62. Dreisatzaufgaben als Aufgaben zu proportionalen Zuordnungen

Mathematik in der Schule 31 (1993), 209-221.

1. Dreisatzaufgaben in der Krise

Traditionell versteht man unter „Dreisatzaufgaben“ Aufgaben der Art:

> 5 kg Kartoffeln kosten 4,50 DM
> Wieviel DM kosten 3 kg dieser Sorte?

bzw.

> Für 5 Pferde reicht ein Hafervorrat 12 Tage.
> Wie viele Tage reicht er für 3 Pferde?

Die Bezeichnung *Dreisatz* hat sich historisch zunächst auf die drei Größenangaben („Sätze“) in den Aufgaben bezogen. Heute denkt man bei *Dreisatz* eher an das Lösungsverfahren in „drei Sätzen“:

> 5 kg Kartoffeln kosten 4,50 DM.
> 1 kg Kartoffeln kostet 4,50 DM:5 = 0,90 DM.
> 3 kg Kartoffeln kosten 0,90 DM$\cdot$3 = 2,70 DM.

bzw.

> Für 5 Pferde reicht ein Hafervorrat 12 Tage.
> Für 1 Pferd reicht der Hafervorrat 12 Tage$\cdot$5 = 60 Tage.
> Für 3 Pferde reicht der Hafervorrat 60 Tage:3 = 20 Tage.

Im folgenden werden wir „Dreisatzaufgaben“ und „Dreisatzverfahren“ unterscheiden.

Nach den ausführlichen Sachanalysen während der letzten 25 Jahre, die durch die Arbeiten von KIRSCH (1969) und ILSE (1971) angeregt wurden, ist es klar, daß man Dreisatzaufgaben sinnvoll nur noch als Aufgaben zu proportionalen und umgekehrt proportionalen bzw. antiproportionalen (KIRSCH 1969) Funktionen behandeln kann. Nur so ist ein Verständnis für die Struktur der Aufgaben und die entsprechenden Lösungsverfahren zu erzielen.

Man erkennt dann nämlich, daß es sich hierbei um die Aufgabe handelt, für eine gegebene Funktion zu einem gegebenen Wert den zugehörigen Funktionswert zu bestimmen. Dies ist eine für alle Funktionen grundlegende Fragestellung. Dreisatzaufgaben sind von daher mathematisch nichts Besonderes. Trotzdem nehmen sie im Mathematikunterricht nach wie vor eine ausgezeichnete Stellung ein, weil ihnen die wichtigen proportionalen bzw. antiproportionalen Funktionen zugrunde liegen. Diese werden wegen ihrer Einfachheit bei Modellbildungen bevorzugt. Aufgrund ihrer zahlreichen Eigenschaften ermöglichen sie vielfältige Lösungsverfahren. Dreisatzaufgaben und ihre Lösungsverfahren wurden daher in den letzten Jahren immer stärker in die Behandlung von Funktionen eingebunden. Dabei legt man einerseits Wert auf tragfähige Verfahren, indem man z.B. an der Tabelle arbeitet und Eigenschaften der Funktion ausnutzt; andererseits läßt man eine gewisse Methodenvielfalt zu, indem man z.B. auch algebraische Lösungen mit der Funktionsgleichung oder graphische Lösungen mit dem Graphen der Funktion behandelt. Im Laufe der Jahre näherten sich die Behandlungsweisen dieses Themas in der Bundesrepublik und der DDR einander an.

Vertrauend auf die Überzeugungskraft klarer Gedanken und einleuchtender und gut praktikabler Verfahren wurden Lehrer entsprechend ausgebildet, Lehrpläne geändert und Schulbücher neu gestaltet. Empirische Untersuchungen in beiden Teilen Deutschlands (KURTH 1992, STÖCKEL 1992, STOYE 1983, VIET 1989) geben ein ernüchterndes Bild. Es hat sich keineswegs ein einheitliches Lösungsverfahren allgemein durchgesetzt, und altbekannte Schwierigkeiten treten auch bei den modernen Methoden auf. Ist es verwunderlich, wenn Lehrpläne wieder die Dreisatzmethode empfehlen, ältere Lehrer zu ihren bewährten Verfahren zurückgehen und Eltern fordern, daß die Schule ihren Kindern beibringen soll, die Aufgaben genau so zu lösen, wie sie selbst es gelernt haben? Andererseits lassen sich sogar Stimmen vernehmen, die es als eine bedauerliche Beschränkung der kindlichen Kreativität betrachten, wenn der Unterricht eine bestimmte Methode favorisiert. Das Durcheinander ist komplett. Es erscheint mir daher nötig, in dieser Situation Bilanz zu ziehen und über wünschenswerte Entwicklungen nachzudenken.

2. Das Problem der Aufgabentradition

Dreisatzaufgaben finden sich seit frühester Zeit in vielen Kulturen. Im Papyrus Rhind lautet z.B. Aufgabe 69:

> *Aus* $3\frac{1}{2}$ hekat *Mehl wurden* 80 *Brote gemacht. Wieviel Mehl wurde für* 1 *Brot gebraucht? Wieviel Brote wurden aus* 1 hekat *Mehl gemacht?* (TROPFKE 1980, S. 359)

Aufgaben wie diese werden bis heute in den Schulbüchern tradiert. Zwar haben sich die Maße geändert, nicht aber die Fragestellungen.

Auch in der Umwelt treten derartige Fragen auf. Doch wirken manche Aufgabenstellungen auch abgesehen von den Maßangaben überholt. Im Super-Markt sind die Waren verpackt. Konnte man früher z.B. 135 g Zucker erhalten, so ist das heute kaum möglich. Mathematisch gesehen kann man diese Situation mit proportionalen Funktionen nicht mehr angemessen modellieren. Es läßt sich im Hinblick auf Wirklichkeitsnähe heute nicht mehr rechtfertigen, sich im Unterricht z.B. auf proportionale Ware-Preis-Funktionen zu beschränken. Man wird heute also auch Aufgaben stellen wie z.B.: Wieviel Porto kostet ein 30 g schwerer Brief innerhalb der Bundesrepublik?

Ist einerseits das Aufgabenangebot zu erweitern, so kann man andererseits ohne Verluste auf tradierte Aufgabentypen verzichten, z.B. auf die „Tauschaufgaben“:

> Wenn das Pfund Butter 9 Kreutzer kostet, und man für 6 Eier 1 Batzen zahlt, wie viele Eier bekommt man für 12 Pfund Butter?

Wirklichkeitsnähe im Mathematikunterricht erfordert also eine Änderung des Aufgabenmaterials und die Verwendung möglichst anpassungsfähiger Methoden. Das Angebot an Sachaufgaben im Mathematikunterricht ist daher an neue Entwicklungen in der Umwelt der Schüler anzupassen. Das bedeutet, daß neue Aufgaben aufzunehmen und überholte Fragestellungen wegzulassen sind.

Durch die Orientierung am Funktionsbegriff erhält man einen breiten Vorrat an leistungsfähigen Lösungsverfahren. Allerdings scheint eine etwas starre und dogmatische Handhabung solcher Methoden einen Teil der genannten Probleme verursacht zu haben.

3. Das Problem der Methodentradition

Was die Lösungsmethoden für Dreisatzaufgaben anbelangt, so war lange Zeit das Vorgehen von ADAM RIES typisch. Im zweiten Rechenbuch (1522) steht:

> *Dreisatz ist eine Regel von drei Dingen. Setze hinten, was du wissen willst: es heißt die Frage. Das Ding unter den anderen beiden, das die gleiche Benennung hat, setze vorne und dasjenige, das eine andere Benennung hat, setze in die Mitte. Danach multipliziere, was hinten und in der Mitte steht, miteinander. Was herauskommt, teile durch das vordere Ding. So erhältst du, wie teuer das dritte Ding kommt. Dieses hat die gleiche Benennung wie das mittlere, wie hier in folgendem Beispiel.* (DESCHAUER 1992, S. 29)

Er gibt dann zahlreiche Beispiele mit Lösungen (ohne sie allerdings vorzurechnen.) Im Laufe der Zeit entwickelt sich daraus ein Schema. Nehmen wir die Aufgabe:

> 6 Ellen Stoff kosten 9 Gulden. Wieviel Gulden kosten 4 Ellen?

Dies wird in der folgenden Form notiert und gelöst:

Ellen		Gulden		Ellen
6	---	9	---	4
				×
				<u>9</u>
				36:6 = 6

Das ist das klassische Dreisatzschema (*Regeldetri*). Natürlich ist ein derartig schematisches Vorgehen, bei dem ein Verfahren „blind“ angewendet wird, pädagogisch heute nicht mehr zu vertreten. Man muß aber sehen, daß damit damals viele Menschen in die Lage versetzt wurden, überhaupt diese wichtigen Aufgaben des Wirtschaftslebens zu lösen.

Später bemühte man sich in den Rechenbüchern darum, Verfahren darzustellen, die von den Benutzern verstanden werden können. So findet man z.B. in einem Handbuch für Volksschullehrer aus dem Jahre 1837:

> 3 Zentner *einer Ware kosten* 6 Gulden,
> *wie viel kosten* 9 Zentner?
> (HESSE 1837, S. 69)

Es werden zwei Lösungswege gegeben:

> *Da* 3 Zentner 6 Gulden *kosten, so kostet* 1 Zentner *den dritten Teil von* 6 Gulden *oder* 2 Gulden. *Mithin kosten* 9 Zentner 9 *mal so viel als* 1 Zentner, *oder* 18 Gulden.

Dies ist das bekannte *Dreisatzverfahren*.

Als zweite Lösungsmethode wird eine Verhältnisgleichung hergeleitet:

> *Hier verhalten sich* 3 Zentner *zu* 9 Zentner *wie der Preis von* 3 *Zentnern zu dem zu suchenden Preis von* 9 Zentnern, *oder: das Sovielfache* 9 Zentner *von* 3 Zentnern *sind, das Sovielfache muß der Preis der*

Preis der 9 Zentner *vom Preis von* 3 Zentnern, *oder von* 6 Gulden *sein. Wir bilden also die Gleichung:*

Zent.		Zent.		fl.		fl.
3	:	9	=	6	:	x“

Diese Verhältnisgleichung wird dann gelöst.

Beide Verfahren werden bis in unsere Zeit im Mathematikunterricht verwendet. Hier stellt sich natürlich die Frage, ob man sie zugunsten moderner Methoden aufgeben soll. Man sollte dabei nicht die Macht von Traditionen unterschätzen. Ich halte es für günstiger, derartig bewährte Verfahren möglichst in umfassendere Konzeptionen einzubetten, statt sie fallenzulassen. Wie das geschehen kann, will ich später zeigen.

4. Das Problem der Schultradition

Betrachtet man die Behandlung der Dreisatzaufgaben in den verschiedenen Schultypen, so lassen sich ebenfalls unterschiedliche Traditionen feststellen. In der Volksschule wurde das Dreisatzverfahren als eine allgemein tragfähige Methode zur Lösung zahlreicher Aufgaben aus unterschiedlichen Sachzusammenhängen behandelt. Von den Dreisatzaufgaben über die Prozent- und Zinsrechnung wurde dieses Verfahren vom 6. Schuljahr ab in allen Klassen verwendet. Dabei stufte man die Aufgaben sorgfältig. Zunächst wurden Aufgaben „von der Einheit auf die Vielheit“, dann „von der Vielheit auf die Einheit“ und schließlich „von der Vielheit auf die Vielheit“ bearbeitet. In der gymnasialen Tradition wurden dagegen eher die Proportionen bevorzugt. Die Dreisatzaufgaben wurden dort weitgehend isoliert ebenfalls im 6. Schuljahr behandelt.

Die Schulreformen seit den sechziger Jahren führten zu einer Vereinheitlichung des Mathematikunterrichts für alle Schüler. Sowohl in der Bundesrepublik wie in der DDR suchte man nach allgemeineren mathematischen Konzeptionen, die strukturelle Gesichtspunkte betonten und vermeiden sollten, bestimmte Schülergruppen mit speziellen Verfahren mathematisch in „Sackgassen“ zu führen.

Ich halte das im Grundansatz nach wie vor für berechtigt. Man sollte nur tragfähige Verfahren unterrichten, die für Entwicklungen offen sind. Aber ich meine doch, daß man auch die Sache selbst stärker respektieren muß. Denn in unterschiedlichen Sachbereichen werden bestimmte Verfahren benutzt, die unter Umständen von den in der Schule verwendeten abweichen. Ein allgemeinbildender Mathematikunterricht, dem es darum geht, die Schüler auf ein angemessenes Arbeiten mit Mathematik in der Umwelt vorzubereiten, hat unterschiedliche methodische Ausprägungen in verschiedenen Bereichen, die für die Zukunft der Schüler relevant sind, zu berücksichtigen.

5. Das Problem der Sachtraditionen

Im folgenden wollen wir einige wichtige Bereiche betrachten und skizzieren, wie in ihnen Dreisatzaufgaben zu proportionalen Zuordnungen behandelt werden.

(1) Beginnen wir mit *Preisberechnungen* zu proportionalen Ware-Preis-Funktionen aus dem Geschäftsleben. Nach aller Erfahrung spielt hier der Einheitspreis die zentrale Rolle.

Kennt man den Einheitspreis, so kann man durch Multiplikation den Gesamtpreis berechnen.

Beispiele:

1 Schokoriegel kostet 0,50 DM.

Wieviel kosten 3 Schokoriegel?

Hier wird gerechnet: Stückpreis mal Anzahl, also

$0{,}50 \text{ DM} \cdot 3 = 1{,}50 \text{ DM}.$

Oder:

1 kg Kartoffeln kostet 0,90 DM.

Wieviel kosten 5 kg Kartoffeln?

Hier wird gerechnet: kg-Preis mal Gewicht, also

0,90 DM/kg · 5 kg = 4,50 DM.

Soll man den Stückpreis ermitteln, dann wird durch die Anzahl dividiert, entsprechend beim kg-Preis durch das Gewicht.

Lehnt sich die Lösung dieser Aufgaben an das Schema der Schlußrechnung an, ohne es explizit zu verwenden, so wird die umgekehrte Fragestellung in der Praxis anders gelöst.

Beispiel: 5 Schokoriegel kosten 2,50 DM.

Wie viele Schokoriegel bekommt man für 3,00 DM?

Nach dem Schema der Schlußrechnung würde man nun fragen, wie viele Schokoriegel man für 1,00 DM erhält. In der Praxis bestimmt man aber zunächst den Einheitspreis, also

2,50 DM : 5= 0,50 DM und dividiert dann durch den Einheitspreis, also: 3,00 DM : 0,50 DM = 6.

Dieses Verfahren kann man gut schrittweise im Unterricht entwickeln. Im 5. und 6. Schuljahr bieten sich Preisberechnungen als Anwendungsaufgaben zu Multiplikation und Division von Größen an. Im 7. Schuljahr kann dann näher auf den Einheitspreis als Quotient aus Preis und Warenmenge im Zusammenhang von proportionalen Zuordnungen eingegangen werden.

(2) Bei *Währungsumrechnungen* arbeitet man meist mit dem Umrechnungsfaktor.

Beispiel: Für 10 DM erhält man 70 öS.

Wieviel öS erhält man für 15 DM?

Vergleicht man die Zahlen, so erkennt man, daß der Betrag in öS 7 mal so groß ist wie der DM-Betrag. Hier ist der Umrechnungsfaktor 7. Damit ergibt sich $15 \cdot 7 = 105$, also: Für 15 DM erhält man 105 öS. Will man umgekehrt wissen, wieviel DM einem bestimmten Betrag in öS entsprechen, so dividiert man durch 7.

Dieses praxisnahe Vorgehen kann man im Zusammenhang mit proportionalen Funktionen im 7. Schuljahr entwickeln, wenn man die Schüler zur Ausnutzung der unterschiedlichsten Eigenschaften proportionaler Funktionen ermutigt.

(3) Traditionell behandelt die Hauptschule auch *Prozent-* und *Zinsrechnung* mit Hilfe des Dreisatzes. In der Praxis dagegen wird mit Faktoren gerechnet.

Beispiel:

Bei einem 300 DM teuren Fahrrad wird der Preis um 5% erhöht. Wieviel DM kostet das Fahrrad nach der Preiserhöhung?

Man kann zunächst die Preiserhöhung berechnen:

5% von 300 DM bedeutet: $300\text{ DM} \cdot 0{,}05 = 15\text{ DM}$.

Also beträgt der neue Preis 300 DM + 15 DM = 315 DM.

Man kann den Endpreis auch kürzer direkt mit dem Wachstumsfaktor berechnen: $300\text{ DM} \cdot 1{,}05 = 315\text{ DM}$.

Schon seit langem wird vorgeschlagen oder angeordnet, Prozentrechnung derart praxisnah zu unterrichten und inhaltlich an die Bruchrechnung anzubinden. Doch auch hier erweisen sich Unterrichtstraditionen anscheinend als unüberwindbar (BERGER 1989).

Vielleicht gelingt es ja, diesen Weg mit Hilfe des Taschenrechners durchzusetzen. Doch sollte man auch hier nicht übertreiben. Natürlich wird auch in der Praxis ausgenutzt, daß z.B. 30% 3 mal so viel sind wie 10%.

(4) Beim Arbeiten mit *Formeln* in Naturwissenschaft und Technik spielen proportionale und umgekehrt proportionale Funktionen bei der Beschreibung der Zusammenhänge zwischen Größen eine fundamentale Rolle. Bei der Auswertung von Versuchen wird an der Tabelle ein Proportionalitätstest durchgeführt, indem man die Quotienten bzw. die Produkte der zugeordneten Größen bildet. Läßt sich eine Konstante im Rahmen der Meßgenauigkeit vermuten, so nimmt man Proportionalitäten bzw. umgekehrte Proportionalitäten an und hat zugleich den Proportionalitätsfaktor erhalten.

Beispiel:

Für Draht wird das Gewicht in Abhängigkeit von der Länge gemessen.

Länge in m	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
Gewicht in g	51,0	100,0	153,0	198,0	254,0
$\frac{Gewicht}{Länge}$ in $\frac{g}{m}$	51,0	50,0	51,0	49,5	50,8

Der Mittelwert für den Quotienten ist c = 50,5 $\frac{g}{m}$. Es erscheint gerechtfertigt, einen proportionalen Zusammenhang zwischen Länge L und Gewicht G anzunehmen. Mit der Formel $G = c \cdot L$ lassen sich nun zu gegebener Länge das Gewicht und zu gegebenem Gewicht die Länge berechnen.

Diese Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeiten in das Arbeiten mit Funktionen einbeziehen. Hier wird besonders deutlich, daß z.B. das Dreisatzschema viel zu eng ist.

Diese Beispiele aus verschiedenen Bereichen mögen genügen, um deutlich zu machen, daß das Schlußschema nicht unbedingt praxisnah ist. Zugleich erkennt man aber auch, daß es in der Praxis kein universell verwendetes Verfahren gibt, sondern daß sich in den unterschiedlichen Bereichen unterschiedliche Verfahren eingebürgert haben. Die Schule hat dies zur Kenntnis zu nehmen und aufzugreifen.

6. Funktionales Denken

Ein verständiges Lösen von Dreisatzaufgaben ist nur möglich, wenn die zugrundeliegende Beziehung zwischen den Größen als Funktion erfaßt und zur Lösung nutzbar gemacht wird. Dies bedeutet nicht notwendig bereits eine Beherrschung der entsprechenden Ausdrucksmittel und Methoden, wenn dies auch die Lösungsfähigkeiten verbessert. Sondern zunächst geht es um eine bestimmte Denkweise, die man traditionell als „funktionales Denken“ bezeichnet (VOLLRATH 1989). Dieses läßt sich im wesentlichen durch zwei Denkvorgänge beschreiben.

(1) Man sucht, beschreibt oder stiftet Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist eine andere zugeordnet, so daß die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.

Ausdruck dieses Denkens ist z.B. das Erkennen der Abhängigkeit zwischen Warenmenge und Preis einer Ware, zwischen Rauminhalt und Gewicht von Körpern aus gleichem Material; die Beziehung zwischen Länge und Gewicht von Drähten gleichen Querschnitts und Materials usw. Dies drückt sich in Schreibweisen wie $x \to y$ und $y = f(x)$ aus.

(2) Man betrachtet, untersucht oder beschreibt, wie sich Änderungen einer Größe auf eine abhängige Größe auswirken.

Dies drückt sich z.B. in Aussagen aus wie: verdoppelt sich das Gewicht, so verdoppelt sich der Preis; in doppelt so langen Zeiten werden doppelt so lange Wege zurückgelegt; je größer das Volumen ist, desto größer ist das Gewicht. Eine wichtige Ausdrucksform sind hier z.B. Funktionalgleichungen wie $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und für alle x des Größenbereichs.

Der erste Aspekt betont das „Zuordnungsverhalten“, der zweite das „Änderungsverhalten“ der Beziehung zwischen den Größen.

Notiert man den Zusammenhang zwischen den Größen mit Hilfe einer senkrecht geschriebenen Wertetabelle, so betont der erste Aspekt den „waagerechten Zusammenhang“, der zweite Aspekt dagegen den „senkrechten Zusammenhang“.

Beispiel:

$$\begin{array}{cc|cc}
 & \multicolumn{2}{c}{\xrightarrow{\cdot 3}} & \\
 & x & y & \\ \hline
 & 1 & 3 & \\
\cdot 2 \downarrow & & & \downarrow \cdot 2 \\
 & 2 & 6 & \\
\cdot \frac{3}{2} \downarrow & & & \downarrow \cdot \frac{3}{2} \\
 & 3 & 9 &
\end{array}$$

Mit Hilfe der Pfeile werden die verschiedenen Sichtweisen hervorgehoben.

Bis in die sechziger Jahre wurde im Unterricht bei der Betrachtung von Funktionen ausschließlich der erste Aspekt betont. Durch die Arbeiten von KIRSCH (1969) und ILSE (1971) erwachte dann das Interesse daran, auch dem zweiten Aspekt im Unterricht zu seinem Recht zu verhelfen.

Die Fähigkeit funktional zu denken, entfaltet sich im Unterricht mit den gelernten Ausdrucksmitteln, Methoden und den behandelten Funktionstypen. Psychologische Untersuchungen legen es nahe, eine Entwicklung des funktionalen Denkens anzunehmen, die sich mit der allgemeinen Entwicklung des Denkens vollzieht. Hier waren vor allem die Arbeiten von PIAGET (1977) und seiner Schule sehr anregend. In einer Fülle von Untersuchungen sind wichtige Stadien in der Entwicklung des funktionalen Denkens beschrieben worden. Man kann grob folgende Stadien beobachten:

(1) Kinder erkennen keinen Zusammenhang zwischen den Größen.

(2) Kinder vermuten einen zufälligen Zusammenhang zwischen den Größen.

(3) Kinder erkennen einen monotonen Zusammenhang zwischen den Größen. (Je mehr, desto mehr.)

(4) Kinder erkennen einen proportionalen Zusammenhang.

Liegt kein proportionaler Zusammenhang vor, sondern etwa eine quadratische Funktion oder eine Exponentialfunktion, dann sind solche Situationen nur unter dem Einfluß eines entsprechenden Unterrichts zu meistern.

PIAGET gibt für die einzelnen Stadien Altersintervalle an. Doch sind diese nicht unumstritten. Er nimmt an, daß im Alter von etwa 14 Jahren proportionale Zusammenhänge korrekt erfaßt werden. Auch wenn die Ergebnisse im einzelnen umstritten sein mögen, sollten sie doch die Lehrer dafür sensibilisieren, daß funktionales Denken einer Entwicklung bedarf, so daß Fehlleistungen der Kinder unter Umständen entwicklungsbedingt sind.

Im Hinblick auf die Befunde dieser Untersuchungen erscheint es mir günstiger, Dreisatzaufgaben erst im 7. Schuljahr zu behandeln, wie sich das in den alten Bundesländern weitgehend durchgesetzt hatte. Dagegen wurde in der DDR dieser Aufgabentyp bereits im 6. Schuljahr im Zusammenhang mit der Einführung in die Gleichungslehre behandelt (LORENZ 1979).

7. Arbeiten mit Funktionen

Dreisatzaufgaben lassen sich als Sonderfall der beiden Grundaufgaben sehen, bei gegebener Funktion zu einem gegebenen x-Wert den zugehörigen y-Wert bzw. zu gegebenem y-Wert die zugehörigen x-Werte zu bestimmen. Da es sich bei proportionalen bzw. antiproportionalen Funktionen um sehr spezielle Funktionen mit zahlreichen Eigenschaften handelt, ergeben sich für diese Aufgaben natürlich auch zahlreiche Lösungsmöglichkeiten. Dabei drücken sich diese Eigenschaften in den verschiedenen Darstellungen ganz unterschiedlich aus. Wir wollen das an einem einfachen Beispiel für die *sprachliche Darstellung,* die *Tabelle,* die *graphische Darstellung* und die *Funktionsgleichung* zeigen.

Beispiel: 5 kg Äpfel kosten 15,00 DM. Wieviel kosten 4 kg dieser Sorte?

(1) *Vielfachgleichheit* (sprachliche Darstellung)

5 kg kosten 15,00 DM,

1 kg ist der 5. Teil davon, kostet also auch den 5. Teil. Also 15,00 DM:5 = 3,00 DM.

4 kg sind 4 mal so viel, kosten dann auch 4 mal so viel, also 3,00 DM$\cdot$4=12,00 DM

(2) *Verhältnisgleichheit* (sprachliche Darstellung)

Die Preise verhalten sich wie die Gewichte,

also $\frac{x}{15} = \frac{4}{5}$. Das ergibt x = 12.

(3) *Proportionalitätsfaktor* (sprachliche Darstellung)

5 kg kosten 15 DM. Die Maßzahl des Preises ist also 3 mal so groß wie die Maßzahl des Gewichts. Also kosten 4 kg dieser Sorte 3 · 4 DM = 12 DM.

Entsprechend erhält man die folgenden drei Verfahren an der Tabelle:

(4) *Vielfachengleichheit* (Tabelle)

	Gewicht	Preis	
	5 kg	15 DM	
:5 ↓			↓ :5
	1 kg	3 DM	
· 4 ↓			↓ · 4
	4 kg	12 DM	

(5) *Verhältnisgleichheit* (Tabelle)

Gewicht	Preis
5 kg	15 DM
4 kg	12 DM

$$\frac{5}{4} = \frac{15}{x}$$

(6) *Proportionalitätsfaktor* (Tabelle)

$$\xrightarrow{\cdot\, 3}$$

Gewicht in kg	Preis in DM
5	15
4	12

(7) *Zeichnerische Lösung*

Durch den Ursprung und durch den Punkt (5 kg;15DM) ist die Ursprungsgerade festgelegt. Aus dem Schaubild wird nun der zu dem Gewicht 4 kg gehörige Preis von 12 DM abgelesen.

(8) *Formelrechnen mit der Funktionsgleichung*

Für die Abhängigkeit des Preises P vom Gewicht G wird die Gleichung

$$P = c \cdot G$$

angenommen. Zunächst wird durch Einsetzen von G = 5 kg und P = 15 DM der Proportionalitätsfaktor c bestimmt.

$$15 \text{ DM} = c \cdot 5 \text{ kg}.$$

Daraus erhält man

$$c = 3 \frac{DM}{kg}.$$

Setzt man den gefundenen Wert für c und G = 4 kg, so ergibt sich

$$P = 3 \frac{DM}{kg}. \; 4 \; kg = 12 \; DM.$$

Damit haben wir die wichtigsten Lösungstypen angesprochen.

Das Lehren des Funktionsbegriffs erfolgt im Mathematikunterricht in Stufen (VOLLRATH 1974). Mit den Darstellungsmöglichkeiten entwickeln sich auch die Methoden. Löst man die Dreisatzaufgaben im 7. Schuljahr zunächst sprachlich, dann mit Hilfe der Tabelle und schließlich zeichnerisch, so kann man sie im 8. Schuljahr algebraisch lösen mit Hilfe der Funktionsgleichung.

8. Hinweise für den Unterricht

Aus den Überlegungen, Erfahrungen und empirischen Befunden ergeben sich die folgenden Forderungen für den Unterricht:

(1) Dreisatzaufgaben sind in Funktionsbetrachtungen einzubetten.

(2) Den Schülern ist die Einsicht zu vermitteln, daß die Annahme einer bestimmten Funktion eine Modellbildung darstellt, deren Berechtigung überprüft werden muß. Die behandelten Situationen sollten sich nicht auf solche beschränken, die durch proportionale oder antiproportionale Funktionen modelliert werden können.

(3) Zur Beschreibung und Lösung der Aufgabe sind verfügbare Darstellungsmittel der Funktion zu verwenden.

(4) Lösungsverfahren sind aus Funktionseigenschaften zu entwickeln, die von den Schülern erkannt sein müssen.

(5) Den Schülern sollte die Möglichkeit geboten werden, selbst für sie neue Lösungsmethoden zu entdecken und zu nutzen.

(6) Beim Lösen von Dreisatzaufgaben sollten tragfähige Lösungsverfahren im Vordergrund stehen.

(7) Die Schüler sind zu einem beweglichen Arbeiten mit unterschiedlichen Verfahren anzuhalten, bei dem sie sich an die Sachsituation und an die Daten der Aufgaben anpassen.

(8) Es ist dafür zu sorgen, daß die gewählte Lösungsmethode dem Wissens- und Könnensstand der Schüler entspricht und der Sache angemessen ist.

(9) Sachsituationen erfordern es, die Sinnhaftigkeit einer rechnerisch gefundenen Lösung zu kontrollieren.

Für nähere Erläuterungen kann man auf die einschlägige didaktische Literatur verweisen (VOLLRATH 1974, LORENZ,PIETZSCH 1979, STREHL 1979, FRICKE 1982).

Zum Schluß noch ein Wort zum „Verstehen“. Die angemessene Behandlung einer Sachaufgabe setzt einerseits das Verstehen der Sachsituation voraus. Vor jeder Rechnung ist also über die Situation zu sprechen, um sicherzustellen, daß die Schüler die Situation verstehen. Andererseits ermöglichen Funktionsbetrachtungen und die Verwendung entsprechender Methoden ein tieferes Eindringen in die Sache. Durch die Behandlung der Aufgabe wird ein vertieftes Verständnis der Sachsituation ermöglicht. Verstehen ist also zugleich Voraussetzung und Resultat einer gelungenen Bearbeitung einer Dreisatzaufgabe.

All diese Überlegungen dürften deutlich gemacht haben, daß es bei den Dreisatzaufgaben kein „Zurück zu Adam Ries“ geben kann.

Literatur

Berger, R., Prozent- und Zinsrechnung in der Hauptschule, Regensburg 1989

Deschauer, S., Das zweite Rechenbuch von Adam Ries, Braunschweig 1992, S. 29

Fricke, A., Sachrechnen, Stuttgart 1982

Heße, W., Die Anfangsgründe der Zahlenlehre für Lehrer in Real- Bürger- und Volksschulen, 2. Teil. Gießen 1837, S. 69

Ilse, D., Über funktionale Charakterisierungen der direkten Proportionalität $f(x)=c\cdot x$, MSch9 (1971), 16-37

Kirsch, A., Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung, MPSB 16 (1969), 41-55

Kurth, W., Proportionen und Antiproportionen, JMD 13 (1992) 311-343

Lorenz, G. u. G. Pietzsch, Einführung in die Gleichungslehre; Proportionalität; In: Autorenkollektiv, Methodik Mathematikunterricht, Berlin Freiburg 1979

Piaget, J. u.a., Epistemologie und Psychologie der Funktionen, Stuttgart 1977

Stoye, W., Was wissen unsere Schüler vom Funktionsbegriff -Ergebnisse einer Schülerbefragung, Wiss.Z. Humboldt Univ.Berlin, Math.-Nat.R.31 (1983), 71-76

Stöckel, E., Zurück zum Dreisatz?, Msch 30 (1992), 4-14

Strehl, R., Grundprobleme des Sachrechnens, Freiburg 1979

Tropfke, J., Geschichte der Elementarmathematik, Bd.1, Berlin 1980. S. 359

Viet, U., Proportionen und Antiproportionen. Methoden und Ergebnisse einer empirischen Untersuchung, BzMU 1986, S. 48-57

Vollrath, H.-J., Funktionales Denken, JMD 10 (1989), 3-37

Vollrath, H.-J., Didaktik der Algebra, Stuttgart 1974, S. 611-63