidaktiker waren sich weitgehend einig, daß der Mathematikunterricht am Gymnasium ein gültiges Bild von Mathematik vermitteln müsse. Doch während bei STEINER Strukturbegriffe für das moderne mathematische Denken charakteristisch sind, die deshalb auch im Gymnasium zu vermitteln sind, kritisiert WITTENBERG, daß damit dem Mathematikunterricht nur ein „Mäntelchen höherer Mathematik“ umgehängt wird, um ihm einen „modernen“ Anstrich zu geben. Seine Unterrichtsvorschläge beziehen sich überwiegend auf klassische elementare Inhalte.

Offensichtlich gehen beide von einer unterschiedlichen Wertung der Strukturbegriffe für die Mathematik aus. Während für STEINER das Denken in Strukturen zu einem grundlegenden Wandel des mathematischen Denkens führt, das schließlich die gesamte moderne Mathematik prägt, sieht WITTENBERG Strukturbegriffe eher in der organischen Entwicklung der Mathematik als Bestandteil bestimmter Gebiete der höheren Mathematik, in denen sie erst ihre Kraft entfalten.

Wir wollen diese beiden unterschiedlichen Positionen im Lichte der historischen Entwicklung kritisch betrachten und versuchen, aus unseren Überlegungen didaktische Folgerungen zu ziehen.

2. Algebra im Wandel

Auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Prag 1929 hielt HELMUT HASSE (1898-1979) einen Vortrag über das Thema: „Die moderne algebraische Methode“. Dieser ist sehr aufschlußreich für die Beurteilung des Wandels in der Algebra, denn er macht in einer Gegenüberstellung der „alten“ und der „modernen“ Auffassung den Wandel, seine Motive, Ziele und Wurzeln deutlich.

> „Der Vortrag, den ich Ihnen heute zu Beginn dieser Tagung halte, entspringt einer Anregung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Die Absicht dabei ist, für die moderne Algebra zu werben, und zwar weniger unter ihren Anhängern – denen werde ich nichts Neues sagen, sondern im Gegenteil ihnen aus dem Herzen zu sprechen versuchen – als vielmehr unter den ihr Fernstehenden. Als Endziel einer solchen Werbung sehe ich es nicht an, irgend jemanden von seinem bisherigen Interessengebiet abzuziehen und der Algebra zuzuführen. Vielmehr betrachte ich es als meine Aufgabe, wohlwollendes Verständnis für die moderne Algebra zu erzielen, und ihren Methoden, soweit sie von allgemeiner Bedeutung sind, dazu zu verhelfen, sich durchzusetzen und Allgemeingut der heutigen Mathematiker-Generation zu werden.“ (HASSE 1930, S. 22)

HASSE war mit 27 Jahren in Halle ordentlicher Professor geworden. Von Haus aus Zahlentheoretiker, hatte er sich der modernen Algebra verschrieben. Davon legte seine „Höhere Algebra“ Zeugnis ab. Die beiden Göschenbände erschienen 1926 und 1927. RICHARD BRAUER (1901-1977) urteilt über das Werk:

> „Das überaus sorgfältig aufgebaute Buch stellt eine leicht verständlich geschriebene Einführung in die höhere Algebra dar, bei der der moderne abstrakte Standpunkt konsequent durchgeführt wird; es ist das erstemal, daß dies in einem Lehrbuch geschieht.“ (BRAUER 1928, S. 83).

HASSE ist also ausgewiesener Vertreter der modernen Algebra, der für eine neue „Generation“ von Algebraikern spricht, was ja in der Einleitung zu seinem Vortrag anklingt. Der Prager Vortrag soll eine „Werbung“ für die „moderne Algebra“ sein. In der Rückschau wirkt das verharmlosend. Denn dem Druck der neuen Sicht konnte sich auf Dauer kein Mathematiker entziehen, der in der Algebra ernstzunehmende Beiträge leisten wollte.

In seinem Vortrag stellt nun HASSE die unterschiedlichen Auffassungen einander gegenüber:

> „1. Früher betrieb man die Algebra, wie überhaupt jede rechnende mathematische Disziplin im Bereich der reellen oder wo nötig der komplexen Zahlen. Heute pflegt man abstrakte Körper oder auch nur Integritätsbereiche, Ringe zugrunde zu legen. Was hat es damit auf sich? Sachlich ist es doch gar kein Unterschied, ob man etwa bei der Herleitung der Sätze über lineare Gleichungssysteme sich die Koeffizienten und Variablen als komplexe Zahlen oder als abstrakte Körperelemente vorstellt. Weshalb legt man also dennoch Wert darauf, in abstrakten Bereichen zu operieren? Das hat zwei Gründe.
>
> Einmal sucht man die größtmögliche Allgemeinheit dem Inhalte nach. Je allgemeiner die Voraussetzungen sind, von denen man beim Aufbau einer Theorie ausgeht, um so mehr umspannt diese Theorie, um so weiter reicht ihr Anwendungsgebiet. ...
>
> Die Allgemeinheit dem Inhalt nach, die man durch Zugrundelegung der abstrakten Bereiche erreicht, läuft nun Hand in Hand mit einer Beschränkung der Hilfsmittel. Man erkennt das am deutlichsten wenn man sich vergegenwärtigt, daß die Begriffe Körper, Integritätsbereich, Ring durch Abstraktion aus den elementaren Rechenoperationen entspringen. Wenn es einerseits sehr allgemein klingt, wenn eine Theorie mit den Worten beginnt: ‚Gegeben sei ein beliebiger abstrakter Körper‘, so besagt dies doch andererseits nichts anderes, als den Vorsatz: ‚Im folgenden soll einzig und allein von den vier elementaren Rechenoperationen Gebrauch gemacht werden.‘
>
> Damit bin ich bei dem zweiten Zweck, den man mit der Zugrundelegung

der abstrakten Bereiche in der modernen Algebra verfolgt, nämlich einer größtmöglichen Beschränkung der Hilfsmittel. Dieser zweite Gesichtspunkt ist vielleicht noch bedeutungsvoller, charakteristischer und folgenreicher als der ersterwähnte. In ihm liegt der fundamentale Unterschied der modernen gegen die ältere Auffassung der Algebra begründet. Ich erläutere das an der Theorie der Auflösung von Gleichungen, die ja in der historischen Entwicklung den Mittelpunkt der Algebra ausmacht. Gemeint sind dabei solche Gleichungen, die mittels der elementaren Rechenoperationen gebildet sind. Die dieser Aufgabe adäquaten Hilfsmittel sind einzig und allein die rationalen Rechenoperationen.

Der ältere Aufbau der Lehre von den algebraischen Gleichungen überschreitet den Bereich dieser natürlichen Hilfsmittel. Zur Bewerkstelligung der Auflösung der algebraischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten steigt sie in den Bereich der komplexen Zahlen hinauf und zieht für den Beweis des sogenannten Fundamentalsatzes der Algebra Hilfsmittel aus der Analysis heran. Wie die Konstruktion der komplexen Zahlen von den rationalen aus auf Dedekindscher oder Cantorscher Grundlage erkennen läßt, kommt hierbei als wesentlich neuartiger Begriff der Limesbegriff zu den elementaren Rechenoperationen hinzu.

Wenn es nun einen Aufbau der Theorie der algebraischen Gleichungen gibt, der frei vom Limesbegriff einzig und allein das natürliche Hilfsmittel der elementaren Rechenoperationen benutzt, so muß diesem Aufbau der Vorzug gegeben werden.“ (HASSE 1930, S.22-23)

Zwar betont die moderne Algebra die formalen Methoden, indem sie auf Axiomen aufbaut und ein hohes Maß an Allgemeinheit anstrebt. HASSE begegnet aber möglichen Einwänden von Mathematikern der älteren Auffassung:

„Sie versteht darunter nicht, wie ihr ihre Gegner vorwerfen, ein inhaltleeres Spiel mit Formeln, sondern eine durch präzise logische oder mathematische

> Formeln vollzogene Abgrenzung ihres begrifflichen Inhalts gegenüber unpräzisen, mit exakt-logischen Mitteln nicht faßbaren Auswüchsen.“ (Hasse 1930, S.25)

Er geht dann auf die Änderungen der Fragestellungen ein:

> „2. Es ist verständlich, daß mit der geschilderten modernen Auffassung der Algebra auch eine Verschiebung der Interessen gegenüber der älteren Auffassung verbunden ist. Machen wir uns das wieder an der algebraischen Gleichungstheorie klar!
>
> Bei der älteren Auffassung handelt es sich da um die Auflösung der Gleichungen im Sinne einer handgreiflichen, sei es formelmäßigen, sei es numerischen Bestimmung der Wurzeln. Neben dem sog. Fundamentalsatz der Algebra, der nur die abstrakte Existenz der Wurzeln liefert, werden mit analytischen Hilfsmitteln Sätze wie das Sturmsche Theorem über die Lage der Wurzeln bewiesen...
>
> Ganz anders bei der modernen Einstellung. Hier wird das Auflösungsproblem als durch die zu Beginn der Theorie erfolgte Konstruktion der Wurzeln gelöst angesehen... Es liegt dann also keinerlei Anlaß vor, sich weiter mit dem Problem der handgreiflichen Bestimmung der Wurzeln zu befassen, Sätze wie das Sturmsche Theorem verlieren zunächst ebenso das Interesse, wie der sog. Fundamentalsatz der Algebra, und die Galoissche Theorie wird nicht mehr als Auflösungsverfahren angesehen. Die moderne Auffassung gibt vielmehr der Galoisschen Theorie ein Gewand, das ihren ausschließlich theoretischen Charakter in Evidenz setzt. Für sie ist die Galoissche Theorie die Strukturuntersuchung der algebraischen Erweiterungskörper, und das Studium der Resolventen gibt näheren Einblick in die strukturellen Zusammenhänge der Bausteine dieser Körper.“ (HASSE 1930, S.25-26)

Was schließlich die Beziehung der Algebra zu den übrigen Gebieten der Mathematik anbelangt, äußert sich HASSE wie folgt:

> „Wie schon angedeutet, ist die moderne algebraische Methode keineswegs auf den klassischen Bestand der Algebra beschränkt, sondern greift darüber hinaus und durchsetzt eigentlich die ganze Mathematik. Überall kann man ihr Prinzip anwenden, die einfachsten begrifflichen Grundlagen für eine vorliegende Theorie aufzusuchen und dadurch vereinheitlichend und systematisierend zu wirken, von der Logik angefangen, in der man schon seit längerer Zeit von einer Algebra der Logik redet, über die Mengenlehre, die Grundlagentheorie, die Zahlentheorie, die synthetische und die analytische Geometrie, die Topologie, die Integralgleichungstheorie, die Variationsrechnung bis zur Quantentheorie, die neuerdings durch das Eingreifen der Theorie der unendlichen Matrizen und der abstrakten Operatoren in algebraisches Fahrwasser geraten ist.“ (HASSE 1930, S.33-34)

HASSE beschreibt also in seinem Vortrag einen grundlegenden Wandel in der Algebra. Er stellt die neue Auffassung über Algebra der alten gegenüber. Dabei wird deutlich, daß keine kontinuierliche Entwicklung stattfindet, sondern daß ein Bruch entsteht.

3. Der Wandel als Paradigmenwechsel

Nach diesen Ausführungen ist klar, daß der Wandel in der Algebra im Sinne von KUHN (1973) als „Paradigmenwechsel“ gedeutet werden kann. Für ihn entsteht Fortschritt in der Wissenschaft nicht in einem kontinuierlichen Prozeß, sondern als Ergebnis wissenschaftlicher „Revolutionen“.

Wichtige Kennzeichen eines Paradigmenwechsels sind:

- ein Wechsel anerkannter Forschungsmethoden,
- eine Änderung für wichtig gehaltener Inhalte und Probleme,
- die Einbeziehung des Bisherigen in das Neue nach einer Umwandlung.

Kennzeichnend für die neue Methode der Algebra sind für HASSE das Streben nach größtmöglicher Allgemeinheit, das Bemühen um eine größtmögliche Beschränkung der Hilfsmittel, die Forderung nach einem axiomatischen Aufbau der Theorie.

Es ändern sich für wichtig gehaltene Inhalte und Probleme: Im Vordergrund des Interesses stehen nicht mehr konkrete Bereiche wie die ganzen, die rationalen, die reellen oder die komplexen Zahlen, sondern z.B. Gruppen, Ringe, Integritätsbereiche und Körper. Interessierte man sich vorher für die Lage, für die formelmäßige oder numerische Bestimmung von Wurzeln, so interessieren nun Konstruktionen von Erweiterungskörpern, in denen bestimmte Gleichungstypen lösbar sind.

Das Streben nach Methodenreinheit zeigt sich z.B. im Ausschluß von Grenzwert-Überlegungen. Damit werden früher wichtige Sätze wie der Satz von Sturm oder der Satz von Boudan-Fourier nicht mehr zur Algebra gerechnet.

Diese Änderungen zeigen sich auch in der Umwertung von Inhalten. So wird nicht mehr vom „Fundamentalsatz der Algebra", sondern vom „sogenannten Fundamentalsatz der Algebra" gesprochen, der nun eher als ein Satz der komplexen Analysis gesehen wird.

Wichtige Gebiete der klassischen Algebra bleiben zwar erhalten, werden jedoch unter dem Einfluß der neuen Methoden und Inhalte neu akzentuiert. Hasse weist auf die Galois-Theorie hin, bei der aus einer Theorie für das Auflösen von Gleichungen eine Theorie über die Struktur der Erweiterungskörper und ihre Bausteine wird.

Allerdings zeigt sich in dem Vortrag auch bereits die Tendenz, den strukturorientierten Aufbau der Algebra als eine Sichtweise zu betrachten, die für die gesamte moderne Mathematik typisch ist. Das erreicht mit N. BOURBAKI (1961) in den „Éléments de Mathématique" (ab 1939) den Höhepunkt, in denen er die gesamte Mathematik von „Mutterstrukturen" her darstellen will.

Die zunächst propagierte Methodenreinheit erweist sich bald als Korsett.

„Mischstrukturen" wie topologische Gruppen, geordnete Ringe und bewertete Körper eröffnen interessante, anwendungsfähige Bereiche mit neuen fruchtbaren Problemstellungen. Schließlich ist vor allem durch die diskrete Mathematik das Interesse am Konkreten in der Mathematik wieder erwacht.

Aber noch einmal zurück zum Paradigmenwechsel der Algebra in den dreißiger Jahren. Betrachten wir die Initiatoren dieses Paradigmenwechsels. Ein Paradigmenwechsel wird nach KUHN von Gruppen von Wissenschaftlern vollzogen, die

- genügend neue reizvolle Fragestellungen für eine neue Gruppe von Fachleuten bieten

  und

- Wissenschaftler gewinnen, die bisher ihre Wissenschaft auf andere Art betrieben haben.

Die Anlage dieses Vortrages macht deutlich, daß HASSE also dazu beitragen wollte, einen solchen Paradigmenwechsel herbeizuführen.

Er hebt in seinem Vortrag eine Reihe von Arbeiten hervor, die ganz wesentlich die moderne Algebra angeregt haben. In Übereinstimmung mit den meisten Algebraikern, die der modernen Richtung angehören, nennt er als Schlüsselarbeit: ERNST STEINITZ, *Algebraische Theorie der Körper*, aus dem Jahre 1910.

Zusammen mit REINHOLD BAER (1902-1979) bringt er 1930 eine kommentierte Ausgabe dieser Arbeit als Buch heraus (STEINITZ 1930). In den neuen Lehrbüchern wird stets der Einfluß dieser Arbeit angegeben und im Text auch sichtbar.

ERNST STEINITZ (1871-1928) selbst beruft sich in dieser Arbeit auf HEINRICH WEBER, *Die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungslehre*, in der der Gruppenbegriff allgemein formuliert wird (WEBER 1893).

Ebenfalls durchweg hervorgehoben wird der starke Einfluß von EMMY NOE-

THER. Hier ist vor allem die Arbeit zu nennen: *Idealtheorie in Ringbereichen*, (NOETHER 1921).

EMMY NOETHER ihrerseits verweist auf die große Bedeutung der Arbeiten von RICHARD DEDEKIND.

Für eine Würdigung dieser Arbeiten sei auf VAN DER WAERDEN (1975) und SCHOLZ (1990) verwiesen.

Nach KUHN wird ein Paradigmenwechsel häufig durch eine neue Generation von Wissenschaftlern herbeigeführt. Wir möchten deshalb noch kurz das Alter der genannten Algebraiker betrachten: 1930 sind

EMMY NOETHER	48 Jahre,
OTTO HAUPT	43 Jahre,
EMIL ARTIN	32 Jahre,
HELMUT HASSE	32 Jahre,
REINHOLD BAER	28 Jahre,
BARTEL VAN DER WAERDEN	27 Jahre.

Man sieht also deutlich auch innerhalb dieser Gruppe einen Generationsunterschied. Die moderne Algebra etabliert sich mit der jungen Generation.

4. Lehrbücher und Vorlesungen

Der Paradigmenwechsel ist vollzogen, wenn in einer neuen Lehrbuchgeneration die Wissenschaft nach dem neuen Paradigma dargestellt ist. Dabei wird der Paradigmenwechsel selbst nicht in den Büchern behandelt, sondern das gesamte Wissen wird „in einem Guß“ nach dem neuen Paradigma dargeboten. Im Wandel der Algebra läßt sich dies zwar im Prinzip auch feststellen, doch haben hier Lehrbücher selbst wesentlich dazu beigetragen, den Paradigmenwechsel herbeizuführen.

Im allgemeinen wird die „Moderne Algebra“ von B.L. VAN DER WAERDEN aus dem Jahre 1930 als das entscheidende Buch für den Durchbruch der neuen Ideen genannt. (Der 1. Band ist heute in 9. Auflage, der 2. Band ist in 6. Auflage erhältlich). Nach seinen eigenen Angaben stützt es sich auf Vorlesungen von EMIL ARTIN und EMMY NOETHER. Zunächst hatte ARTIN zusammen mit HASSE das Buch schreiben wollen, stieg dann aber aus dem Projekt aus, als er sah, wie stark es sich unter dem Einfluß von EMMY NOETHER selbständig weiterentwickelte (VAN DER WAERDEN 1975).

Ohne die Bedeutung dieses Werkes schmälern zu wollen, soll doch auf die beiden wichtigen Vorläufer hingewiesen werden:

HELMUT HASSE,	Höhere Algebra 1, Berlin 1926, [4]
	Höhere Algebra 2, Berlin 1927, [5]
OTTO HAUPT,	Einführung in die Algebra 1,2, Leipzig 1929, [16].

Im Kontrast dazu steht das Buch von OSKAR PERRON aus dem Jahre 1927, der im Grunde noch dem alten Paradigma verhaftet blieb.

Der Unterschied zwischen altem und neuem Paradigma kommt sehr deutlich bei einem Vergleich der Inhaltsverzeichnisse zweier Lehrbücher heraus, die den verschiedenen Paradigmen angehören. Zu Anfang unseres Jahrhunderts wurde Algebra im wesentlichen durch das Lehrbuch von HEINRICH WEBER (1842-1913) bestimmt. Wir wählen zum Vergleich das Inhaltsverzeichnis der Kurzausgabe von 1912 und das Inhaltsverzeichnis von VAN DER WAERDENS Lehrbuch aus dem Jahre 1930.

HEINRICH WEBER, *Lehrbuch der Algebra* (Kleine Ausgabe) Braunschweig 1912	BARTEL L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra 1,2,* Berlin 1930
1. Determinanten	1. Zahlen und Mengen
2. Zahlen und ganze Funktionen	2. Gruppen
3. Symmetrische Funktionen	3. Ringe und Körper
4. Wurzeln	4. Ganze rationale Funktionen
5. Kubische und biquadratische Gleichungen	5. Körpertheorie
6. Der Sturmsche Lehrsatz	6. Fortsetzung der Gruppentheorie
7. Genäherte Berechnung der Wurzeln	7. Die Theorie von Galois
8. Gruppen	8. Geordnete und wohlgeordnete Mengen
9. Die Galoissche Theorie	9. Unendliche Körpererweiterungen
10. Zyklische Gleichungen	10. Reelle Körper
11. Kreisteilung	11. Eliminationstheorie
12. Auflösung der Kreisteilungsgleichung	12. Allgemeine Idealtheorie der kommutativen Ringe
13. Algebraische Auflösung	13. Theorie der Polynomideale
14. Zahlen und Funktionale eines algebraischen Körpers	14. Ganze algebraische Größen
15. Anwendung auf Kreisteilungskörper	15. Lineare Algebra
	16. Theorie der hyperkomplexen Größen
	17. Darstellungstheorie der Gruppen und hyperkomplexen Systeme

Die Inhaltsverzeichnisse machen deutlich: Aus einer Theorie der Gleichungen ist eine Theorie der algebraischen Strukturen geworden. Im Detail sieht man bei VAN DER WAERDEN jedoch das Bemühen, die klassischen Bestände der Algebra zu bewahren. In manchen Teilen ist die Terminologie noch etwas unsicher.

Das Buch tritt selbstbewußt als „Moderne Algebra“ auf. Der Paradigmenwechsel ist vollzogen und ist nicht Gegenstand der Reflexion. Gelegentlich finden sich allerdings Hinweise auf das alte Paradigma, z.B.

> „Die Termini „Galoissche Körper“ und „Galoissche Gleichungen“ erklären sich folgendermaßen: In der früheren Theorie spielten die Hauptrolle die „Galoisschen Resolventen“ einer Gleichung. Eine Galoissche Resolvente einer Gleichung f(x) = 0 ist eine irreduzible Gleichung g(x) = 0 mit der Eigenschaft, daß die Adjunktion einer Wurzel dieser Gleichung schon den vollständigen Zerfällungskörper des Polynoms f(x) ergibt.... Der durch eine Galoissche Resolvente definierte Körper wurde nun als Galoisscher Körper bezeichnet und eine Gleichung, die ihre eigene Galoissche Resolvente darstellt, als Galoissche oder normale Gleichung.“ (VAN DER WAERDEN 1930, S. 104)

Mit den neuen Lehrbüchern lagen Muster für Vorlesungen entsprechend dem neuen Paradigma vor. So waren die Lehrbücher einerseits stark beeinflußt von den Vorlesungen der Algebraiker, die nach dem neuen Paradigma arbeiteten (z.B. ARTIN, NOETHER). Andererseits prägten sie die Vorlesungen der aufgeschlossenen Mathematiker, die selbst keine Algebraiker waren.

Wie langwierig aber der Prozeß der Modernisierung der Vorlesungen sein konnte, läßt sich an einzelnen Fällen beobachten. So habe ich über einen längeren Zeitraum die Entwicklung der Algebra-Vorlesungen an der Universität Würzburg etwas näher betrachtet (VOLLRATH 1991). Unter dem Einfluß des Buches von OTTO HAUPT zeigten sich die ersten Modernisierungsversuche in der Vorlesung von EMIL HILB (1882-1929) im WS 1928/29 und im SS 1929. Hilb war Analytiker. Moderne Algebra wurde dagegen erst 1953 nach der Berufung von HERMANN LUDWIG SCHMID (1908-1956) und später durch seine Schüler angeboten. Selbst wenn man die durch die Kriegszeit gegebenen schwierigen Verhältnisse berücksichtigt, kann man auch im Bereich der Universität nicht damit rechnen, daß sich ein solcher Paradigmenwechsel sogleich allgemein in der Lehre niederschlägt. Dabei darf sicher das Generationsproblem nicht unterschätzt werden.

Die Verzögerung des Paradigmenwechsels in der Lehre hat natürlich auch Auswirkungen in der Ausbildung der Lehrer und bei der Aufnahme neuer Ideen im Mathematikunterricht des Gymnasium gehabt.

5. Information der Lehrer

Daß sich in der Algebra an den Universitäten Grundlegendes geändert hatte, war auch den Lehrern, die Kontakt zu den Hochschulen hielten, nicht verborgen geblieben. Vor allem der Förderverein bemühte sich früh darum, über die neuen Entwicklungen durch kompetente Mathematiker zu informieren. So wurde z.B. OTTO HAUPT eingeladen, einen Aufsatz für die „Unterrichtsblätter“ zu schreiben. In seinem Aufsatz „Aus der modernen Algebra“ von 1931 macht er den Versuch, „einem breiteren Leserkreis an Hand einfacher Vergleiche und möglichst elementarer Beispiele einige der Umwälzungen näherzubringen, welche sich in den letzten Jahrzehnten innerhalb der Algebra abgespielt haben“ (HAUPT 1931, S. 289). Als typisch für das Vorgehen in der modernen Algebra hebt er hervor:

> „Präzise Festlegung und allgemeine Formulierung der jeweils in Frage kommenden Begriffe, Abstraktion von der Sache fremden Momenten; schließlich vermittels dieser Abstraktionen Vereinheitlichung und Verallgemeinerung, und damit dann das Auftauchen neuer Fragestellungen, die ihrerseits wieder zu inhaltlichen Fortschritten führen.“ (HAUPT 1931, S. 290)

Er macht sich dann an einen Versuch, „Algebra“ zu definieren:

> „‚Algebra‘ heiße die Gesamtheit aller Begriffe und Aussagen, die sich lediglich mit Hilfe der Regeln (Axiome) des rationalen Rechnens gewinnen lassen.“ (HAUPT 1931, S. 290)

An einer Reihe von Beispielen bis hin zur Galois-Theorie macht er die neue Sichtweise klar. Wenn auch im Rückblick dabei der Kern der Galois-Theorie sehr schön hervortritt, dürften damals doch die meisten Lehrer, die noch nach dem alten Paradigma ausgebildet worden waren, überfordert gewesen sein.

Ein Jahr später erscheint in den „Unterrichtsblättern" der Aufsatz von HERMANN WEYL: „Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses." (WEYL 1932). Hier bahnt sich bereits der Ansatz von BOURBAKI an:

> „Zwei verschiedene Wege des Verstehens haben sich in unseren Tagen als besonders eindringend und ertragreich erwiesen, die Topologie und die abstrakte Algebra. Diese beiden Denkweisen geben heute einem großen Teil der Mathematik das Gepräge. An dem zentralen Begriff der reellen Zahl läßt sich von vornherein plausibel machen, worauf das beruht. Denn das System der reellen Zahlen gleicht einem Januskopf mit zwei nach verschiedenen Richtungen gekehrten Gesichtern: in einer Hinsicht ist es das Feld der algebraischen Operationen + und × und ihrer Umkehrungen, in anderer Hinsicht ist es eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit, deren Teile stetig miteinander verbunden sind. Das eine ist das algebraische, das andere das topologische Antlitz der Zahlen. Die moderne Axiomatik, einfachen Gemüts wie sie ist, liebt (anders als die neuere Politik) solche zweideutigen Mischungen von Krieg und Frieden nicht; sie trennte säuberlich die beiden Teile voneinander. Der Größencharakter der Zahlen endlich, der in den Beziehungen < und > sich ausdrückt, nimmt eine Art Zwischenstellung ein zwischen Algebra und Topologie." (WEYL 1932), S. 178)

Allgemein beschreibt er die unterschiedlichen Wege des Verstehens wie folgt:

> „Man trennt die verschiedenen Seiten, die ein Gegenstand mathematischer Untersuchung darbietet, auf natürliche Weise, macht jede für sich von einer eigenen, relativ engen und leicht überblickbaren Gruppe von Voraussetzungen aus zugänglich und kehrt dann in der Vereinigung der passend spezialisierten Teilresultate zum komplexen Ganzen zurück. Der letzte synthetische Teil ist rein mechanischer Art. Die Kunst liegt in dem ersten analytischen Teil der geeigneten Trennung und Generalisierung. Die Ma-

> thematik der letzten Dezennien hat geradezu geschwelgt in Verallgemeinerungen und Formalisierungen.“ (WEYL 1932, S. 177)

Sogar der Rundfunk wird in den Dienst dieser wichtigen Aufgabe gestellt.

HANS BECK hält 1933 im Westdeutschen Rundfunk einen Vortrag über das Thema: „Gruppentheorie und Schulmathematik“ (BECK 1933).

Die Schule reagiert mit Vorträgen und Diskussionen auf den MNU-Tagungen 1932 in Aachen und 1933 in Erfurt (BOSCH o.a. 1933, DREETZ 1934,ZMNU 1934). Im Grunde bleiben aber diese Diskussionen dem alten Paradigma verhaftet. Zwar wird eine vorsichtige Aufnahme von Ideen der Abbildungsgruppen empfohlen. Dabei denkt man aber weitgehend an die durch das „Erlanger Programm“ von F. KLEIN gegebenen Anregungen. Die Nazizeit und der Krieg unterbrechen die weitere Entwicklung. Gegen Ende der fünfziger Jahre empfindet die erste Generation der Lehrer, die nach dem Kriege modern ausgebildet worden ist, die Kluft zwischen der Denkweise und den Inhalten der modernen Mathematik und der Schulmathematik als so unerträglich, daß sie zu einer Modernisierung drängt. Sie gerät zugleich in den Sog einer internationalen Reformbewegung des Mathematikunterrichts, deren gesellschaftliche Ursachen, Ziele, allerdings auch Hemmungen und Schwierigkeiten, sie wohl nicht überblickt haben (DAMEROW 1977).

6. Algebraische Strukturen in der Reform

Ein wichtiges Argument für die Modernisierung des Mathematikunterrichts war der Abstand zwischen der Mathematik in der Wissenschaft und der Schulmathematik. Typisch ist die Argumentation von STEINER:

> „Der Fortschritt der Mathematik in den letzten hundert Jahren hat nicht nur durch den Reichtum an neuen mathematischen Theorien und Einzelergebnissen, sondern auch durch die Vertiefung der begrifflichen Grundlagen und die Entwicklung von weiterreichenden Verfahrensweisen ganz erheb-

> lich über jene Mathematik hinausgeführt, die dem Unterricht an den Gymnasien in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts zugrunde gelegen hat, eine Mathematik, die im wesentlichen schon um 1800 vorlag. Das hat im Laufe der letzten Dezennien, wo das Fortschreiten der Wissenschaft in die Breite und in die Tiefe immer mächtiger wurde, die Schule aber relativ stark an traditionellen Stoffen und Auffassungsweisen festhielt, zu einer solchen Rückständigkeit des mathematischen Unterrichts geführt, daß in Deutschland wie in vielen anderen Ländern, in denen die Situation bei aller Unterschiedlichkeit der Schulformen ganz ähnlich ist, eine große Beunruhigung eintreten mußte." (STEINER 1959, S.5).

Gegenüber dem „mächtigen Fortschreiten der Wissenschaft" war der Unterricht am Gymnasium „zurückgeblieben". STEINER fordert:

> „In unseren mathematischen Unterricht gehört der Geist und das begriffliche Rüstzeug der Mathematik des 20. Jahrhunderts, gehört für den Schüler die Erfahrung der analytischen wie produktiven Kraft der axiomatischen Methode und des strukturellen Denkens, eines Denkens, das für die Selbstinterpretation des menschlichen Geistes wie für die Erfassung der uns umgebenden Gegenstandsstrukturen sich in gleicher Weise als fundamental erwiesen hat." (STEINER 1965 , S. 5).

Der Fortschritt innerhalb der Mathematik wird von STEINER nicht nur als eine Vermehrung des Wissensstandes gesehen, sondern vor allem in neuen Einsichten über die Grundlagen und die Methodologie der Mathematik. Eine derart tiefgreifende Entwicklung muß nach STEINER didaktische Implikationen haben:

> „Gerade die strukturelle Auffassungs-und Aufbauweise der Mathematik erlaubt es, die mathematischen Gegenstände und Zusammenhänge mit verschiedenen früher nicht geahnten innermathematisch präzisierten Aspekten zu sehen, sie von verschiedenen Voraussetzungskomplexen aus zu entwickeln und darzustellen." (STEINER 1965 , S.5-6).

Schließlich gibt STEINER die methodische Empfehlung, „die tragenden Begriffe, die für die moderne mathematische Denkweise selbst kennzeichnend sind, zu *Leitbegriffen des Unterrichts* zu machen“ (STEINER 1965 , S.8). Für ihn sind das vor allem die Begriffe Menge, Struktur und Abbildung.

In einer Fülle von Aufsätzen und Vorträgen wirkt STEINER auf die Reformdiskussion für den Mathematikunterricht am Gymnasium ein. Insbesondere die Zeitschrift „Der Mathematikunterricht“ bietet Raum für die Darstellung von Reformideen. Die Unterrichtsreform ist umfassend und kritisch zunächst von LENNÉ (1969), später von DAMEROW (1977) analysiert und dokumentiert worden.

Im Rückblick macht die Kontroverse zwischen STEINER und WITTENBERG die Problematik dieser Reform deutlich. Nach unserer Analyse des Wandels und seiner Deutung als Paradigmenwechsel stellen sich mir die beiden Positionen wie folgt dar:

WITTENBERG hat den Wandel in der Algebra nicht als Paradigmenwechsel erkannt, sondern zu harmonisch als „normale“ Entwicklung der Wissenschaft gesehen. Die Ergebnisse der modernen Algebra hat er als Spezialwissen eines hochentwickelten mathematischen Gebietes aufgefaßt, das zwangsläufig den Schülern verschlossen bleiben muß.

STEINER hat wohl den Paradigmenwechsel gesehen und erkannt, daß er einen tiefgehenden Wandel in der Methode und in den Problemstellungen bewirkte, der Schülern zugänglich gemacht werden muß und auch kann. Die Tragweite dieses Paradigmenwechsels hat er andererseits im Einklang mit den Vertretern des neuen Paradigmas von VAN DER WAERDEN bis BOURBAKI vielleicht überschätzt.

Aber auch die analysierenden Wissenschaftstheoretiker der Unterrichtsreform sind in ihrer Sicht befangen. LENNÉ etwa schreibt von einer „im stillen vor sich gehenden wissenschaftlichen Entwicklung“ (LENNÉ 1969, S. 77); DAMEROW betont die „Kontinuität einer wissenschaftlichen Entwicklung“, die sich bis ins 16. Jahrhundert zurückverfolgen läßt und in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts dann ihren konsequenten vorläufigen Abschluß findet. (DAMEROW

1977, S.86-87). Mit KUHN kann man vermuten, daß sie nach dem Paradigmenwechsel der neuen, nun normalen Wissenschaft, „auf den Leim gegangen“ sind, die eben in ihren Lehrbüchern und Vorlesungen den Bruch verschleiert. Damit wurden bis zu einem gewissen Grade bei aller Begeisterung für das Neue und bei allem Bedauern über die Rückständigkeit des Mathematikunterrichts der Bruch und die damit zusammenhängenden Spannungen in der Gemeinschaft der Wissenschaftler unterschätzt. Andererseits wurde der Einfluß dieses Denkens auf die gesamte Mathematik überschätzt. So schreibt LENNÉ: „Die ...durch den Bourbakismus entwickelte Strukturmathematik faßt mithin die meisten Gebiete der Mathematik, die bisher in immer weitergehender Differenzierung auseinanderstrebten, in einer Hierarchie universeller und zudem beweistechnisch höchst ökonomischer Begriffe zusammen“ (LENNÉ 1969, S. 80).

Das würde man heute so wahrscheinlich nicht mehr schreiben. Doch muß man sehen, welch eine Faszination von diesem Programm gerade für aufgeschlossene Lehrer ausging. Vergleichbar mit FELIX KLEINS „Erlanger Programm“ und in Fortsetzung von ihm, sah man die Chance, das exponentiell wachsende mathematische Wissen (etwa alle 10 Jahre verdoppelt sich die Zahl der erscheinenden Arbeiten) überschaubar zu machen und damit letztlich in Ansätzen auch Schülern in seinen Grundzügen nahebringen zu können.

Die starke Betonung des strukturellen Denkens bei den Reformern löste eine harte Kontroverse zwischen D. LAUGWITZ und H..-G. STEINER aus. LAUGWITZ wies in einem Vortrag auf der MNU-Tagung 1965 in Nürnberg den Absolutheitsanspruch der Reformer scharf zurück und hob stattdessen die Bedeutung des konstruktiven Denkens für die Mathematik hervor (LAUGWITZ 1966).

Doch zunächst setzten sich die Reformer durch. In den Rahmenrichtlinien von 1968 waren Strukturbegriffe wie Gruppe, Ring und Körper fest verankert. Diese wurden dann in die Richtlinien der Länder übernommen (DAMEROW 1977). Auch die Schulbücher boten Inhalte der Strukturmathematik an. Abgesehen von den „Struktur-Fans“ unter den Lehrern blieb aber anscheinend für die meisten Lehrer „Strukturmathematik“ ein sprödes Thema. In Gesprächen hört man immer wieder als Argumente, die Strukturbetrachtungen wirkten aufgesetzt, die Schüler hätten Schwierigkeiten, ihren Sinn zu erkennen, man könne damit ohnehin nicht viel anfangen und für das Abitur spielten Strukturen sowieso keine Rolle. Es ist deshalb auch konsequent, wenn sich die Strukturmathematik – still und heimlich – wieder aus den Lehrplänen und Schulbüchern verabschiedet hat. So sieht z.B. der Lehrplan für den Mathematikunterricht am Gymnasium in Bayern von 1992 die Behandlung algebraischer Strukturen nur noch als Wahlangebot im Zusammenhang mit der Einführung komplexer Zahlen vor. Überspitzt könnte man formulieren: Im Bereich der Algebra hat sich das Gymnasium am Ende des 20. Jahrhunderts nach mehr oder weniger mißlungenen Versuchen von den Ideen der modernen Algebra verabschiedet und sich in die Algebra des 19. Jahrhunderts zurückgezogen.

Vergleicht man jedoch Schulbücher unserer Zeit mit denen aus dem 19. Jahrhundert oder aus der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts, so fallen doch gravierende Unterschiede in der Algebra auf. Zu Beginn des 19, Jahrhunderts findet sich bei der Begründung der Algebra allenfalls ein Sammelsurium von Regeln, während heutige Bücher die für die algebraischen Strukturen wesentlichen Regeln hervorheben. Selbstverständlich werden heute in den Schulbüchern geometrische Abbildungen verkettet, Funktionen addiert, multipliziert und verkettet, während man in Büchern aus der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts, in denen schon Abbildungen und Funktionen behandelt werden, vergeblich danach suchen wird. Selbst wenn also heute die algebraischen Strukturbegriffe aus den Schulbüchern weitgehend verschwunden sind, hat doch die Reformdiskussion ihre Spuren in der Gestaltung der traditionellen Inhalte hinterlassen. Man kann diese Reste als „Reformruinen“ verspotten. Damit wird man ihnen aber nicht gerecht. Denn diese Betrachtungen in den Schulbüchern sind wohl eher Ausdruck des strukturellen Denkens, das sich in ihnen selbstverständlich niederschlägt. Man sollte nämlich die prägende Kraft des strukturellen Denkens, das die heute am Gymnasium unterrichtenden Lehrer während ihres

Studiums erfahren haben, nicht unterschätzen. Ja, ihr strukturelles Denken kann sogar dem Verständnis ihrer Schüler im Wege stehen, wenn sie z.B. immer wieder auf den „Gesetzen mit den merkwürdigen Bezeichnungen" (Assoziativgesetze, Kommutativgesetze, Distributivgesetze) herumreiten, deren Sinn ihre Schüler gar nicht so recht erfassen und die sie ohnehin schnell wieder vergessen können.

Die Prägung durch das strukturelle Denken bedarf auf Seiten der Lehrer einer Reflexion und des Bemühens, vom Kinde her zu denken.

Gegenwärtig spielen also im Mathematikunterricht des Gymnasiums und in der didaktischen Diskussion algebraische Strukturen wie Gruppen, Ringe, Körper und Verbände praktisch keine Rolle. Als einziger Begriff hat der Begriff des Vektorraums in der linearen Algebra der Oberstufe überlebt. Allerdings ging dies weitgehend zu Lasten des Formenreichtums der analytischen Geometrie. Andererseits finden sich an vielen Stellen des gesamten Mathematikunterrichts Betrachtungen, die sich als Ausdruck strukturellen Denkens deuten lassen. Eine kritische Sichtung der Reform zeigt, daß es durchaus Bewahrenswertes gibt. Läßt sich eine didaktisch fundierte Konzeption gewinnen, die daraus die notwendigen Konsequenzen zieht und gleichzeitig dem Algebraunterricht eine überzeugende Ausrichtung gibt?

7. Strukturmathematik und das Problem des Elementaren

Der Paradigmenwechsel in der Algebra hat sich im Bereich der Wissenschaft vollzogen. Daß er seine Auswirkungen auf das Gymnasium hatte, hat mit dem Anspruch des Gymnasiums zu tun, seinen Schülern eine „echte Begegnung mit Mathematik" WITTENBERG 1963 zu vermitteln. Dabei wurde vor allem mit dem Blick auf die zu erzielende Hochschulreife argumentiert, wobei man allerdings nicht nur den künftigen Mathematikstudenten (als das eine Extrem), sondern auch den angehenden Philosophen (als das andere Extrem) im Auge hatte (z.B. STEINER 1959). STEINER dürfte mit WITTENBERGS Auffassung einverstanden gewesen sein:

> „Von ‚gültiger Erfahrung‘ der Mathematik kann denn auch nur in dem Maße die Rede sein, wie der Unterricht nicht nur die Ergebnisse, sondern das ganze Vorgehen in überzeugender Weise innerhalb des geistigen Erfahrungsbereichs des Schülers zustandekommen läßt.“(WITTENBERG 1963 , S. 59).

Während jedoch für STEINER das auch mit der Strukturmathematik möglich sein sollte, bezweifelte WITTENBERG eben dies. Die Geister schieden sich an verschiedenen Auffassungen über das Elementare.

Innerhalb der Mathematik gibt es eine traditionelle Auffassung, die das Elementare inhaltlich und methodisch zu fassen sucht. Betrachten wir z.B. die Geometrie. Inhaltlich beschränkt sich Elementargeometrie auf die klassischen Gebilde Punkte, Geraden, Strecken, Vielecke, Winkel, Kreise, Ebenen und Grundkörper vom Würfel bis zur Kugel. Höhere Geometrie hat es z.B. mit komplizierteren Kurven und Körpern zu tun. Natürlich ist es schwer, eine klare Grenze zu ziehen. So kann man darüber streiten, ob z.B. die Kegelschnitte zur elementaren oder zur höheren Geometrie gehören.

Hinsichtlich der Methoden kann man Elementargeometrie abgrenzen durch die Ausgrenzung analytischer, topologischer oder algebraischer Methoden. Man erhält damit in etwa die früher so bezeichnete „Synthetische Geometrie“. Auch hier sind natürlich die Grenzen schwer zu ziehen. Denn z.B. bei der Inhaltslehre lassen sich ja die reellen Zahlen mit ihrer Vollständigkeit kaum vermeiden.

„Elementare Algebra“ ist schwieriger zu beschreiben. Methodisch beschränkt sich die Strukturalgebra bewußt auf die Verknüpfungen und verzichtet möglichst auf alles, was mit Grenzwerten zu tun hat, wenn man den Ausführungen von HASSE, HAUPT und WEYL folgt. Aber bereits bei den reellen Zahlen kommt sie damit in Schwierigkeiten.

Inhaltlich ist dagegen ein stärkerer Unterschied zwischen der traditionellen

Algebra und der Strukturalgebra zu sehen: Wurden traditionell Zahlbereiche, Permutationen und Funktionsmengen betrachtet, so interessiert man sich jetzt für Gruppen, Ringe, Körper usw. Man könnte hier die Grenze zwischen der elementaren und der höheren Algebra ziehen. Das tut offensichtlich Wittenberg. Für STEINER allerdings sind die Strukturbegriffe wesentlich für die Entfaltung des strukturellen Denkens im Mathematikunterricht. Für ihn gibt es durchaus elementare Betrachtungen innerhalb dieser Strukturen (z.B. STEINER 1969). Man könnte in diesem Sinne also z.B. von elementarer und höherer Gruppentheorie sprechen.

Ein entscheidender Punkt, der in der Reformdiskussion nach meinem Eindruck nicht angemessen gesehen wurde, ist die Rolle des Konkreten für Strukturbetrachtungen. HASSE betont in seinem Vortrag, daß die konkreten Zahlbereiche, Funktions- und Abbildungsmengen bei den Betrachtungen von Strukturen in den Hintergrund treten. Statt z.B. die Menge der rationalen Zahlen zu betrachten, legt man jetzt allgemein einen Körper zugrunde. Die konkreten Bereiche werden damit weitgehend unwesentlich. Axiomatisch gesprochen spielen sie nur noch die Rolle von Modellen der betrachteten Strukturtypen. Daß der Übergang nicht ganz reibungslos verlief, merkt man z.B. daran, wie lange sich in der Literatur die Unterscheidung „abstrakte Gruppe“ und „konkrete Gruppe“ gehalten hat. Die Betrachtung konkreter Bereiche ausschließlich unter dem Gesichtspunkt von Modellen wird jedoch ihrer Rolle nicht gerecht. Zwei ganz entscheidende Beiträge werden dabei unterschätzt.

Zunächst einmal bieten die konkreten Bereiche *Muster* für strukturelle Betrachtungen. So findet z.B. die Erweiterung der ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen ihren Niederschlag in der Konstruktion des Quotientenkörpers zu einem Integritätsbereich. Die Restklassenbildung in Ringen folgt der Restklassenbildung der Zahlentheorie in der Menge der ganzen Zahlen. Die Adjunktion eines algebraischen Elements zu einem Körper entspricht dem Muster der Konstruktion der komplexen Zahlen. Gerade dies wird als Rechtfertigung der Strukturbetrachtungen angeführt: Es ist ökonomischer, derartige Prozesse einmal allgemein durchzuführen, dann muß man sie nicht für jeden Bereich wieder neu durchführen. Für die Wissenschaft ist dies zutreffend. Doch sieht das für die Lernenden in der Schule ganz anders aus: Erst die Wiederholung gleichartiger Betrachtungen läßt das Bedürfnis nach allgemeineren Überlegungen erwachsen. Hier ist also das Wiederholen gleichartiger Vorgehensweisen sogar erwünscht.

Noch gravierende als die Musterwirkung der konkreten Bereiche ist ihre Rolle, die sie innerhalb der Theorien der einzelnen Strukturen als *Typen* spielen. Die Aussage, daß jede unendliche zyklische Gruppe isomorph ist zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen, bedeutet doch, daß die ganzen Zahlen bezüglich der Addition einen wichtigen Typ von Gruppen darstellen. Entsprechendes gilt für die anderen Bereiche. So ist jeder Primkörper der Charakteristik 0 isomorph dem Körper der rationalen Zahlen. Jeder n-dimensionale Vektorraum ist isomorph dem Vektorraum der n-tupel reeller Zahlen. Allgemeine Betrachtungen dieser speziellen Strukturtypen liefern also gegenüber dem konkreten Bereich keine wesentlichen Erkenntnisse.

Andererseits tragen Strukturbetrachtungen an den konkreten Bereichen durchaus zu ihrem Verständnis bei. Es ist eine wichtige Einsicht, daß man die ganzen Zahlen mit Hilfe der 1 additiv erzeugen kann. Auch daß Q der kleinste Körper ist, in dem aus $n \cdot 1 = 0$ folgt $n = 0$, läßt sich voll innerhalb dieses Bereiches erfassen und stellt eine fundamentale Einsicht dar. Schließlich geben Betrachtungen von n-tupeln als Vektoren diesen unscheinbaren Gebilden Sinn und machen Anwendungsmöglichkeiten deutlich. Strukturbetrachtungen an konkreten Bereichen können also für Lernende durchaus einen wichtigen Beitrag zum Verstehen leisten. Das klang ja auch bereits in den Ausführungen von Weyl an. Algebraische Betrachtungen an konkreten Bereichen kann man also als elementare Algebra betrachten, während man die Untersuchung von algebraischen Strukturen als höhere Algebra ansehen kann.

Indem in der elementaren Algebra das strukturell Bedeutsame herausgearbeitet wird, wirkt die höhere Algebra auch auf die elementare Algebra ein. Ich sehe diese Auffassung durchaus im Einklang mit STEINERS Vorstellungen über das

Elementare:

> „Das Elementare soll einerseits eine Schlüsselstellung für das Verstehen und Erfassen der charakteristischen Züge etwa eines Wissensgebietes einnehmen, also in prägnanter Weise das Prinzipielle des Gebietes widerspiegeln; es soll andererseits den Schüler für das jeweilige Gebiet aufschließen, sein Interesse wecken, es zu seiner Angelegenheit werden lassen." (STEINER 1969, S.49).

Abweichend von ihm begrenze ich das Elementare in der Algebra auf das Konkrete. Wichtige Problemstellungen bei algebraischen Strukturen erwachsen aus Problemstellungen konkreter Bereiche, und konkrete Bereiche stellen Typen algebraischer Strukturen dar. Diese Einsicht scheint mir für die didaktische Diskussion um die Strukturalgebra ganz entscheidend zu sein. Denn das Verstehen von Begriffsbildungen, Problemstellungen und Methoden der Strukturalgebra setzt das Verständnis der konkreten Bereiche voraus. Andererseits helfen natürlich Strukturbetrachtungen, das algebraisch Wesentliche an den konkreten Bereichen zu erfassen. Es ist dies die Paradoxie des Konkreten und Allgemeinen beim Verstehen (VOLLRATH 1993). In der Konsequenz bedeutet das:

> *Zahlen, Funktionen und Abbildungen sind im Algebraunterricht so zu unterrichten, daß das strukturell Wesentliche hervortritt und daß daraus Strukturbetrachtungen erwachsen können.*

Damit sollen allerdings allgemeinere Betrachtungen für die Schule nicht ausgeschlossen werden. Auch hier sehe ich Parallelen zur Geometrie. Zwar dominiert z.B. in der Unter- und Mittelstufe des Gymnasiums in der Geometrie die Elementargeometrie, doch beginnen bereits in der Mittelstufe auch analytische Betrachtungen; in der Oberstufe folgen dann Elemente der linearen Algebra. Neuerdings wird auch vorgeschlagen, Elemente der Differentialgeometrie mit einzubeziehen (z.B. WETH 1993). Doch selbst wenn man die Grenze des in der Schule Sinnvollen immer weiter hinausschiebt, muß man doch sehen, daß heute der Schule wesentliche Bereiche der modernen Geometrie verschlossen bleiben (z.B. algebraische Geometrie, Mannigfaltigkeiten und Konvex-Geometrie). Das kann auch in der Algebra nicht anders sein.

8. Der Verknüpfungsbegriff als Leitbegriff

Die Initiatoren der Reform hatten die Vorstellung, der Begriff der Struktur sollte ein Leitbegriff des Mathematikunterrichts werden (z.B. GRIESEL 1965). Sie knüpften damit an eine didaktische Idee von F. KLEIN an, der in der Unterrichtsreform zu Beginn dieses Jahrhunderts den Funktionsbegriff als Leitbegriff für den Mathematikunterricht etabliert hatte. Damit ist die Vorstellung verbunden, daß sich das Lehren eines solchen Begriffs über den ganzen Lehrgang erstreckt, so daß sich daraus ein Themenstrang ergibt, der zum Träger wichtiger Problemstellungen wird. Dem Lernprozeß selbst liegt ein *Lernen in Stufen* zugrunde, das in einer globalen Strategie geplant wird (VOLLRATH 1984).

Für eine ganze Reihe von Leitbegriffen sind derartige Modelle entwickelt worden. Weitgehend durchgesetzt haben sich gestufte Konzeptionen für das Lehren des Zahlbegriffs (z.B. SCHWARTZE 1980), für das Lehren des Funktionsbegriffs (z.B. VOLLRATH 1974), für das Lehren der Begriffe Figur und Abbildung im Geometrieunterricht (z.B. HOLLAND 1988, WEIDIG 1982). Als gescheitert zu betrachten ist der Versuch der Reformer, den Strukturbegriff als Leitbegriff für den Algebraunterricht zu etablieren (s.VOLLRATH 1974).

Dagegen erscheint es mir nach den bisherigen Erfahrungen sinnvoll und möglich, den Begriff der *Verknüpfung* als Leitbegriff anzusehen und eine gestufte Konzeption zum Lehren dieses Begriffs zu entwickeln, bei der in höheren Stufen Betrachtungen über algebraische Strukturen sinnvoll und möglich werden. Dieser Ansatz erscheint geeignet, von der Grundschule an in konkreten Bereichen Möglichkeiten zur Entfaltung strukturellen Denkens zu bieten, die schließlich in der Oberstufe an geeigneten Themenkreisen zur Betrachtung von Strukturen führen. Dabei sollte es möglich sein, viele der in der Unterrichtsreform entwickelten Ideen neu fruchtbar werden zu lassen. All dies sollte im Einklang mit den Prinzipien eines genetischen Mathematikunterrichts stehen (z.B. WITTMANN 1981).

Indem ich statt des Strukturbegriffs den Verknüpfungsbegriff als Leitbegriff vorschlage, verschiebe ich lediglich die Akzente. Damit wird es aber möglich, den gegenwärtigen Algebra-Unterricht weitgehend zu rechtfertigen und Möglichkeiten zu sinnvollen Vertiefungen anzubieten. Im Folgenden will ich die Grundzüge einer solchen Konzeption skizzieren.

Grundschule: *Rechenoperationen bei natürlichen Zahlen*

Mit den vier Rechenoperationen für natürliche Zahlen lernen die Schüler wichtige Beispiele für Verknüpfungen kennen. Sie gewinnen wichtige Vorstellungen über diese Verknüpfungen, können Ergebnisse berechnen und die Verknüpfungen in Sachsituationen anwenden. Sie erkennen Gemeinsamkeiten, vor allem daß bei jeder Verknüpfung zu je zwei Zahlen eine dritte bestimmt wird. Sie lernen typische Problemstellungen und ihre Lösungen kennen. Intuitiv verwenden sie auch Eigenschaften wie Kommutativität und Assoziativität bei Addition und Multiplikation. Zugleich wird ihnen bewußt, daß Entsprechendes bei Subtraktion und Division nicht gilt. Insbesondere wird ihnen deutlich, daß man Addition und Multiplikation immer, Subtraktion und Division nur in bestimmten Fällen ausführen kann. In dieser Stufe erfahren die Schüler also das „Phänomen der Verknüpfung".

5. Jahrgangsstufe: *Verknüpfungen natürlicher Zahlen und ihre Eigenschaften*

Zunächst geht es um eine Sicherung und Vertiefung des Rechnens innerhalb der natürlichen Zahlen. Dabei sollen Eigenschaften der Rechenoperationen bewußtgemacht und Zusammenhänge zwischen den Operationen herausgearbeitet werden. In einer Reflexionsphase wird dann zur Vertiefung der Begriff der Verknüpfung als Oberbegriff zunächst für die vier Grundrechenarten gewonnen. Anschließend wird deutlich gemacht, daß man weitere Verknüpfungen in $\mathbb{N}$ betrachten kann, z.B. das Potenzieren, es bietet sich die Schreibweise an: $a\uparrow b=a^b$, um den Verknüpfungscharakter deutlich zu machen. Um Verengungen zu vermeiden, werden auch andersartige Verknüpfungen betrachtet etwa $a\downarrow b=\min(a,b)$ und $a\uparrow b=\max(a,b)$. Als Mittel zur Veranschaulichung von Verknüpfungen bieten sich Simplexdiagramme nach BREIDENBACH an.

Der Begriff der Verknüpfung wird gebildet, um Analogien und Unterschiede bei den verschiedenen Operationen hervorzuheben. Dazu dienen vor allem Betrachtungen von Eigenschaften. Es bieten sich an: Abgeschlossenheit, Kommutativität, Assoziativität, Existenz von Neutralen, Distributivität, im Hinblick auf die Minimum- und Maximumbildung auch Idempotenz. Die Bedeutung dieser Eigenschaften für das Rechnen wird herausgearbeitet.

Falls Teilbarkeitslehre bereits in der 5. Jahrgangsstufe behandelt wird, kann man zunächst die Bedeutung der 1 als additivem Erzeugenden von $\mathbb{N}$ herauszustellen und im Kontrast dazu die Primfaktorzerlegung als Aussage zu benutzen, daß die Primzahlen (zusammen mit der 1) die „multiplikativen Bausteine“ der natürlichen Zahlen darstellen.

Die Teilbarkeitslehre kann auch Ausgangspunkt für einen Ausflug in die Restklassen sein. Sehr motivierend sind erfahrungsgemäß die „Uhrenarithmetik“ und das „Kodieren“. Dabei kann man mit Erfolg Verknüpfungstafeln, aber auch „Verknüpfungsscheiben“ benutzen. In diesem Zusammenhang wird man es sich nicht entgehen lassen, den Schülern deutlich zu machen, daß $2\cdot 2$ zwar nach Adam Riese 4 sein muß, aber z.B. auch 1 sein kann (modulo 3).

6./7. Jahrgangsstufe: *Verknüpfungen von Bruchzahlen und rationalen Zahlen*

Entscheidend in der 6. Jahrgangsstufe ist die Erarbeitung der Bruchzahlen. Hier wird erstmals ein Erweiterungsbereich gefunden, in dem der Mangel der fehlenden Abgeschlossenheit einer Verknüpfung, nämlich der Division beseitigt ist. Zugleich erfahren die Schüler, daß die Verknüpfungen im Erweiterungsbereich die alten Verknüpfungen von $\mathbb{N}$ fortsetzen. Diese Einsicht ist sowohl für das praktische Rechnen von großer Bedeutung (s. [40]) als auch für die Entwicklung des Verstehens. In einer Reflexionsphase wird man das deutlich machen. In der Reflexionsphase wird man auch die Eigenschaften der Verknüpfungen in Q^+ herausarbeiten. Dabei entdecken die Schüler die Inversen bezüglich der Multiplikation. Ein Problem ist hier allerdings, daß die negativen Exponenten noch nicht zur Verfügung stehen. Man wird also das multiplikative Inverse von r zunächst vielleicht mit $\bar{r}$ bezeichnen. Man findet also

$$\overline{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

und kann nun leicht Rechenregeln von den Schülern herleiten lassen. Eine Fülle anregender Aktivitäten zu einer strukturorientierten Bruchrechnung gibt WINTER (1976). Auch in Q^+ kann man neue Verknüpfungen als „Kontrastbeispiele“ bringen, etwa wieder die Minimum- und Maximumbildung, die entsprechend fortgesetzt werden. Aber auch z.B. die Mittelbildung

$$a \square b = \frac{a+b}{2}$$

In der 7. Jahrgangsstufe wird mit der Erweiterung von Q^+ zu Q auch die Abgeschlossenheit der Subtraktion erreicht. Wieder werden analoge Betrachtungen zur Fortsetzung einer Verknüpfung angestellt. Man sollte betonen, daß in Q nun $a+x=b$ und in $Q\backslash\{0\}$ nun $a \cdot x=b$ unbeschränkt lösbar sind. Auch hinsichtlich der Addition wird das Inverse betrachtet. Es ist letztlich die Rechtfertigung für die Bildung der „Gegenzahl“, die sonst vielen Schülern etwas verschwommen bleibt.

Wurden Verknüpfungen zunächst für natürliche Zahlen, dann für Bruchzahlen und schließlich für rationale Zahlen betrachtet, so wird es im folgenden darum gehen, auch andere mathematische Objekte zu verknüpfen.

8.-10. Jahrgangsstufe: *Verknüpfungen von Abbildungen und Funktionen*

In der 8. Jahrgangsstufe erfahren die Schüler beim Hintereinanderausführen von Abbildungen in der Geometrie, daß mit der Verkettung von Abbildungen eine Verknüpfung andersartiger Objekte gegeben ist. Die Assoziativität läßt sich allgemein zeigen, die Kommutativität ist dagegen nicht immer gegeben. Die Abgeschlossenheit hängt von der gewählten Abbildungsmenge ab.

Man kann dies zum Anlaß nehmen, den Begriff des Verknüpfungsgebildes einzuführen. Doch das bringt keinen wesentlichen Zuwachs an Einsicht. Man kann auch ohne diesen Begriff Sätze gewinnen und formulieren wie: Die Verschiebungen sind bezüglich der Verkettung abgeschlossen.

In der 9. Jahrgangsstufe werden mit der Erweiterung des Zahlbereichs von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen die Verknüpfungen fortgesetzt.

Auch bei den Abbildungen werden neue Typen verkettet, indem man mit Hilfe der zentrischen Streckungen zu den Ähnlichkeitsabbildungen gelangt. Für den Nachweis der Abgeschlossenheit benötigt man die Umkehrung des Satzes von Desargues. So hängt diese Eigenschaft an einem tiefliegenden geometrischen Satz.

Bei der Behandlung der quadratischen Funktion $x \to x^2$ lernen die Schüler eine Funktion kennen, die multiplikationstreu aber nicht additionstreu ist. Damit kommt die *Verknüpfungstreue* von Funktionen ins Blickfeld. Die Untersuchung von Funktionen auf Verknüpfungstreue wird dann aber vor allem in der 10. Jahrgangsstufe bei den Potenzfunktionen, den Exponentialfunktionen, den Logarithmusfunktionen und den trigonometrischen Funktionen interessant.

In der 10. Jahrgangsstufe kann man auch damit beginnen, Funktionen zu verknüpfen. (Intuitiv wurden allerdings mit der Verkettung von Operatoren bereits sehr früh Funktionen verknüpft!). Im Verständnis des Funktionsbegriffs wird mit der Auffassung der Funktionen als verknüpfbaren Objekten eine höhere Stufe erreicht. Für das Verstehen des Verknüpfungsbegriffs bedeutet dies eine weitere Verallgemeinerung zu den Funktionen hin.

Im Bereich der Zahlen haben die Lernenden in der Sekundarstufe I Verknüpfungen über immer umfassendere Zahlbereiche betrachtet. Außerdem haben sie gelernt, mit Abbildungen in der Geometrie und Funktionen in der Algebra auch andere Objekte zu verknüpfen. Mit den betrachteten Verknüpfungen in den unterschiedlichsten Bereichen ist ein umfassender Vorrat von Verknüpfungen mit vielen gemeinsamen, aber auch sehr unterschiedlichen Eigenschaften gewonnen worden. Damit ist eine tragfähige Grundlage für Strukturbetrachtungen in der Oberstufe geschaffen.

Ansatzpunkte zu Strukturbetrachtungen in der Sekundarstufe II

(1) Themenkreis: Relle Zahlen

Zu Beginn der Sekundarstufe II ist es ein wichtiges Anliegen, die erworbenen Kenntnisse über reelle Zahlen zu sichern und zu vertiefen, so daß man eine brauchbare Grundlage vor allem für die Analysis erhält. Damit die Schüler nicht den Eindruck einer bloßen Wiederholung haben, bietet es sich an, mit einer neuartigen Fragestellung anzusetzen. Dies kann z.B. eine Analyse des Bereichs unter strukturellen Gesichtspunkten sein, bei der man zunächst die Körpereigenschaften herausarbeitet und dann zum Begriff des Körpers gelangt. Klassisch vollzieht man damit den Übergang von einem Zahlkörper zum „abstrakten Körper“ (HASSE 1930). Mit den rationalen Zahlen und den Restklassen nach einer Primzahl hat man weitere Beispiele für Körper, die in der Theorie der Körper eine wichtige Rolle spielen.

Eine Übung im Herleiten von Formeln auf der Grundlage der Körperaxiome kann die Herleitung allgemeiner Bruchrechenregeln sein: Man definiert für Elemente a, b des Körpers mit $b \neq 0$ zunächst den Bruch

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Dann kann man zeigen:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad .$$

Diese Regeln werden zwar ständig benutzt, meist aber nicht auch für reelle Zahlen bewiesen, sondern in $\mathbb{R}$ stillschweigend übernommen.

(2) Themenkreis: Komplexe Zahlen

In Fortsetzung zum vorangegangenen Themenkreis kann man Körperbetrachtungen fruchtbar machen, indem man den Übergang von den reellen zu den komplexen Zahlen als Körpererweiterung behandelt (s.a. STEINER 1964). Der Fundamentalsatz der Algebra kann dann angeführt werden, um hervorzuheben, daß der Körper der komplexen Zahlen abgeschlossen ist (s. STEINER 1964, NEUBRAND 1984).

Die Betrachtung der Einheitswurzeln im Anschluß an den Satz von Moivre führt leicht auf den Begriff der Gruppe (z.B. NEUBRAND 1982). Zugleich beobachtet man dabei die Gleichartigkeit dieser Gruppen zu den Drehgruppen und den Restklassengruppen bezüglich der Addition. Dies führt zugleich zu dem Begriff der Isomorphie von Gruppen. Mit dem großen Vorrat an Beispielen für Gruppen, der den Schülern zur Verfügung steht, erkennen sie, daß hier sehr unterschiedliche Bereiche unter gemeinsamem Gesichtspunkt betrachtet werden, wobei der gemeinsame Gesichtspunkt eben die Gruppenstruktur ist. Andererseits ist der Begriff der Isomorphie geeignet, Typen von Gruppen zu erkennen. Dem Vorschlag von KIRSCH (1963) folgend, wird man damit beginnen, nacheinander einen Überblick über Gruppen mit 1,2,3,4 Elementen zu gewinnen. Auch die zyklischen Gruppen werden ins Auge fallen und man kann zu dem Satz kommen, daß alle unendlichen zyklischen Gruppen isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen und alle endlichen zyklischen Gruppen der Ordnung m isomorph zur additiven Gruppe der Restklassen modulo m sind. Damit sind immerhin einige nicht selbstverständliche Sätze der Gruppentheorie gefunden, die außerdem die Kenntnis über wichtige Bereiche vertiefen.

(3) Themenkreis: Vektorräume

Im Rahmen der linearen Algebra wird heute der Begriff des Vektorraums eingeführt. Dabei wird Wert darauf gelegt, daß die Schüler erkennen, daß es unterschiedliche Modelle gibt. Somit ist hier ein wesentliches Merkmal strukturellen Denkens gegeben. Es lassen sich auch leicht Folgerungen aus den Axiomen ziehen, so daß hier die Schüler etwas für die Untersuchung von algebraischen Strukturen Wesentliches erfahren können. Hinsichtlich der Typen von Vektorräumen sollten die Schüler den Satz kennenlernen, daß alle n-dimensionalen Vektorräume isomorph zum Vektorraum der n-tupel sind. Mit Vektorräumen von Folgen oder von Funktionen können sie Kontrastbeispiele gewinnen. Wie sich Strukturbetrachtungen an Folgenvektorräumen ansetzen lassen, ist von Weigand näher untersucht worden (WEIGAND 1993).

(4) Themenkreis: Schaltalgebra

Im Hinblick auf die Informatik erscheint es mir wichtig, auch an die Unterrichtsvorschläge zur Schaltalgebra zu erinnern (s. WINKELMANN 1974). Man muß es selbst erlebt haben, wie Schüler nach einer Einführung Feuer fangen und sich selbständig mit Fragen der Schaltalgebra und ihren Realisierungen auseinandersetzen, ehe man derartige Betrachtungen für den Mathematikunterricht als unergiebig abtut. Zunächst handelt es sich hier natürlich um Strukturbetrachtungen innerhalb eines konkreten Gegenstandsbereichs. Sie lassen sie jedoch am Ende über Aussagenlogik und Mengenalgebra zu allgemeineren Strukturbetrachtungen über Boolesche Algebren vertiefen (s. FISCHER 1965).

Alle diese Betrachtungen haben wir als Fortentwicklung von Betrachtungen über Verknüpfungen konzipiert. Sie vertiefen den Verknüpfungsbegriff und eröffnen in ihrer Allgemeinheit den Zugang zur höheren Algebra.

Ein historischer Exkurs über den Paradigmenwechsel der Algebra kann den Schülern die wissenschaftstheoretische Bedeutung dieses Ansatzes zeigen. Dabei sind große Teile des Vortrags von HASSE durchaus Schülern der Oberstufe zugänglich (s.a. Hasse 1930, 1970). Die Schüler erfahren dabei etwas von der Dynamik der Mathematik als Wissenschaft. Es ist eigentlich nicht zu verstehen, daß im Physikunterricht selbstverständlich wichtige Paradigmenwechsel z.B. in der Atomphysik behandelt werden, während mindestens ebenso tiefgehende Wandlungen des Denkens in der Mathematik den Schülern vorenthalten werden.

Literatur

Beck, H., Gruppentheorie und Schulgeometrie, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 64 (1933), 254-260

Bosch, F., Fladt, K., Hofmann, H., Kerst, B., Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 64 (1933), 201-207

Bourbaki, N., Die Architektur der Mathematik, Physikalische Blätter 17 (1961), 161-218

Brauer, R., H. Hasse, Höhere Algebra I, Fortschritte der Mathematik 52 (1928), 83

Damerow, P., Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I, Bd.1, Stuttgart (Klett-Cotta) 1977

Dreetz, W., Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen, 65 (1934), 85-88

Fischer, W.L., Boolesche Maschinen, Der Mathematikunterricht 11, Heft 2 (1965), 39-99

Griesel, H., Die Leitlinie Menge-Struktur im gegenwärtigen Mathematikunterricht, Der Mathematikunterricht 11, Heft 1 (1965), 40-53

Hasse, H., Höhere Algebra 1, Berlin (Göschen) 1926

Hasse, H., Höhere Algebra 2, Berlin (Göschen) 1927

Hasse, H., Die moderne algebraische Methode, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 39 (1930), 22-34

Hasse, H., Der Strukturbegriff in der Mathematik, Nova Acta Leopoldina, Abhandlungen der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina 35 (Neue Folge) (1970), 69-76

Haupt, O., Aus der modernen Algebra, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 37 (1931), 289-294

Haupt, O., Einführung in die Algebra, 1,2, Leipzig (Akademische Verlagsgesellschaft) 1929

Holland, G., Geometrie in der Sekundarstufe, Mannheim (Wissenschaftsverlag) 1988

Kirsch, A., Endliche Gruppen als Gegenstand für axiomatische Übungen, MU 9, Heft 4 (1963), 88-100

Kuhn, T.S., Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen, Frankfurt/Main (Suhrkamp) 1973

Laugwitz, D., Sinn und Grenzen der axiomatischen Methode, Der Mathematikunterricht 12, Heft 3 (1966), 16-39

Lenné, H., Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart (Klett) 1969

Neubrand, M., Einheitswurzeln - Fragen stellen, Vermutungen verifizieren, Wissen erwerben, Didaktik der Mathematik 10 (1982), 74-81

Neubrand, M., Kann der Fundamentalsatz der Algebra intuitiv zugänglich sein? Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim 1984, 259-262

Noether, E., Idealtheorie in Ringbereichen, Mathematische Annalen 83 (1921), 24-66

Padberg, F., Didaktik der Bruchrechnung, Mannheim (Wissenschaftsverlag) 1989

Perron, O., Algebra 1,2 Berlin (de Gruyter) 1927

Scholz, E., (Hrsg.) Geschichte der Algebra, Mannheim (Wissenschaftsverlag) 1990

Schwartze, H., Elementarmathematik aus didaktischer Sicht, Bd.1, Bochum (Kamp) 1980

Steiner, H.-G., Das moderne mathematische Denken und die Schulmathematik, Der Mathematikunterricht 5, Heft 4 (1959), 5-79

Steiner, H.-G., Elementare Beweise zum Fundamentalsatz der Algebra, Der Mathematikunterricht 10, Heft 2 (1964), 60-93

Steiner, H.-G., Moderne begriffliche Methoden bei der Behandlung der komplexen Zahlen, Der Mathematikunterricht 10, Heft 2 (1964), 5-35

Steiner, H.-G., Wie steht es mit der Modernisierung unseres Mathematikunterrichts? Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 11 (1965), 186-200

Steiner, H.-G., Elementare moderne Algebra, In: H. Behnke u.a. (Hrsg.), Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen, Stuttgart (Klett) 1969, 48-65

Steinitz, E., Algebraische Theorie der Körper, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 137 (1910), 167-309

Steinitz, E., Algebraische Theorie der Körper, Hrsg. von R. Baer und H. Hasse, Berlin (de Gruyter) 1930

Vollrath, H.-J., Didaktik der Algebra, Stuttgart (Klett) 1974

Vollrath, H.-J., Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht, Stuttgart (Klett) 1984

Vollrath, H.-J., Betrachtungen zur Entwicklung der Algebra in der Lehre, Mathematische Semesterberichte 38 (1991), 58-98

Vollrath, H.-J., Paradoxien des Verstehens von Mathematik, Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), 35-58

Waerden, B.L. van der, Moderne Algebra I,II, Berlin (Springer) 1930

Waerden, B.L. van der, On the sources of my book Moderne Algebra, Historia Mathematica 2 (1975), 31-40

Weber, H., Die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungslehre, Mathematische Annalen 43 (1893), 521-549

Weber, H., Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande, Braunschweig (Vieweg) 1912

Weidig, I., Stufungen im Geometrieunterricht der Hauptschule, In: H.-J. Vollrath (Hrsg.), Geometrie - Didaktische Materialien für die Hauptschule, Stuttgart (Klett) 1982, 19-30

Weigand, H.-G., Zur Didaktik des Folgenbegriffs, Mannheim (Wissenschaftsverlag) 1993

Weth, T., Zum Verständnis des Kurvenbegriffs im Mathematikunterricht, Hildesheim (Franzbecker) 1993

Weyl, H., Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 38 (1932), 177-188

Winkelmann, B., Untersuchungen zum didaktischen Ort der Booleschen Algebra im Rahmen einer modernen elementaren Algebra, Dissertation Universität Bielefeld 1974

Winter, H., Strukturorientierte Bruchrechnung, In: H. Winter, und E. Wittmann (Hrsg.), Beiträge zur Mathematikdidaktik, Festschrift für Wilhelm Oehl, Hannover (Schroedel) 1976, 131-165

Wittenberg, A.I., Bildung und Mathematik, Stuttgart (Klett) 1963 (2. Aufl. 1990)

Wittmann, W., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig (Vieweg) 1981 (6.Aufl.)

ZMNU (Schriftleitung), Gruppenbegriff und Abbildung im mathematischen Schulunterricht, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 65 (1934), 89-90