61. Paradoxien des Verstehens von Mathematik

Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), 35-58.

1. Verstehen von Mathematik als didaktische Grundkategorie

Nimmt man die Auffassung MARTIN WAGENSCHEINS ernst: „Verstehen des Verstehbaren ist ein Menschenrecht!“ (1970, S. 419), so muß das Verstehen eine fundamentale Kategorie der Mathematikdidaktik sein. Es ist deshalb nicht verwunderlich, wenn in der Mathematikdidaktik mit großer Selbstverständlichkeit vom Verstehen von Mathematik gesprochen wird. In den letzten Jahren ist jedoch das Bedürfnis gewachsen, diese Kategorie kritisch zu betrachten. Zunächst versuchte man, näher zu beschreiben, was es heißt, einen Begriff, einen Satz, ein Verfahren „verstanden zu haben“ (DYRSZLAG 1972, VOLLRATH 1974, SKEMP 1976, HERSCOVICS u. BERGERON 1983, VOLLRATH 1984). Diese Betrachtungen lassen sich unter dem Aspekt kognitionstheoretischer Modelle mathematischer Lernprozesse deuten (HASEMANN 1988). Das Bemühen, Verstehen als Ergebnis eines Lernprozesses objektiv zu erfassen und zu beschreiben, lieferte für empirische Untersuchungen und für die Unterrichtspraxis handhabbare Verfahren (z.B. BAUER 1978, DAVIS 1978, VOLLRATH 1984, WEIGAND 1988).

Andererseits zeigten kommunikationstheoretische Untersuchungen erhebliche Unterschiede zwischen dem Verständnis von Lehrern und Schülern (z.B. ANDELFINGER 1984). Unter dem Einfluß des Konstruktivismus wird Verstehen als „Sinnkonstruktion“ gesehen (z.B. MAIER 1988). Unterschiede des Verstehens lassen sich damit als unterschiedliche Sinnkonstruktionen deuten. Verstehen wird schließlich dialektisch betrachtet als Prozeß und Produkt, wobei Sinn zugleich Voraussetzung und Ergebnis ist (KEITEL, OTTE, SEEGER 1980). Interessant ist natürlich, wie Lehrer mit der Kategorie des Verstehens im Alltag umgehen und wie ihre Sicht durch das Fachstudium, durch didaktische

Betrachtungen und persönliche Erfahrungen geprägt ist. Hierzu gibt es Fallstudien (z.B. HEYMANN 1982), aus denen subjektives Lehrerwissen erschlossen wird, das „Elemente der subjektiven Unterrichtstheorie eines Lehrers" (S. 41) repräsentiert. Diese grundsätzlichen Überlegungen und Befunde erfordern es, Verstehen als Ziel neu zu überdenken (z.B. BENDER 1991).

2. Verstehen als ein vielschichtiger Begriff

„Verstehen" wird in unterschiedlicher Weise benutzt und auch erforscht (ENGELKAMP 1984). Es kann ganz schlicht akustisches Verstehen, aber auch wesentlich anspruchsvoller menschliches Verstehen zwischen Freunden bedeuten. Uns interessiert hier *mathematisches* Verstehen. Verstehen von Mathematik kann sich auf das unmittelbare Erfassen einer Aussage beziehen, wie z.B. „2 ist die einzige gerade Primzahl". Es kann auch das Ergebnis eines längeren Nachdenkens sein, wie z.B. die Einsicht in „das Nichtabbrechen der Primzahlfolge", wie es ja eindrucksvoll von WAGENSCHEIN (1970^2) beschrieben worden ist. Schließlich kann es das Erfassen einer metaphorischen Aussage (KEITEL, OTTE, SEEGER 1980) beinhalten, wie etwa: „Primzahlen sind die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen."

Wissenschaftstheoretisch spielt bekanntlich der Begriff des Verstehens eine Schlüsselrolle in den Geisteswissenschaften. Während es nach DILTHEY (1900) in den Naturwissenschaften nur um das auf die Sache bezogene „Erklären" geht, soll in den Geisteswissenschaften durch die Hermeneutik die Beziehung zwischen Mensch und Geistigem im „Verstehen" erfaßt werden. Denkt man an die alte Diskussion, ob es sich bei der Mathematik um eine Naturwissenschaft oder um eine Geisteswissenschaft handelt (z.B. KOENIGSBERGER 1913), dann spitzt sich das auf die Frage zu, ob es in der Mathematik um Erklären oder Verstehen geht.

Ich meine, daß man das in der Mathematik gar nicht trennen kann. Auch Mathematik trägt „menschliche Züge". In einem fortgeschrittenen Stadium der

Theorieentwicklung rückt zwar der persönliche Stil des Einzelnen immer mehr in den Hintergrund. In stürmischen Entwicklungsphasen konkurrieren aber unter Umständen verschiedene Mathematiker miteinander, die jeweils einen eigenen Denkstil entwickeln, der bei anderen möglicherweise auf Unverständnis stößt. So beschreibt KLEIN die Entwicklung der Funktionentheorie im vorigen Jahrhundert, indem er die unterschiedlichen Charaktere der beiden für diese Entwicklung entscheidenden Mathematiker RIEMANN und WEIERSTRASS schildert:

> „Riemann ist der Mann der glänzenden Intuition. Durch seine umfassende Genialität überragt er alle seine Zeitgenossen. Wo sein Interesse geweckt ist, beginnt er neu, ohne sich durch Tradition beirren zu lassen und ohne einen Zwang der Systematik anzuerkennen.
>
> Weierstraß ist in erster Linie Logiker; er geht langsam, systematisch, schrittweise vor. Wo er arbeitet, erstrebt er die abschließende Form.“ (KLEIN 1926, S. 246)

Jeder von beiden gab der Funktionentheorie ein eigenes Gepräge, in dem sich bestimmte Wesenszüge von ihm niederschlugen und das auch heute noch erkennbar ist.

Wenn Mathematiker über Verstehen sprechen, dann beziehen sie das häufig erkenntnistheoretisch auf das Verstehen grundlegender Phänomene *durch* Mathematik. So sieht WEYL z.B. in der Topologie und der abstrakten Algebra „zwei verschiedene Wege des Verstehens“ (WEYL 1932, S. 178).

Einen mathematischen Begriff verstehen, heißt in diesem Sinne, durch eine mathematische Theorie Einsichten in den Begriff zu gewinnen. So liefert z.B. die Topologie *topologische* Einsichten, die Algebra *algebraische* Einsichten in die reellen Zahlen. Umgekehrt wird natürlich auch die Theorie von den Begriffen her verstanden. Allerdings scheinen sich häufig weder die Wissenschaftler noch die Lehrer dieser Komplementarität bewußt zu sein. So urteilt OTTE recht pauschal: „In der Wissenschaft wird das Beispiel durch die Theorie erklärt, in der Schule ist es umgekehrt.“ (OTTE 1978, IV).

Besonders in Zeiten des Umbruchs, in denen z.B. ein Paradigmenwechsel stattfindet, kann allerdings unter Umständen eine ganze Generation von Mathematikern erhebliche Schwierigkeiten haben, das Neue zu verstehen. Man denke etwa an den Paradigmenwechsel in der Algebra Ende der zwanziger Jahre, als aus einer Theorie der Gleichungen eine Theorie der algebraischen Strukturen wurde (VOLLRATH 1991).

Vor allem, wenn Mathematiker ihre Einsichten Interessierten vermitteln wollen, die keine Spezialisten auf diesem Gebiet sind, sind sie mit dem Verstehen als einem didaktischen Problem konfrontiert. Dann geht es um das Verstehen von Mathematik.

Zwar hat manch ein Interessierter leidvolle Erfahrungen mit dem Bemühen um Verstehen von Mathematik gemacht. „Und doch besteht bei vielen Menschen, ungeachtet der Stufe ihrer Ausbildung, der Wunsch nach einem Verständnis dessen, was die Mathematik als das Produkt einer Jahrtausende alten Tradition und als ein integrierender Bestandteil unserer Kultur bedeutet.“ (COURANT, ROBBINS 1962, S. V). So schreibt COURANT 1962 in seinem Vorwort zu „Was ist Mathematik?“.

Verstehen durch Mathematik und Verstehen von Mathematik sind in einem Spannungsverhältnis miteinander verbunden, dem sich auch der Mathematiker kaum entziehen kann. Dies kommt sehr schön in R. DEDEKINDS Buch: „Was sind und was sollen die Zahlen“ (1888) zum Ausdruck. Er stellt sich hier die Aufgabe, die gesamte Wissenschaft von den Zahlen auf folgender Grunderfahrung zu errichten:

> „Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden...“ (S. III)

Sein Aufbau des Zahlensystems wird dann doch sehr anspruchsvoll. Aber er ist trotzdem überzeugt:

> „Diese Schrift kann jeder verstehen, welcher das besitzt, was man den gesunden Menschenverstand nennt; philosophische oder mathematische Schulkenntnisse sind dazu nicht im geringsten erforderlich.“ (S. IV)

Es folgt dann allerdings eine Warnung:

> „Aber ich weiß sehr wohl, daß gar mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wiedererkennen mag;...“ (S. IV)

DEDEKIND will also mit seiner Theorie ein tieferes Verständnis gewinnen. Zugleich ist er sich dessen bewußt, daß gerade diese Theorie dem Lernenden Verständnisschwierigkeiten bereitet.

Mit diesen Zitaten wollte ich deutlich machen, daß jeder Mathematiker, der Mathematik mitteilen will, in diesem Spannungsverhältnis zwischen *Verstehen durch* und *Verstehen von* Mathematik steht. Ob er sich dessen immer bewußt ist und inwieweit er „angemessen“ darauf reagiert, ist freilich eine andere Frage. In diesem Spannungsverhältnis begegnen sich Erkennungstheorie und Didaktik und beziehen sich aufeinander. Das weist darauf hin, daß für den Mathematikunterricht keine einfachen, rezeptartigen Antworten auf Fragen des Verstehens zu erwarten sind.

3. Qualitäten des Verstehens

Mathematische Forschung bemüht sich um Erkenntnis über mathematische Objekte in ihren Beziehungen. Dies schlägt sich schließlich in theoretischen Darstellungen nieder, in denen die gewonnene Erkenntnis dargelegt ist. Die Qualität des Verstehens, die dadurch vermittelt werden kann, zeigt sich in der Allgemeinheit, der Lückenlosigkeit und Strenge als formalen Qualitäten und derReichhaltigkeit und Tiefe der Ergebnisse als inhaltlichen Qualitäten. Traditionell spielen bei der Bewertung vor allem formale Qualitäten eine besondere Rolle. Die inhaltlichen Qualitäten unterliegen einer stark subjektiven Wertung.

Es liegt heute eine Fülle hochentwickelter Theorien vor, deren inhaltliche und formale Qualität unbestritten ist. Wenn ich hier von einem Verstehen durch Mathematik spreche, dann meine ich damit ein durch die Theorie gegebenes Potential zum Verstehen mathematischer Phänomene, das sich dem Kenner in axiomatisch aufgebauter Darstellung besonders ökonomisch erschließt. Dieser axiomatische Aufbau bietet demjenigen, der diese Theorie selbst entwickelt hat, gedanklich ein Höchstmaß an Klarheit. Die Gefahr besteht freilich, daß er der Faszination durch die hohen formalen und inhaltlichen Qualitäten seiner Theorie erliegt, so daß er sich auch dann an ihnen orientiert, wenn er sie anderen mitteilen will. Das überfordert nach aller Erfahrung in der Regel das Gegenüber. Bildlich gesprochen verliert der Lernende durch die Allgemeinheit der Darstellung „den Boden unter den Füßen“, die Lückenlosigkeit der Argumentationskette zwingt ihn, „sich blind Schritt für Schritt voranzutasten“, die Strenge „nimmt ihm den Mut, eigene Wege zu gehen“, die Reichhaltigkeit überfordert ihn, so daß er „den Wald vor lauter Bäumen nicht sieht“, die Tiefe wird zu einem „Abgrund , der ihn erschauern läßt“.

Angesichts dieser Wirkungen liegt es auf der Hand, daß dies kein didaktisch vertretbarer Weg ist. Daß diese Wirkungen zwangsläufig eintreten müssen, wird gern und auch überzeugend damit erklärt, daß ja eine axiomatisch dargestellte Theorie das Endergebnis eines längeren Denkprozesses ist und daß man sie nur dann verstehen kann, wenn man als Lernender einen entsprechenden Denkprozeß durchläuft (z.B. WITTMANN 1974). Ich meine, daß die eigentlichen Ursachen noch tiefer in der Natur des mathematischen Erkenntnisprozesses verankert sind (s.a. JAHNKE 1978; OTTE 1978; KEITEL, OTTE, SEEGER 1980; STEINBRING 1988). Die angesprochenen Qualitäten treten in dem Spannungsfeld des Verstehens durch Mathematik und von Mathematik als Komplementaritäten auf: Allgemeinheit im Paar *Allgemeines – Besonderes*, die Lückenlosigkeit im Paar *Einzelheiten – Ganzes*, Strenge in Verbindung mit *Anschaulichkeit – Strenge*, die Reichhaltigkeit zusammen mit *Reichhaltigkeit*

– *Kern* und Tiefe im Paar *Resultat – Prozeß*.

Betrachtet man diese Komplementaritäten, so entstehen im Hinblick auf das Verstehen *Paradoxien*. Wenn ich hier von einer Paradoxie spreche, dann meine ich damit einen zunächst nicht einleuchtenden Satz, der wider Erwarten doch eine Wahrheit aussagt (Philosophisches Wörterbuch 1955). Ich will im folgenden versuchen, Paradoxien des Verstehens deutlich zu machen, die ihnen zugrunde liegenden Wahrheiten herauszuarbeiten und daraus didaktische Forderungen oder Prinzipien zu gewinnen.

4. Das Problem der Allgemeinheit

Für das Verstehen durch Mathematik ist die Allgemeinheit mathematischer Betrachtungen entscheidend, wobei es allerdings verschiedene Grade der Allgemeinheit gibt. Weyl nennt als Charakteristikum der „Prozedur des Verstehens“:

> „Man trennt die verschiedenen Seiten, die ein Gegenstand mathematischer Untersuchung darbietet, auf natürliche Weise, macht jede für sich von einer eigenen, relativ engen und leicht überblickbaren Gruppe von Voraussetzungen aus zugänglich und kehrt dann in der Vereinigung der passend spezialisierten Teilresultate zum komplexen Ganzen zurück“. (WEYL 1932, S. 177)

Erst durch einen solchen Prozeß werden Strukturen sichtbar und können Zusammenhänge erkannt werden. In allen Gebieten der Mathematik läßt sich daher eine starke Tendenz zur Verallgemeinerung beobachten. Ein typisches Beispiel ist die Entwicklung von der Analysis über metrische Räume zur Topologie. Für den Mathematiker ist es deshalb selbstverständlich, Theorien möglichst allgemein darzustellen. Es gibt allerdings auch, um mit POLYA zu sprechen, ein „Verallgemeinern durch Verdünnung, das die eigentliche mathematische Substanz nicht vermehrt, sondern die gute Suppe nur durch zugeschüttetes Wasser streckt“ (nach WEYL 1932, S. 178).

Für den Kenner führen sinnvolle Verallgemeinerungen zu vertieftem Verstehen durch Mathematik. Wie steht das aber mit dem Lernenden?

Lassen sich z.B. Strukturbegriffe wie Gruppe, Ring, Körper oder Vektorraum in ihrer Allgemeinheit überhaupt verstehen, ohne die Modelle und Fragestellungen zu kennen, aus denen sie erwachsen sind?

Kann man umgekehrt verstehen, daß z.B. immer neue Linien im Dreieck entdeckt werden können, die sich in einem „besonderen Punkt" schneiden, ohne die allgemeine Einsicht gewonnen zu haben, die der Satz von Ceva über die Dreieckstransversalen liefert?

Das ergibt folgende Paradoxie:

> *Man kann das Allgemeine nur verstehen, wenn man das Besondere verstanden hat. Man kann jedoch das Besondere nur verstehen, wenn man das Allgemeine verstanden hat.*

Nach dieser Paradoxie kann man weder das Allgemeine noch das Besondere verstehen, denn für welchen der beiden Bereiche man sich auch entscheidet, stets wird das Verständnis des anderen vorausgesetzt. Jeder Versuch ist danach zum Scheitern verurteilt. Trotzdem zeigt die Erfahrung, daß es möglich ist, sowohl das Allgemeine als auch das Besondere zu verstehen. Allen dogmatischen Äußerungen zum Trotz muß man sogar erkennen, daß es auf vielfältige Weise möglich ist. Entscheidend ist dabei, daß man sich der Paradoxie bewußt ist und sich angemessen verhält. Das führt zu den didaktischen Konsequenzen:

(1) Im Unterricht ist im Besonderen das Allgemeine sichtbar zu machen.

(2) In einem reflektierten Prozeß des Verallgemeinerns ist dem Lernenden das Allgemeine so zu erschließen, daß in ihm das Besondere gesehen wird.

Die erste Forderung findet ihren Niederschlag z.B. in FREUDENTHALS paradigmatischem Lehren (FREUDENTHAL 1973, S. 136-138). Hierher gehört auch das exemplarische Lehren (WAGENSCHEIN 1970, S. 102-110). Am Beispiel des Beweises für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zeigt FREUDENTHAL, daß man dieses Thema paradigmatisch behandeln kann, indem man es von der allgemeineren Frage her angeht, wie man Wurzeln möglichst genau berechnen kann. WAGENSCHEIN behandelt das „Nichtabbrechen der Primzahlfolge", indem er zunächst die allgemeinere Frage aufwirft, ob es eine allgemeine Formel für Primzahlen gibt. Diese Beispiele machen deutlich, daß es hier nicht um ein Problem der „Stoffauswahl" als vielmehr der „Stofforganisation" geht (SCHWARTZE, FRICKE 1983, S. 167).

Der Sinn dieser Forderung besteht darin, Lehrer und Lernende davor zu bewahren, sich im „Gestrüpp" der Details des Besonderen zu verfangen, sich im „Singulären" (FREUDENTHAL) zu verlieren. Zugleich soll damit Sorge getragen werden, daß das Allgemeine den Lernenden zugänglich gemacht wird.

Für die zweite Forderung weise ich besonders auf die Arbeiten von DÖRFLER zum Problem des Verallgemeinerns hin (DÖRFLER 1987). Dies ist in einem genetischen Unterricht zu realisieren (WITTMANN 1974). Als Beispiel denke ich etwa an die schrittweise Erarbeitung des Grenzwertbegriffs, bei der man von konkreten Folgen ausgeht, eine intuitive Vorstellung über Konvergenz entwickelt, die dann zu einem ersten Definitionsversuch führt. Indem man die Reichweite der Definition an Beispielen kritisch überprüft, wird man zu einem neuen Definitionsversuch veranlaßt, der nun wiederum kritisch überprüft wird. So gelangt man schließlich zu einer Definition, die für das Folgende zugrundegelegt wird. Ein solcher Prozeß ist für die Schüler natürlich überhaupt nur dann zu verstehen, wenn er angemessen reflektiert wird.

Wenn das Besondere auch im Allgemeinen enthalten ist, so muß man doch sehen, daß weder das Allgemeine vom Besonderen her, noch das Besondere vom Allgemeinen her bestimmt ist. Das bedeutet, daß man auch durch noch so geschickte „Methodisierungen" das Allgemeine nicht innerhalb des Besonderen lehren kann, sondern das Allgemeine muß durch einen bewußten und reflektierten Denkprozeß als etwas Neuartiges erarbeitet werden (STEINBRING

1988). Das gilt entsprechend natürlich auch für das Umgekehrte, wenn das auch gerade von Mathematikern häufig übersehen wird. Im Lernprozeß müssen also sowohl das Allgemeine als auch das Besondere erschlossen werden (JAHNKE 1978).

Sicher zu Recht dominiert in der Schule das Besondere. Aber COURANT sieht die Gefahr:

> „Der elementare Standpunkt der Schulmathematik verleitet dazu, an den Einzelheiten haften zu bleiben und den Blick für die allgemeinen Zusammenhänge und systematischen Methoden zu verlieren.“ (COURANT 1930, S. 2)

Andererseits kritisiert er zugleich die übertriebene Allgemeinheit der Universitätsvorlesungen, wenn er schreibt:

> „Der ‚höhere Standpunkt‘ der allgemeinen Methoden birgt aber die umgekehrte Gefahr in sich, daß der Zusammenhang mit dem konkreten Einzelnen verloren geht und daß man den einfachsten individuellen Schwierigkeiten ratlos gegenübersteht, weil man in der Welt allgemeiner Begriffe verlernt hat, das Konkrete zu sehen und zu fassen.“ (COURANT 1930, S. 2)

Ich meine daher, daß sowohl für den Mathematikunterricht an der Schule als auch für die Vorlesungen an der Hochschule beide didaktischen Forderungen Gültigkeit haben, wenn auch sicher die Akzente unterschiedlich zu setzen sind.

Wie ist in diesem Zusammenhang das didaktische Prinzip „Vom Besonderen zum Allgemeinen“ zu sehen? Es fordert, im Unterricht beim Einzelfall zu beginnen, um dann schließlich zum Allgemeinen vorzustoßen. Andererseits weiß man, daß didaktische Prinzipien differenziert zu betrachten sind und insbesondere ihr Gültigkeitsbereich kritisch zu erfassen ist (WITTMANN 1975).

Nehmen wir folgende Beispiele:

Im Unterricht behandelt man nacheinander 3-Ecke, dann 4-Ecke, vielleicht noch 5- und 6-Ecke. Dann aber geht man dazu über, n-Ecke zu betrachten.

Diese Reihenfolge ist sinnvoll, denn bei jedem folgenden Schritt kann man sich auf Eigenschaften der vorher betrachteten Figuren stützen. Andererseits betrachtet man bei den besonderen Figuren auch im wesentlichen solche Eigenschaften, die auch von allgemeinem Interesse sind (Winkelsumme, Konstruktionen, Umfang und Flächeninhalt).

Wenden wir uns nun dem Dreieck zu: Es wäre hier sicher schädlich, mit Sonderfällen zu beginnen. Man denke etwa an die bekannten Probleme, die sich daraus ergeben, daß Dreiecke immer in besonderer Lage gezeichnet werden oder wenn bei Beweisen immer spitzwinklige Dreiecke verwendet werden.

Diese Beispiele zeigen uns, daß das didaktische Prinzip relativiert werden muß: Es kann durchaus zweckmäßig sein, in bestimmten Situationen vom Allgemeinen zum Besonderen vorzugehen. KIRSCH zeigte, daß der Zugang vom Allgemeinen her für die Schüler sogar eine Vereinfachung darstellen kann (KIRSCH 1977). Statt z.B. mühsam und übersichtlich für jeden Typ von Kongruenzabbildungen die Assoziativität der Verkettung nachzuweisen, ist es einfacher und klarer, allgemein die Assoziativität der Verkettung von Abbildungen zu zeigen.

5. Das Problem der Lückenlosigkeit

Mathematische Lehrbücher legen großen Wert auf Lückenlosigkeit. Ein Beweis ist erst dann für eine Vermutung erbracht, wenn sich die Behauptung durch eine lückenlose Schlußkette herleiten läßt. Bei berühmten Vermutungen sind bereits riesige Schlußketten vorhanden, aber noch immer sind letzte Lücken nicht geschlossen. Die Forderung der Lückenlosigkeit ist also keine Frage der „mathematischen Ästhetik“ sondern der „mathematischen Ethik“. Im Vorwort zu seinem Buch „Grundzüge der Mengenlehre“ schreibt HAUSDORFF (1914):

> „... In einem Gebiet, wo schlechthin nichts selbstverständlich und das Richtige häufig paradox, das Plausible falsch ist, gibt es außer der lückenlosen Deduktion kaum ein Mittel, sich und den Leser vor Täuschungen zu

bewahren.“ (S. V)

Doch sieht man sich die Realität der Lehrbücher an, so haben sie damit große Schwierigkeiten. Verfolgen wir einmal ein klassisches Lehrbuch der Analysis über einige Auflagen, indem wir uns die in der 9. Auflage (1901) abgedruckten Vorreden der verschiedenen Auflagen ansehen. STEGEMANN schrieb 1862 in der Vorrede zu seinem „Grundriß der Differential- und Integralrechnung“ (1. Auflage):

> „Bei der Bearbeitung der vorliegenden Schrift habe ich gesucht, neben der Forderung wissenschaftlicher Strenge vor allen Dingen der didaktischen Forderung möglichster Faßlichkeit zu genügen.“ (KIEPERT 1901, S. III)

Kiepert berichtet in der Vorrede zur 5. Auflage (1887):

> „Als der Unterzeichnete den Auftrag erhielt, die neue Auflage dieses Werkes herauszugeben, ahnte er noch nicht, dass Aenderungen in so weitem Umfange nothwendig sein würden. Erst bei der Bearbeitung überzeugte er sich davon, dass sehr viele Lücken auszufüllen und zahlreiche Irrthümer, die sich in den früheren Auflagen finden, richtig zu stellen waren.“ (KIEPERT 1901, S. III-IV)

Er unterzieht das Buch also einer gründlichen Überarbeitung. Aber was muß er in der Vorrede zur 6. Auflage (1892) feststellen?

> „Die freundliche Aufnahme, welche die fünfte Auflage in weiten Kreisen gefunden hat, war für den Herausgeber ein Antrieb, bei der Bearbeitung der neuen Auflage mit grösster Sorgfalt die hervorgetretenen Mängel zu beseitigen und die vorhandenen Lücken auszufüllen. Den Herren Lampe, von Mangoldt, Franz Meyer, Runge und Voss, welche dabei den Herausgeber durch werthvolle Winke unterstützt haben, sei hierdurch der verbindlichste Dank ausgesprochen.“ (KIEPERT 1901, S. V)

Mathematiker jagen anscheinend einem Phantom nach, wenn sie Lückenlosigkeit und Fehlerfreiheit in ihren Werken erreichen wollen. Selbst LANDAU, der mit seinen „Grundlagen der Analysis“ (1930) einen lückenlosen Aufbau des Zahlensystems liefern wollte, läßt bewußt Lücken, indem er nicht alle Fälle beweist, sondern auf analoge Überlegungen verweist. Aber man hat ihm sogar gravierende Lücken nachweisen können. Auf dieses Buch komme ich später noch einmal zu sprechen. Wie schwer es aber Mathematikern und auch Mathematiklehrern fällt, sinnvoll mit dem Irrtum in der Mathematik umzugehen, ist von STELLA BARUK beeindruckend gezeigt worden (BARUK 1989).

Doch nun zum Verstehen: Einen Beweis wird man sicher nur dann vollständig verstanden haben, wenn man jeden Schritt verstanden hat. Aber Vorsicht, nach MESCHKOWSKI bemerkte ERHARD SCHMIDT über das Verstehen eines Beweises:

> „Verstanden hat man einen Beweis, wenn man die Zusammenhänge durchschaut, wenn man Wesentliches von Unwesentlichem unterscheiden kann, wenn man weiß, was man bei dem Beweisgang auch ändern könnte. Man kann sehr wohl jeden einzelnen Schritt einer Deduktion durchschauen, ohne doch den Beweis als Ganzes verstanden zu haben.“ (MESCHKOWSKI 1974, S. 77)

Ähnlich äußert sich WEYL (1932):

> „Wir geben uns nicht gerne damit zufrieden, einer mathematischen Wahrheit überführt zu werden durch eine komplizierte Verkettung formeller Schlüsse und Rechnungen, an der wir uns sozusagen blind von Glied zu Glied entlang tasten müssen. Wir möchten vorher Ziel und Weg überblicken können, wir möchten den inneren Grund der Gedankenführung, die Idee des Beweises, den tieferen Zusammenhang verstehen.“ (S. 177)

Wir sehen also, daß die Lückenlosigkeit eng zusammenhängt mit dem komplementären Begriffspaar: Einzelheiten - Ganzes. Als weitere Paradoxie des Verstehens erkennen wir:

> *Man kann das Ganze nur verstehen, wenn man die Einzelheiten verstanden hat. Man kann die Einzelheiten nur verstehen, wenn man das*

Ganze verstanden hat.

Mathematische Lehrbücher schließen Kompromisse. Einerseits verlangt z.B. OSTROWSKI:

> „Die Darstellung mathematischer Überlegungen hat unter allen Umständen in erster Linie der Forderung lückenloser Exaktheit und Klarheit zu genügen.“ (OSTROWSKI 1960, S. 15)

Andererseits räumt er ein, daß eine zu ausführliche Darstellung nicht nötig ist:

> „Wenn auch im Prinzip die Lückenlosigkeit der logischen Schlusskette verlangt wird, so brauchen doch nicht alle einzelnen Teilschlüsse immer wieder angegeben zu werden, da gewisse Gruppen von Schlüssen sich häufig wiederholen und auch beim Weglassen sofort wiedergefunden werden. Daher darf mit wachsender Übung die Darstellung immer knapper werden, ohne daß ihre Exaktheit leidet.“ (OSTROWSKI 1960, S. 15)

Liest man diese Forderungen, dann wird deutlich, daß sich der Autor in erster Linie der Mathematik verpflichtet weiß und daß sich der Leser dieser Autorität zu unterwerfen hat. Dabei muß man bedenken, daß die Leser z.B. zukünftige Gymnasiallehrer sind. Ist es verwunderlich, wenn auch sie Lückenlosigkeit anstreben? Sie erhalten hier eine im Hinblick auf ihren späteren Unterricht zu einseitige Sicht. Ist es verwunderlich, wenn vor allem Gymnasiallehrer sich auch in ihrem Unterricht dem Diktat der Lückenlosigkeit unterwerfen und den Schwierigkeiten der Schüler mit Kleinschrittigkeit begegnen? Kleinschrittigkeit und Lückenlosigkeit werden häufig als Heilmittel gesehen, HEYMANN (1982) nennt in diesem Zusammenhang das „Zerlegungskonzept“ zum Erreichen von Verstehen. Bei Schwierigkeiten werden die Schritte noch verkleinert, so daß die Behandlung immer aufwendiger wird. Derartige „Methodisierungen“ (KEITEL,OTTE,SEEGER 1980) oder falsch verstandene „Lernhilfen“ (WITTMANN 1989) können aber eine selbständige Auseinandersetzung des Lernenden mit den Problemen verhindern.

Selbständiges, zielgerichtetes Arbeiten mit Blick auf das Ganze weckt eher das Bedürfnis, die relevanten Einzelheiten zu klären.

Trotz dieser Einsichten erwarten die Lehrer aber gerade solche Methodisierungen und Lernhilfen von einem Schulbuch. Es ist deshalb verständlich, daß Kritiker von Schulbüchern leicht Beispiele für derartige Methodisierungen finden.

Um dem Lernenden Verstehen zu ermöglichen, müssen also auch die folgenden Forderungen erfüllt werden:

(3) Alles mathematische Lehren muß auf das Ganze bezogen sein.

(4) Benötigtes Wissen über Einzelheiten muß von den Lernenden als für das Ganze relevantes Wissen erkannt und von ihnen selbst erworben werden.

Man denke hier an die „ganzheitliche Sicht“ der Klassiker (z.B. KARASCHEWSKI 1969). Das Bemühen um das Ganze begründet auch den oft vom Lehrer geforderten „Mut zur Lücke“ (WAGENSCHEIN 1970, S. 155).

Ich halte es z.B. für eine falsch verstandene Hilfe, wenn man die Kongruenzabbildungen „häppchenweise“ erarbeitet: Achsenspiegelungen mit allen Einzelheiten in Klasse 5, entsprechend Drehungen in Klasse 6, Verschiebungen in Klasse 7, wie es im Prinzip (natürlich mit Varianten hinsichtlich der einzelnen Klassenstufen) in vielen Richtlinien vorgesehen ist. Ich finde es dagegen sinnvoll, alle wesentlichen Typen von Kongruenzabbildungen und vielleicht noch andere Abbildungen als Kontrastbeispiele jeweils im Zusammenhang in den einzelnen Klassenstufen auf unterschiedlichen Niveaus zu unterrichten. Einzelheiten treten dann von Stufe zu Stufe immer stärker in den Blick, wenn die Abbildungen und ihre Eigenschaften zunehmend gründlicher betrachtet werden (WEIDIG 1982).

Die Forderung nach Lückenlosigkeit in der Wissenschaft steht zum „Mut zur Lücke“ natürlich in krassem Gegensatz. Der Wissenschaftler argumentiert:

Und wenn nur ein kleiner Baustein fehlt, bricht das ganze Gebäude zusammen. Didaktisch gesehen sind mathematische Sachverhalte in einem Argumentationszusammenhang unterschiedlich zu bewerten. Die Lehrer müssen lernen, mathematische Sachverhalte im Hinblick auf das Verstehen angemessen zu bewerten und entsprechend ihr Lehrangebot zu akzentuieren (VOLLRATH 1988).

In meinen Forderungen ist aber noch ein weiteres Moment enthalten, das mir wichtig erscheint. Mathematik in Lehrbüchern wird als Wissen ausgebreitet. Der Autor stellt dabei einen Ausschnitt aus einem für den Lernenden unvorstellbaren Repertoire dar. „Verstanden haben“ heißt dann, dieses Wissen in sich aufgenommen zu haben und darüber verfügen zu können. „Mathematik im Unterricht verstehen“ ist jedoch ein Prozeß, in dem sich der Lernende selbst mit Mathematik auseinandersetzt. Das erfordert Freiräume zu eigenem Probieren, eigenen Zielsetzungen und Wertungen. Das Wechselspiel zwischen Informationsangebot und eigener Auseinandersetzung mit mathematischen Texten ist von KEITEL,OTTE und SEEGER (1980) als eine Paradoxie des Textverständnisses beschrieben worden.

6. Das Problem der Strenge

In den Zitaten aus den Analysisbüchern ist bereits die Forderung der „Strenge“ angeklungen. Wurde jedoch früher ein Spannungsverhältnis zwischen der mathematisch begründeten Forderung nach Strenge und den Schwierigkeiten der Lernenden gerade mit dieser Strenge gesehen und war man um einen Ausgleich bemüht, so dominiert im universitären Bereich heute weitgehend die Forderung nach Strenge. So schreibt z.B. HEUSER im Vorwort zu seinem „Lehrbuch der Analysis“ (1980):

> „Es versteht sich heutzutage von selbst, daß jede Darstellung der Analysis gemäß der axiomatischen Methode zu erfolgen hat: Der ganze Bestand analytischer Aussagen muß streng deduktiv aus einigen Grundeigenschaf-

> ten reeller Zahlen entfaltet werden. Jede mathematische Disziplin verdankt ihre Sicherheit, ihre Überzeugungskraft und ihre Schönheit dieser Methode.“ (S. 5)

Zitieren wir noch einmal COURANT, um die Gegenposition deutlich zu machen:

> „Es ist mein Bestreben, dem Leser eine deutliche Einsicht in die enge Verbundenheit der Analysis mit den Anwendungen zu vermitteln und – bei aller Wahrung mathematischer Strenge und Präzision – der Anschauung als dem Urquell mathematischer Wahrheiten volle Gerechtigkeit widerfahren zu lassen. ...
>
> Mathematische Analysis treiben und dabei den Anwendungen und der Anschauung den Rücken drehen, das heißt, die Wissenschaft rettungslos dem Schicksal der Vertrocknung und Verkümmerung preisgeben. .... Ich habe es vermieden, den Zugang zu den konkreten Tatsachen der Differential- und Integralrechnung durch Grundlagenbetrachtungen zu verbarrikadieren, deren Notwendigkeit man doch erst hinterher ganz begreifen kann; ...“ (COURANT 1930, S. V/VI)

(Man sollte jedoch fairerweise darauf hinweisen, daß auch HEUSER die große Bedeutung der Anwendungen sieht.) Schätzt COURANT die Anschauung als „Urquell mathematischer Wahrheiten“, wird das häufig kritisch gesehen. So schreibt z.B. DIEUDONNÉ im Vorwort zu „Grundzüge der modernen Analysis“ (1971):

> „Als weitere Konsequenz ergibt sich ferner die Notwendigkeit, sich strikt an axiomatische Methoden zu halten und sich in keiner Weise auf die 'geometrische Anschauung' zu berufen, wenigstens in den formalen Beweisen. Diese Notwendigkeit habe ich unterstrichen, indem ich ganz bewußt darauf verzichtet habe, irgendwelche Abbildungen in das Buch aufzunehmen. ... Dieses Buch möchte dem Studenten helfen, seine ‚abstrakte Anschauung‘ zu entwickeln, die für das Denken eines modernen Mathematikers so wesentlich ist.“ (S. 7-8)

Ich habe diese Zitate über mathematische Vorlesungen bzw. Lehrbücher für Studenten gebracht, um deutlich zu machen, in welcher Weise angehende Mathematiklehrer in ihrer Ausbildung geprägt werden. Ein Gegengewicht muß auf jeden Fall von der Didaktikausbildung kommen.

Natürlich ist auch für die Didaktik in der Forschung die Strenge der Mathematik wichtig. Man erkennt das besonders an den von GRIESEL (1975) beschriebenen Sachanalysen. Stützten sich z.B. didaktische Überlegungen zu den Zahlen unter dem Einfluß der „alten Methodiker" WITTMANN und KÜHNEL auf philosophische und sprachliche Analysen, so wurde in den sechziger Jahren deutlich, daß nur durch ausreichend formale Betrachtungen unterschiedliche Aspekte der Zahlen hinreichend geklärt werden können. Ich erinnere hier an die Arbeiten von GRIESEL zur Bruchrechnung (GRIESEL 1959, 1968, 1970a, 1981).

Im Hinblick auf den Unterricht muß jedoch das Paar „Anschauung und Strenge" gesehen werden. Die didaktische Diskussion darum hat eine lange Tradition. Man denke etwa an PESTALOZZIS und DIESTERWEGS Gedanken dazu, an die MU-Hefte über „Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis", an die Überlegungen von BLUM und KIRSCH über ein angemessenes Niveau für Grundkurse der Analysis (BLUM, KIRSCH 1979), bis hin zu WINTERS Betrachtungen über ihren Einfluß auf das „Entdeckende Lernen" (WINTER 1989). Aus allen diesen Studien wird deutlich, daß Verstehen ohne Anschauung nicht möglich ist, daß aber bloße Anschauung dem Lernenden auch ein Verstehen vorgaukeln kann. WINTER hat hier sehr eindringliche Beispiele gegeben. Damit ergibt sich folgende Paradoxie des Verstehens:

> *Strenge Überlegungen kann man nur verstehen, wenn man bereits anschauliche Vorstellungen davon hat. Angemessene anschauliche Vorstellungen können sich nur aus strengen Betrachtungen entwickeln.*

Der zweite Satz dieser Paradoxie bezieht sich auf die von DIEUDONNÉ genannte „abstrakte Anschauung".

Als unmittelbare Forderungen für den Unterricht ergeben sich:

(5) Alles mathematische Denken und Handeln im Unterricht muß sich auf Anschauung gründen.

(6) Mathematikunterricht darf nicht einer bloßen Anschaulichkeit verhaftet bleiben, sondern Begriffsbildungen und Begründungen bedürfen angemessener Strenge.

Es würde allerdings ein Verkennen der Paradoxie bedeuten, wenn man etwa die Forderungen erheben würde, man müsse stets beim Anschaulichen ansetzen und dann zum Abstrakten fortschreiten, bzw. abstrakte Betrachtungen müßten anschließend stets veranschaulicht werden. WINTER macht deutlich, daß es dagegen entscheidend ist, Abstraktes und Anschauliches in enger Verbindung miteinander zu entfalten (WINTER 1989). Er zeigt dies überzeugend am Beispiel der negativen Zahlen, wo etwa bei der Multiplikation sowohl die Einsicht in die Regel als auch in das Modell schrittweise in enger Verbindung miteinander vertieft wird.

FREUDENTHAL zeigte, daß sich die Vorstellungen von Strenge historisch entwickelt haben (FREUDENTHAL 1973, S. 139-145). Jede Generation hat ihr Maß an Strenge, wie wir ja bei der Betrachtung des Buches von KIEPERT gesehen haben. Im Rückblick erkennt man Stufen der Strenge. Für den Unterricht ist es deshalb notwendig, das jeweils angemessene Niveau der Strenge zu finden.

FISCHER betont, daß die Schüler den Prozeß der „Exaktifizierung“ selbst erfahren müssen (FISCHER 1978). Mich stört an diesem Wort, daß es suggeriert, etwas Unexaktes werde nun exakt gemacht. Exaktheit als etwas Endgültiges gibt es aber sicher nicht. Mir scheint dagegen das Wort „Präzisierung“ angemessener zu sein, weil es für weitere Entwicklungen offen ist.

Was aber heißt „angemessene“ Strenge? Sehen wir Strenge als Qualität des Begriffsbildens oder des Argumentierens an, dann geht es darum sicherzustellen, daß die Gesprächspartner wissen, worüber sie reden, und daß die Argumente überzeugen. Darüber muß im Unterricht Konsens erzielt werden. Unter dem Einfluß der Kommunikationsforschung spricht man heute gern davon, daß die Gesprächspartner dies „aushandeln“ müssen (z.B. VOIGT 1991). Allerdings ist diese Redewendung mit Vorsicht zu gebrauchen. Ich habe Schwierigkeiten, wenn z.B. gesagt wird, „im Unterricht wird die Bedeutung eines Begriffs ausgehandelt“. Nach meinem Verständnis könnte man allenfalls sagen, es wird mit den Schülern ausgehandelt, daß die Schüler eine bestimmte Bedeutung akzeptieren. Der Lehrer kann in diesem „Geschäft“ Erläuterungen, Hintergrundinformation, Zweckmäßigkeitsbetrachtungen u.ä. bieten.

7. Das Problem der Reichhaltigkeit

Bisher haben wir die formalen Qualitäten des Verstehens durch Mathematik unter didaktischen Gesichtspunkten betrachtet. Nun wenden wir uns den inhaltlichen Qualitäten zu. Die Stichwörter liefert HEUSER:

> „Der Leser wird bei der Lektüre des Buches bald bemerken, daß oftmals ein und derselbe Sachverhalt von ganz verschiedenen Seiten und auf ganz verschiedenen Methodenhöhen angegangen, beleuchtet und seziert wird. Ich wollte damit zeigen, wie eng geknüpft jener Teppich der Analysis ist, von dem ich oben schon gesprochen habe, wie reich und tief die inneren Beziehungen und Verfahren sind, wollte zeigen, daß mit dem Ausbau und der Verfeinerung des analytischen Instrumentariums alte Probleme leichter lösbar und neue überhaupt erst angreifbar werden – wollte also, um alles in einem Wort zu sagen, den Leser dazu überreden, in der Analysis nicht ein totes System zu sehen, sondern einen lebendigen Prozeß, offen gegen sich und die Welt.“ (HEUSER 1979, S. 7).

Reichhaltigkeit und Tiefe betrachten wir als inhaltliche Qualitäten einer mathematischen Theorie. Beginnen wir zunächst mit der Reichhaltigkeit. Sie drückt sich in der Fülle der Beziehungen innerhalb der Mathematik und zu ihrem Umfeld aus. Mathematik verstehen heißt, die Reichhaltigkeit dieses Beziehungsgefüges zu erfahren. Andererseits ist es eine grundlegende Erfahrung, daß diese Fülle der Beziehungen dem Lernenden verborgen bleiben muß, solange die Bestandteile nicht vorhanden sind, die durch die Theorie verknüpft werden sollen. Jeder Versuch, die Vielfalt sogleich zu erschließen, erschwert das Erkennen des Wesentlichen, des Kerns. Man versucht dies zu vermeiden, indem man zum Kern der Theorie vorstößt. Das beschreibt HEUSER für sein Analysisbuch wie folgt:

> „Als das mächtige und unverzichtbare Hilfsmittel für jede in die Tiefe dringende Untersuchung solcher Fragen wird sich der Begriff des Grenzwerts in seinen vielfältigen Formen und Abwandlungen erweisen. Er ist das Herzstück und der Kraftquell der Analysis..." (HEUSER 1979, S. 5)

In dem Nebeneinander von „Herzstück" und „Vielfältigkeit" klingt folgende Paradoxie des Verstehens an:

> *Man kann Mathematik in ihrer Reichhaltigkeit nur verstehen, wenn man ihren Kern verstanden hat. Man kann den Kern von Mathematik nur verstehen, wenn man ihre Reichhaltigkeit verstanden hat.*

Didaktisch bedeutet dies:

(7) Im Unterricht muß sich der Beziehungsreichtum von Mathematik den Schülern erschließen.

(8) Der Mathematikunterricht muß immer wieder zum Kern mathematischer Betrachtungen vorstoßen.

Die erste Forderung (7) wird vor allem von FREUDENTHAL hervorgehoben, wenn er verlangt, daß Mathematik „beziehungshaltig" unterrichtet werden soll. (FREUDENTHAL 1973, S. 75-80). Die zweite Forderung (8) wird etwa durch die Betonung von grundlegenden Ideen im Mathematikunterricht berücksichtigt (z.B. VOLLRATH 1978, SCHREIBER 1983, PICKER 1985).

Die Komplementarität von Reichhaltigkeit und Kern wird von KIRSCH (1977) betrachtet, wenn er nach Wegen sucht, Mathematik Schülern „zugänglich" zu machen. Er beschreibt das „Zugänglichmachen durch Hinzunahme des ‚Umfeldes‘ von Mathematik“ und andererseits durch „Konzentration auf den mathematischen Kern des Gegenstandes“.

Unter dem Einfluß von FREUDENTHAL dominieren heute in vielen Gebieten des Mathematikunterrichts die verschiedenen „Anläufe“(FREUDENTHAL 1973; S. 470-525). Man denke etwa an die unterschiedlichen Aspekte bei der Behandlung der Bruchrechnung, die unterschiedlichen Vorstellungen zum Winkel oder die verschiedenen Zugänge zur Ableitung im Analysisunterricht. Mit der Vielfalt der Aspekte will man die Anwendbarkeit des Gegenstandes erhöhen und vielleicht auch unterschiedliche Möglichkeiten des Zuganges für Schüler mit unterschiedlicher kognitiver Struktur eröffnen. Andererseits besteht die Gefahr, daß die unterschiedlichen Sichtweisen auf die Schüler verwirrend wirken, so daß sie gar nicht zum Kern der Sache vorstoßen können. Reduziert man Mathematik allerdings auf den Kern, so kann leicht ein Zerrbild entstehen, bei dem man nur noch das „Skelett“ der Mathematik sieht.

Was den „Kern“ eines mathematischen Begriffs, eines Satzes oder einer Theorie anbelangt, so unterliegt das natürlich auch wieder einer Wertung und ist damit didaktisch diskussionsbedürftig. Man denke etwa an die Diskussion um die Bedeutung des Begriffs der Stetigkeit für den Analysisunterricht (BLUM, TÖRNER 1983).

8. Das Problem der Tiefe

Im „Vorwort für den Lernenden“ zu seinem Buch „Grundlagen der Analysis“ (1930) schreibt LANDAU über seine Töchter, die „schon mehrere Semester studieren (Chemie), schon auf der Schule Differential- und Integralrechnung gelernt zu haben glauben und heute noch nicht wissen, warum

$$x \cdot y = y \cdot x$$

ist.“ (S. VI)

Hat man aber Analysis nur deshalb nicht wirklich verstanden, weil man nicht weiß, weshalb die Multiplikation kommutativ ist? Ja, hat man die Kommutativität verstanden, wenn man sie aus den Peano-Axiomen herleiten kann? Hat man sie nicht vielleicht erst wirklich verstanden, wenn man z.B. sich dessen bewußt ist, daß zwar das kartesische Produkt nicht kommutativ ist, wohl aber die darauf zurückgeführte Multiplikation von Kardinalzahlen?

Wir begegnen hier einem „Spielchen“, das Experten immer wieder gern mit Gebildeten spielen: Sie weisen ihnen nach, daß sie etwas, daß sie verstanden zu haben glauben, in Wirklichkeit nicht verstanden haben. (Das konnte schon SOKRATES meisterhaft!)

Häufig dienen solche Befunde dazu, die Fragwürdigkeit der Erfolge des Gymnasiums zu zeigen. WAGENSCHEIN wies z.B. den erfolgreichen Abiturienten nach, daß sie nicht wissen, weshalb gilt: „minus mal minus ist plus“? Damit wollte er zeigen, daß im Unterricht Unverstandenes gedrillt wird. Man sollte aber solche Befunde nicht überbewerten.

Trotzdem ist der Appell sinnvoll, sich um ein vertieftes Verstehen zu bemühen und den Lernenden das Angebot zu machen, ihnen dabei zu helfen, „Mathematik wirklich zu verstehen“ (KIRSCH 1987). Problematisch wird es jedoch, wenn man darin ein Versprechen sieht, „wirkliches Verstehen“ als einen Endzustand zu erreichen. Unsere Erkenntnis macht Fortschritte. Jedes frühere Stadium muß im Licht dieser Entwicklung zwangsläufig beschränkt wirken, und das Erreichte wirkt häufig wie etwas Endgültiges. Aber „unser Wissen ist Stückwerk“ (PAULUS an die Korinther, 1.Kor.13,9).

Einen solchen Verstehensprozeß kann man auch in der didaktischen Sachanalyse beobachten. Auf der Bundestagung 1969 in Ludwigsburg zeigte GRIESEL, daß der PIAGET sche Gruppierungsbegriff unverständlich ist (GRIESEL 1970b). WITTMANN wies dann 1972 in Kiel nach, daß man ihn durchaus so definieren kann, daß er verständlich wird (WITTMANN 1973). GRIESEL zeigte schließlich 1978, wie man ihn noch besser verstehen kann (GRIESEL 1978)! Und das ging so weiter. Wenn es inzwischen auch um diese Frage etwas stiller geworden ist, so ist doch damit zu rechnen, daß irgendwann einmal dieses

Thema, vielleicht unter einem neuen Blickwinkel, zu wiederum tieferem Verstehen führen wird. Am Anfang dieses Prozesses stand scheinbar ein Nichtverstehen, aber gerade das fortgesetzte Bemühen um immer besseres Verstehen der von PIAGET beschriebenen Situation durch Mathematik brachte einen Fortschritt des Verstehens. Entsprechendes gilt auch für das Verstehen von Mathematik. Nehmen wir etwa den Begriff des Rechtecks. Er wird in der Grundschule verstanden als „einprägsame Form“, in der Orientierungsstufe als „Träger von Eigenschaften“, in der 8. Klasse als „Teil eines Begriffsnetzes“. So wird der Lernende schrittweise zu einem immer tieferen Verstehen geführt.

Im Streben nach „tieferem Verständnis“ wird also eine Komplementarität zwischen Resultat und Prozeß sichtbar, die zu folgender Paradoxie des Verstehens führt:

> *Verstehen ist ein Prozeß, der Verständnis als Resultat anstrebt. Verstehen ist aber ohne Verständnis nicht möglich.*

Der zweite Teil dieser Paradoxie ist der berühmte „hermeneutische Zirkel“.

Bei LANDAU (1930) klingt diese Paradoxie an, wenn er schreibt:

> „Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. Bitte denke bei allem an die entsprechenden Stellen des Schulpensums; denn Du hast es doch nicht vergessen.“ (S. V-VI)

Für den Unterricht ergeben sich aus dieser Paradoxie folgende Forderungen:

(9) Mathematikunterricht muß auf Verstehen ausgerichtet sein.

(10) Verstehen darf im Unterricht nicht ausschließlich als anzustrebender Endzustand, sondern muß als ständig fortschreitender Prozeß verstanden werden.

Die Komplementarität zwischen Resultat und Prozeß zeigt sich beim Textverstehen auch an den fundamentalen Ideen:

> „Einerseits sind die fundamentalen Ideen und grundlegenden Begriffe

> eines Textes dasjenige, von dem man auszugehen hat. Sie sind das, was man direkt und spontan verstehen und auffassen muß und sie bilden andererseits gerade den Kern der Aufgabe, den Textinhalt zu verstehen und mit Verständnis zu handhaben.“ (KEITEL,OTTE,SEEGER 1980).

Es ist also sicher wichtig, daß man das Verstehen als Ziel des Unterrichts sieht, wie es z.B. FLITNER (1960) für die gymnasiale Oberstufe fordert:

> „Sie sollte keinen Wert legen auf Rechentechniken, sondern alle Macht auf das Verstehen richten, auf die Anregung der mathematischen Phantasie, auf das Entwerfen und Durchführen eines verstandenen Zusammenhangs. Gerade für die nicht mathematische besonders Begabten ist sowohl die Stoffbegrenzung wie die Bemühung um das volle Verstehen von Bedeutung.“ (S. 51)

Von BENDER (1991) ist die besondere Bedeutung von Grundverständnissen und Grundvorstellungen für das Lernen von Mathematik in der Schule gezeigt worden.

Andererseits wurde eine eingeschränkte Sicht des mathematischen Verständnisses, die sich überwiegend auf das Resultat beschränkt, bereits 1940 von STRUNZ in seiner Habilitationsschrift kritisiert. Er zeigte, daß es für die Didaktik wichtiger ist, sich für den Prozeß des Verstehens zu interessieren. Dies wurde insbesondere von MAIER (1988) betont.

Daß Verstehen als Prozeß gesehen werden muß, drückt sich z.B. in der Konzeption längerfristiger Lernprozesse aus, bei denen Stufen des Verstehens vermittelt werden sollen (VOLLRATH 1984). Daß es Stufen des Verstehens gibt, ist natürlich keine Erfindung von Mathematikdidaktikern. So schreibt etwa OSTROWSKI (1960):

> „Das gewöhnlich als Ziel des Lernens in der Mathematik bezeichnete ‚Verstehen‘ bedeutet nicht immer dasselbe. Man versteht z.B. eine mathematische Regel 1. wenn man sie anwenden kann oder 2. wenn man ihre Herleitung in allen Teilen überprüft hat oder 3. wenn man ihren Beweis

> selbständig wiederfinden kann. Erst auf der dritten Stufe kann man vom 'Verstehen' im eigentlichen Sinne sprechen. Dieses Verstehen ist von Mensch zu Mensch sehr ungleich. Ganz allgemein könnte man sagen, das Verstehen sei die Verankerung in den schöpferischen Funktionen des Intellekts.“ (S. 17)

Wenn man auch für den Mathematikunterricht eine etwas andere Stufung des Verstehens betrachten wird, wobei insbesondere frühe Stufen des Verstehens von besonderem Interesse sind, so wird doch eine grundlegende Erfahrung ausgedrückt, die eigentlich auch für das Mathematikstudium Konsequenzen haben müßte. Tatsächlich gibt es ja auch Lehrbücher, die einen deutlich gestuften Aufbau zeigen. Ich denke z.B. an die Erarbeitung des Funktionsbegriffs in Schritten von intuitiven Vorbetrachtungen bis zu formalen Darstellungen in der „Differential- und Integralrechnung“ von COURANT (1930), die ich als eine didaktische „Meisterleistung“ betrachte.

9. Schlußbemerkungen

Angesichts der von mir angebotenen didaktischen Forderungen mag man vielleicht die herausgearbeiteten Paradoxien als Überspitzungen betrachten, die dann in ein unverbindliches „sowohl-als auch“ münden. Das wäre ein Mißverständnis. Gerade die Zuspitzung grundlegender Einsichten über das Verstehen auf Paradoxien sollte deutlich machen, daß in der Komplementarität der aufgeführten Qualitäten der Kern des didaktischen Problems besteht. Betrachtet man die Zitate über das Verstehen im jeweiligen Kontext, dann wird deutlich, daß man leicht der Gefahr erliegt, jeweils nur einen Aspekt zu sehen und darin die Lösung des Problems zu suchen. Es ist auch nicht damit getan, von einem Aspekt zum anderen zu wechseln, wenn das vielleicht in einer bestimmten Situation auch berechtigt erscheint. (Dann schlägt das Pendel von einer Seite zur anderen aus!) Fortschritt scheint mir jedoch nur durch eine jeweils umfassendere Sicht erreichbar zu sein. Dazu ist es wichtig, sich immer wieder die Vielschichtigkeit didaktischer Kategorien bewußt zu machen. Für die

Kategorie des Verstehens wurde dies hier versucht. Mit aller Vorsicht lassen sich damit auch methodische Entscheidungen begründen. Patentantworten über optimale Wege zum Verstehen sind dabei natürlich nicht zu erwarten.

Literatur

Andelfinger, B. Arithmetische und algebraische Lerner-Konzepte in der SI, BMU (1984), 71-74

Baruk, S., Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik, Basel (Birkhäuser) 1989

Bauer, L., Mathematische Fähigkeiten, Paderborn (Schöningh) 1978

Bender, P., Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen, In: H. Postel, A. Kirsch, W. Blum (Hrsg.), Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel, Hannover, (Schroedel) 1991, 48-60

Blum, W., A. Kirsch, Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen, MU 25 Heft 3 (19-79), 6-24

Blum, W., G. Törner, Didaktik der Analysis, Göttingen (Vandenhoeck & Ruprecht) 1983

Courant, R., Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung, 1. Band, Berlin (Springer) 1930[2]

Courant, R., H. Robbins, Was ist Mathematik?, Berlin (Springer) 1962

Davis, R.B., A Model of Understanding. Understanding in Mathematics, Arith.Teacher 26 (1978) 13-17

Dedekind, R., Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig (Vieweg) 1888

Dieudonné ,J., Grundzüge der modernen Analysis, Berlin (Dtsch. Verl. d. Wiss.) 1971

Dilthey, W., Die Entstehung der Hermeneutik, 1900, Ges. Schriften Bd. 5, 1924

Dörfler, W., Formen und Mittel des Verallgemeinerns in der Mathematik, BMU 1987, 30-37

Dyrszlag, Z., Zum Verständnis mathematischer Begriffe, Teil 1,2, MSch 10 (1972) 36-44; 105-114

Engelkamp, S.J., (Hrsg.), Psychologische Aspekte des Verstehens, Heidelberg (Springer) 1984

Fischer, R., Die Rolle der Exaktifizierung im Analysisunterricht, DdM 6 (1978), 212-226

Flitner W., Hochschulreife und Gymnasium, Heidelberg (Quelle & Meyer) 1960[2]

Freudenthal, H., Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1,2, Stuttgart (Klett) 1973

Griesel, H., Eine verbandstheoretische Analyse der Bruchrechnung, MPSB VI (1959), 195-216

Griesel, H., Eine Analyse und Neubegründung der Bruchrechnung, MPSB XV (1968), 48-68

Griesel, H., Der wissenschaftliche Hintergrund der Bruchrechnung, MU 16, Heft 2 (1970a), 5-29

Griesel, H., Überlegungen zu den mathematischen und psychologischen Grundlagen des Rechenunterrichts in der Grundschule, BMU 1969 (1970b) 128-142

Griesel, H., Stand und Tendenzen der Fachdidaktik Mathematik in der Bundesrepublik Deutschland, Z.f.Päd.21 (1975), 19-31

Griesel, H., Eine Präzisierung des Begriffs der Gruppierung aus der Psychologie Piagets mit einer Anwendung auf eine von A. Fricke vorgeschlagene Einheit der Bruchrechnung, MU 24, Heft 4 (1978), 66-74

Griesel, H., Einige Anmerkungen zur Verwendung von Operatoren in der Bruchrechnung, MU 27, Heft 4 (1981), 80-86

Hasemann, K., Kognitionstheoretische Modelle und mathematische Lernprozesse, JMD 9 (1988), 95-161

Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (Veit) 1914

Herscovics, N., Bergeron, J., Models of understanding, ZDM 15 (1983), 75-83

Heuser, H., Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Stuttgart (Teubner) 1980

Heymann, H.W., Verstehen von Mathematik - Aus der Sicht von Lehrern, math.did. 5 (1982), 33-42

Jahnke, H.N., Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem, Bielefeld (IDM) 1978

Karaschewski, H., Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts, Stuttgart (Klett) 1969[2]

Keitel, Ch., M. Otte, F. Seeger, Text Wissen Tätigkeit, Königstein (Scriptor) 1980

Kiepert, L., Grundriß der Differential-und Integralrechnung, 1. Teil, Hannover (Helwing) 1901

Kirsch, A., Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht, DdM 2 (1977), 87-101

Kirsch, A., Mathematik wirklich verstehen, Köln (Aulis) 1987

Klein, F., Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil 1, Berlin (Springer) 1926

Koenigsberger, L., Die Mathematik eine Geistes-oder Naturwissenschaft? Heidelberg (Winter) 1913

Landau, E., Grundlagen der Analysis, Leipzig (Akad. Verlagsges.) 1930

Maier, H., "Verstehen" im Mathematikunterricht - Explikationsversuch zu einem viel verwendeten Begriff, in: P. Bender (Hrsg.), Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter, Berlin (Cornelsen) 1988, 131-142

Meschkowski, H., Die Kunst der Vorlesung, in: H. Meschkowski, D. Laugwitz (Hrsg.), Didaktik der Mathematik, Bd. IV, Stuttgart (Klett) 1974, 75-83

Ostrowski, A., Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung, 1. Bd., Basel (Birkhäuser) 1960

Otte, M., Zur Frage der Entwicklung theoretischer Begriffe, In: H.N. Jahnke, Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik - Beweisen als didaktisches Problem Bielefeld (IDM), I-XXI

Philosophisches Wörterbuch, Stuttgart (Kröner) 1955

Picker, B.(Hrsg.), Die Vermittlung grundlegender Ideen im Mathematikunterricht, MU 31, H. 4 (1985)

Schreiber, A., Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen mathematischen Denkens, math.did. 6 (1983), 65-76

Schwartze. H., A. Fricke, Grundriß des mathematischen Unterrichts, Bochum (Kamp) 1983[7]

Skemp, R.R., Goals of Learning and Qualities of Understanding, Math. Teaching 77 (1976), 44-49

Steinbring, H., "Eigentlich ist das nichts Neues für Euch" - Oder: Läßt sich mathematisches Wissen auf Fakten zurückführen?, MU 34 H.2 (1988), 30-43

Strunz, K., Zur Grundlegung der Psychologie des mathematischen Sinnverständnisses, Leipzig (Akad.Verlagsgesellschaft) 1940

Voigt, J., Das Thema im Unterrichtsprozeß, BMU 1991 (1991), 469-472

Vollrath, H.-J., Didaktik der Algebra, Stuttgart (Klett) 1974

Vollrath, H.-J., Rettet die Ideen! , MNU 31 (1978), 449-455

Vollrath, H.-J., Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht, Stuttgart (Klett) 1984

Vollrath, H.-J., Mathematik bewerten lernen, in: P. Bender (Hrsg.), Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter, Berlin (Cornelsen) 1988, 202-209

Vollrath, H.-J., Betrachtungen zur Entwicklung der Algebra in der Lehre, Math.Sem.Ber. 38 (1991), 58-98

Wagenschein, M., Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Band 1, Stuttgart (Klett) 1970[2]

Weidig, I., Stufungen im Geometrieunterricht der Hauptschule, In: H.-J. Vollrath (Hrsg.), Geometrie - Didaktische Materialien für die Hauptschule, Stuttgart 1982, 19-30

Weigand, H.-G., Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften, JMD 9 (1988) 287-325

Weyl, H., Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses, Unterrichtsbl. f.Math.u.Nat. 38 (1932), 177-188

Winter, H., Entdeckendes Lernen, Braunschweig (Vieweg) 1989

Wittmann, E., Zum Begriff "Gruppierung" in der Piagetschen Psychologie, BMU 1972 (1973), Teil 2, 203-222

Wittmann, E., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig (Vieweg) 1974

Wittmann, E., Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik, BMU 1975 (1975), 220-235

Wittmann, E.Ch., Mathematik lernen zwischen Skylla und Charybdis, Beiträge zur Lehrerbildung, 7 (1989), 227-239

Anmerkung:

Überarbeitete Fassung eines am 19.4.1991 in Kassel anläßlich des 60. Geburtstags von HEINZ GRIESEL gehaltenen Vortrags. Der lebhaften Diskussion am Anschluß habe ich zahlreiche Anregungen entnommen, für die ich zu danken habe.