52. Funktionales Denken

Journal für Mathematikdidaktik 10 (1989), 3-37.

Denn die Wissenschaft bedeutet nicht
beschauliches Ausruhen im Besitz
gewonnener Erkenntnis, sondern sie
bedeutet rastlose Arbeit und stets
vorwärtsschreitende Entwicklung.
MAX PLANCK

1. Funktionales Denken als Idee und Schlagwort

Nach den Meraner Vorschlägen von 1905 sollte das funktionale Denken zu einem zentralen Anliegen des Mathematikunterrichts werden (GUTZMER 1908). Der Unterricht sollte „der Erziehung zum funktionalen Denken“ dienen und die „Gewohnheit des funktionalen Denkens“ pflegen (S. 61).

Der Begriff des funktionalen Denkens wirkte als didaktischer Impuls. So stellte z.B. HÖFLER (1910) seine Didaktik „aus voller Überzeugung“ in den Dienst dieser Idee. Dabei hatte nach seiner Einschätzung die Forderung nach Erziehung zum funktionalen Denken so breite und rückhaltlose Zustimmung gefunden, daß sie für ihn keiner näheren Begründung mehr bedurfte, sondern daß es vor allem darum ging, „Ratschläge für ihre didaktisch wirksame Durchführung“ zu geben (S. 19).

In der Folgezeit wurden dann vor allem Unterrichtsvorschläge gemacht, wie dieses Programm in die Praxis umgesetzt werden kann. Bei der Realisierung in den Schulbüchern beschränkte sich das dann meist auf eine frühzeitige Behandlung des Funktionsbegriffs, und in den Richtlinien erhielt es eine gewisse Unverbindlichkeit, indem es unter den allgemeinen Zielen wie Schulung des logischen Denkens und der Raumanschauung aufgeführt wurde. Es wurde also einerseits auf inhaltliche Betrachtungen reduziert, andererseits als allgemeine Denkweise stark generalisiert. Beides war in den Meraner Vorschlägen angelegt. Einerseits wies der Begriff des funktionalen Denkens auf den Funktionsbegriff hin, andererseits konnten die konkreten Hinweise zur Realisierung den Eindruck erwecken, als werde das Ziel allgemein durch die Betrachtungen systematischer Änderungen in allen Bereichen der Mathematik realisiert. Es ist also nicht verwunderlich, wenn sich dann in den sechziger Jahren ein gewisses Unbehagen an diesem Begriff zeigt. So stellt z.B. LAUTER (1964) die Frage, „ob nicht vielleicht mit der Propagierung dieses sog. 'funktionalen Denkens' und den daraus resultierenden Mißverständnissen in den letzten Jahrzehnten mehr Unklarheit als Klarheit in den Mathematikunterricht an unseren höheren Schulen hineingetragen worden ist." (S. 116).

In der von STENDER 1961 bearbeiteten „Methodik" von LIETZMANN wird distanziert von der „Übung des vielgepriesenen ‚funktionalen Denkens'" gesprochen (S. 120), und KIRSCH nennt funktionales Denken 1976 einen Begriff der „älteren Didaktik" (1976a, S. 94). Der Begriff drohte also zu einem bloßen Schlagwort zu verkommen, auf den man meinte, ohne Verlust in der Didaktik verzichten zu können. Trotzdem hat der Begriff in den letzten Jahren wieder das Interesse von Didaktikern gefunden. BRÜNING und SPALLEK plädierten 1978 für eine „funktionale Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen". Sie wollten damit die Sterilität der mengentheoretisch-logisch orientierten Gleichungslehre überwinden. Für FÜHRER (1981) kann die Idee des funktionalen Denkens ein Bindeglied zwischen dem Mathematikunterricht der Mittelstufe und den Analysiskursen der Kollegstufe darstellen, mit dem man der Tendenz begegnen kann, diese Unterrichtsgebiete als autark zu betrachten (S. 91). Unter den Hinweisen, wie die Leitlinie „Abbildungen und Funktionen" im Mathematikunterricht der DDR zu verwirklichen ist, findet sich in der „Methodik" (WALSCH/WEBER 1975) auch die Forderung, die „funktionale Denkweise" zu schulen (S. 55). Durch diese Hinweise wurden dann Arbeiten angeregt, mit denen Vorschläge für den Unterricht gegeben werden sollten (z.B. HELMHOLZ 1978, NGUYEN 1982).

Für OTTE kommt es beim Lehren von Begriffen darauf an, den Begriff sowohl als Objekt als auch als Werkzeug erfahren zu lassen und auch diese Beziehung im Unterricht anzusprechen. Funktionales Denken betont die methodologische Seite des Funktionsbegriffs, die nach seiner Meinung weitgehend vernachlässigt worden ist, während das Begriffliche überbetont wurde. Die Ursache dafür wird in einer Didaktik gesehen, „die vorrangig curricular bzw. stofforientiert“ war (VON HARTEN u.a. 1986).

Wenn man sich schließlich mit der Entwicklung des mathematischen Denkens beim Kinde befaßt, dann entsteht das Bedürfnis, die Denkprozesse adäquat zu benennen, die schließlich zur Konstitution des Funktionsbegriffs führen. Es erscheint mir zweckmäßig, hier von der „Entwicklung des funktionalen Denkens“ zu sprechen (VOLLRATH 1986). Zahlreiche psychologische Untersuchungen unter dem Stichwort „proportional reasoning“ lassen sich dann als Beiträge zur Entwicklung des funktionalen Denkens ansehen.

Während sich die Idee des funktionalen Denkens in der Mathematikdidaktik in Europa schnell verbreitet hat, fanden die Vorschläge zum funktionalen Denken z.B. in den USA zunächst kaum Resonanz. So schreibt SCHULTZE (1928): „The idea of functionality, which is so much emphasized by European writers, has not received the same attention in the United States,...“ (S. 300). Das 9. Jahrbuch des NCTM von 1935 befaßte sich dann allerdings sehr gründlich mit diesem Thema. HAMLEY analysierte darin ausführlich den fachlichen und den didaktischen Hintergrund dieser Reformidee. Er stellte das funktionale Denken in psychologischer Sicht dar und hob dabei als wichtige Aspekte die „horizontale“ Beziehung zwischen den Variablen und die „vertikalen“ Beziehungen innerhalb der Variablen hervor. Sein Bericht gibt auch einen internationalen Lehrbuchvergleich, in dem vor allem die Umsetzung der Reformideen kritisch gewertet wird. So stellt er z.B. fest, daß in den USA für die meisten Schulbuchautoren funktionales Denken synonym für das Arbeiten mit Graphen zu sein scheint. Er selbst macht sehr detaillierte Unterrichtsvorschläge bis hin zu Tests über funktionales Denken, die im Unterricht verwendet werden können. Der Begriff des funktionalen Denkens scheint aber inzwischen bei amerikanischen

Didaktikern und Psychologen weitgehend in Vergessenheit geraten zu sein. Andererseits bemüht man sich heute in den USA um eine Förderung mathematischer Denkweisen. Damit ist auch das Interesse an ihrer Beschreibung gewachsen (z.B. BURTON 1984). Vielleicht wird also auch der Begriff des funktionalen Denkens eines Tages von amerikanischen Didaktikern und Psychologen wieder entdeckt.

Die vorliegende Arbeit ist aus der Überzeugung erwachsen, daß der Begriff des funktionalen Denkens in der Mathematikdidaktik nach wie vor seine Berechtigung hat. Im folgenden will ich den Versuch unternehmen, die Fruchtbarkeit und die Entwicklung dieses Begriffs darzustellen. Die Arbeit will damit zugleich einen Überblick über – nach meiner Auffassung – einschlägige Arbeiten zu diesem Thema geben, ohne dabei den Anspruch einer Dokumentation zu erheben. Damit verbinde ich zugleich die Hoffnung, daß sie auch Anregungen zu weiteren Untersuchungen zum funktionalen Denken liefert.

Es liegt nahe, diese Ausführungen mit einer Definition des Begriffs „funktionales Denken" zu beginnen. Dabei ist auffällig, daß es bisher nur wenige Versuche gibt, diesen Begriff zu definieren. Offensichtlich ist die Bezeichnung so suggestiv, daß nur selten das Bedürfnis danach entsteht. Das ist bei einer ganzen Reihe von didaktischen Begriffen ähnlich. Spricht man von mathematischem, logischem, algebraischem, geometrischem, infinitesimalem Denken, um nur eine Auswahl gebräuchlicher Formulierungen zu geben, so versucht man damit, bestimmte Denkweisen hervorzuheben und gegen andere abzugrenzen. Dem kann ein philosophisches, ein wissenschaftstheoretisches, ein psychologisches oder ein pädagogisches Interesse zugrunde liegen. Will man z.B. einen Bereich exemplarisch unterrichten, dann muß man fragen, welche Denkweisen charakteristisch für diesen Bereich sind. Soll ein Thema genetisch behandelt werden, dann wird man nach den Fragestellungen suchen, die zu diesem Thema geführt haben. Damit ergeben sich verschiedene Blickrichtungen: Man versucht einen ausgearbeiteten Bereich dadurch zu beschreiben, daß man das Gemeinsame der Fragestellungen, Methoden und Objekte hervorhebt und gegen andere Gebiete abgrenzt. Ich will dies die *charakterisierende* Sicht nennen. Oder man untersucht, welche Intuitionen und welche Phänomene die Entwicklung dieses Gebietes bestimmt haben. Dies will ich die *phänomenologische* Sicht nennen. Beide Sichtweisen haben ihre didaktische Berechtigung und Aufgabe. Sie bergen aber auch die Gefahr, das Gebiet als etwas Abgeschlossenes darzustellen, so daß die allgemeine Beschreibung durch die Entwicklung dieses Bereichs überholt wird. Auch die Intentionen, die mit einer solchen Beschreibung verbunden sind, können sich ändern. Was vielleicht zunächst aus erkenntnistheoretischem Interesse betrachtet wurde, gewinnt unter Umständen pädagogische Bedeutung bei der Diskussion um Erziehungsziele.

Die Beschreibung einer bestimmten Denkweise kann also nur dann didaktisch sinnvoll sein, wenn sie für verschiedene Sichtweisen und Entwicklungen offen ist. In diesem Sinn kann man funktionales Denken nur als einen offenen didaktischen Begriff ansehen, dessen Entwicklung zu einer permanenten Aufgabe der Didaktik gehört. Wenn ich in den folgenden beiden Abschnitten einige Sachverhalte hervorhebe, die mir in charakterisierender und in phänomenologischer Sicht als wesentlich erscheinen, dann gehe ich von folgender Auffassung des funktionalen Denkens aus:

Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.

Diese Auffassung betont also den methodologischen Aspekt des Funktionsbegriffs. So wird es z.B. auch von OEHL (1965) gesehen:

> „Wird diese durch eine Funktion bestimmte und darstellbare Abhängigkeit (funktionale Abhängigkeit) bewußt erfaßt und bei der Lösung von Aufgaben nutzbar gemacht, so spricht man von funktionalem Denken“ (S. 244).

Die folgenden charakterisierenden und phänomenologischen Betrachtungen werden sich also vor allem darauf beziehen, wie mit Funktionen gedanklich umgegangen wird, welche Intentionen mit diesem Denken verbunden sind und welche Intuitionen diesem Denken zugrunde liegen. Indem ich „funktionales

Denken“ enger an den Funktionsbegriff anlehne, als das zunächst im Gefolge der Meraner Empfehlungen geschah, grenze ich dieses Denken etwas schärfer ein. Andererseits wird es nun aber auch möglich, eher „statische“ mengentheoretische Betrachtungen beim Umgang mit Funktionen einzubeziehen, während bei der traditionellen Auffassung das „Dynamische“ ein unumgänglicher Aspekt des funktionalen Denkens war.

Ich werde im folgenden die „Abbildungsgeometrie“ im engeren Sinne ausklammern, obwohl natürlich auch Abbildungen Funktionen sind. Aber nach meiner Auffassung ist mit der „Abbildungsgeometrie“ eine andere didaktische Konzeption verbunden als mit dem „funktionalen Denken“.

Bei charakterisierenden Betrachtungen des funktionalen Denkens hat man die Fülle des in der Mathematik und ihren Anwendungsbereichen heute üblichen Umgehens mit Funktionen zu analysieren. Hier wird also von dem bisher Erreichten ausgegangen. Dagegen interessiert man sich bei phänomenologischen Betrachtungen stärker für die Ansätze dieses Denkens, also sieht man es eher von den Anfängen her. Dabei begnüge ich mich mit einigen Aspekten, die mir wesentlich erscheinen. Ausführlich will ich dagegen darauf eingehen, wie sich diese Aspekte in der didaktischen Diskussion, in Fragestellungen und Konzeptionen niedergeschlagen haben.

Meine Betrachtungen zum funktionalen Denken sind von dem Interesse geleitet, herauszufinden, welche Beiträge dieses Denken zur menschlichen Erkenntnis liefert, welche Bedeutung es für die Bildung des Menschen hat, wie es sich unter verschiedenen Bedingungen entwickelt und wie es sich im Mathematikunterricht entfalten kann.

2. Denken mit Funktionen

Beginnen wir also mit der Frage, was als charakteristisch für das Arbeiten mit Funktionen und damit für funktionales Denken anzusehen ist. Ich hebe drei Aspekte hervor, über die heute weitgehend Konsens erzielt werden kann (z.B.

FISCHER 1976, STOYE 1983).

> *(1) Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so daß die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.*

Dieser Aspekt betont also einerseits die eindeutige Zuordnung und andererseits die Abhängigkeit von Größen. Dies drückt sich in Schreibweisen wie $x \to y$ und $y = f(x)$ aus. In senkrecht notierten Tabellen wird hiermit der „waagerechte Zusammenhang“ zwischen x und y angesprochen.

Sicherlich ist dieser Aspekt entscheidend für die große Fruchtbarkeit dieses Begriffs in der Mathematik und den Anwendungen.

Z.B. sieht DU BOIS-REYMOND (1877) darin „eine der fruchtbringendsten Methoden, durch welche der menschliche Geist seine Leistungsfähigkeit erhöhte.“ (S. 149). Die Einführung in diese Methode wird nach seiner Meinung für den „einigermaßen Begabten: ein für das Leben epochemachender Lichtblick“ (S. 149). Daraus leitet er die Forderung ab, diese Methode im Mathematikunterricht zu lehren. Für KLEIN (1904) soll der Funktionsbegriff zur verbindenden Idee des Mathematikunterrichts werden, die in zahlreichen Wissenschaften angewendet wird. Der Mathematikunterricht hat diese Methoden gerade den Schülern zu vermitteln, die später nicht Mathematik studieren. Ähnlich äußert sich VOSS (1908):

> „Der Koordinatenbegriff, welcher das unerläßliche Schema für die Veranschaulichung aller Vorgänge bildet, mit seinen vielseitigen und anregenden Anwendungen auf alle Gebiete des täglichen Lebens, mögen sie nun der Medizin, der physikalischen Geographie, der Nationalökonomie, der Statistik, dem Versicherungswesen, den technischen Wissenschaften angehören, die ersten Anfänge der Infinitesimalrechnung im Anschluß an ihre historische Entwicklung, die Entwicklung des Funktions-und Grenzbegriffes an den Elementen der Lehre von den krummen Linien, das alles sind Dinge, ohne die in der gegenwärtigen Zeit auch nicht das leiseste Ver-

> ständnis der Naturerscheinungen gewonnen werden kann, deren Kenntnis uns aber wie mit einem Zauberschlag befähigt, eine Einsicht zu erlangen, mit der sich an Tiefe und Tragweite, vor allem aber an Sicherheit, wohl kaum eine andere vergleichen läßt.“ (S. 94-95).

Aus voller Überzeugung schließt er sich den Bestrebungen um eine Modernisierung des Mathematikunterrichts an und unterstützt die Meraner Vorschläge. GUTZMER (1908) berichtet, daß es darum ging:

> „die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen. Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens.“ (1980, S. 53).

Didaktische Schwierigkeiten ergaben sich vor allem aus der Natur der voneinander abhängigen Größen und aus der Art des Zusammenhanges. Das drückt sich einmal in der Unterscheidung zwischen „empirischen“ und „mathematischen“ Funktionen aus, zum anderen in der lange üblichen Einschränkung auf Funktionen, die durch Terme bzw. Gleichungen oder durch Kurven darstellbar sind. Typisch ist z.B. die Beschreibung von SIEMON (1931):

> „Man unterscheidet mathematische und Erfahrungsfunktionen. Bei ersteren wird der Zusammenhang mit Hilfe eines mathematischen Ausdrucks oder auch symbolisch in einer Funktionsgleichung zum Ausdruck gebracht:... bei letzteren sind die Werte, deren Zusammenhang wirtschafts-oder naturgesetzlich bedingt ist, durch Beobachtungen, Messungen, Zählungen zu gewinnen: ...“ (S. 17).

Als Konsequenz wurde es dann abgelehnt, bei einem Zusammenhang, der durch eine Folge von beobachteten Werten gegeben war, von einer Funktion im mathematischen Sinne zu sprechen (s. LIETZMANN/STENDER 1961, S. 121).

Neben der Beschreibung des Zusammenhanges durch einen Term oder eine Gleichung wurde meist auch eine Kurve im Koordinatensystem zugelassen. Im wesentlichen sind diese Beschränkungen wohl auf KLEIN zurückzuführen. Denn dieser hatte gefordert:

> „Und was wir an Reformen verlangen, das ist wirklich recht bescheiden, wenn Sie es mit dem heutigen Stande der Wissenschaft vergleichen: Wir wollen nur, daß der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder anderen Eulerschen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe ...“ (1933[4], S. 221).

Er bezog sich dabei auf seine Darstellung der *historischen Entwicklung* des Funktionsbegriffs in seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“. Für EULER konnte eine Funktion durch einen „analytischen Ausdruck“ oder durch eine „freihändig gezeichnete Kurve“ im Koordinatensystem gegeben sein. KLEIN liefert damit die Sicht, wie sie sich z.B. auch bei PRINGSHEIM (1899/1916) findet. Aber für die Didaktik ist doch interessant, wie bei KLEIN diese historische Analyse zu einer Grundlage für didaktische Argumentationen und Entscheidungen wird. Eine ähnliche Wirkung hat in den sechziger Jahren die historische Analyse von STEINER (1969) gehabt, in der er zeigte, wie sich die Auffassungen von Funktionen als Termabstrakte bzw. als Formelabstrakte entwickelt haben, sich im modernen Funktionsbegriff niederschlagen und sich gegenseitig ergänzen. FISCHER und MALLE zeigen, daß bei einem solchen Entwicklungsprozeß, der dann schließlich zu einer bestimmten Definition führt, manche Aspekte und Vorstellungen verlorengehen, die erst wieder durch Zusatzbegriffe oder alternative Definitionen „zurückgeholt“ werden müssen (1985). Für den Mathematikunterricht besteht die Gefahr, daß durch eine zu starke Orientierung an einer präzisen Definition solche Intuitionen, die für das Verständnis und das Arbeiten mit dem Begriff wichtig sind, verschüttet werden. Es ist daher nicht verwunderlich, daß in der didaktischen Argumentation zum Funktionsbegriff immer wieder Bezug auf die historische Entwicklung des Funktionsbegriffs genommen wird (z.B. OTTE/STEINBRING 1977, KIESOW/SPALLEK 1983). Allgemein sind historische Analysen auch ein wichtiger Bestandteil von FREUDENTHALs didaktischer Phänomenologie (1983). Auch er setzt bei EULER an, analysiert die weitere Entwicklung des Funktionsbegriffs, macht aber auch deutlich, daß mit Funktionen bereits gearbeitet wurde, lange bevor man sie als solche bezeichnete.

Daß die Termdarstellung und die Gleichung im Unterricht so stark dominierten, lag daran, daß gerade sie sich besonders gut für das Lösen von Aufgaben zu Funktionen benutzen lassen. Das war natürlich wichtig für einen überwiegend an Aufgaben orientierten Mathematikunterricht (LENNÉ 1969). Es ist also nicht verwunderlich, wenn die Schüler Funktionen weitgehend mit Funktionsgleichungen bzw. Kurven identifizierten. Beobachtungen an Studienanfängern veranlaßten PICKERT (1955/56a und 1958/59), auf solche Unstimmigkeiten zwischen Schul- und Universitätsmathematik beim Lehren des Funktionsbegriffs hinzuweisen und Wege zu ihrer Überwindung aufzuzeigen. Seine Vorschläge wurden in der folgenden Reformdiskussion aufgegriffen und lieferten Argumente für eine mengentheoretische Betrachtung von Funktionen (STEINER 1967). Dabei wurde großer Wert auf korrekte Sprechweisen gelegt. So wurde nun z.B. in Schulbüchern nicht mehr geschrieben: „Die Funktion $y = x^2$", sondern „die Funktion mit $y = x^2$". PICKERT klärte auch die Beziehung zwischen Funktion, Termdarstellung und Gleichung.

In der Reformdiskussion der sechziger Jahre wurde wiederholt die Beziehung zwischen Funktionen und Relationen angesprochen. Die mengentheoretischen Überlegungen zum Funktionsbegriff legten es nahe, Funktionen als rechtseindeutige Relationen zu betrachten. Dies wurde von PICKERT auch aus praktischen Gründen empfohlen, da in vielen Problemsituationen nicht von vornherein klar sei, ob tatsächlich eine Funktion vorliege (PICKERT 1973). In der Konsequenz bedeutete das, daß die Schüler erst den Relationsbegriff lernen mußten, ehe sie zu dem mathematisch viel bedeutsameren Funktionsbegriff vorstoßen konnten. FREUDENTHAL schlug deshalb 1973 den umgekehrten Weg vor. Betrachtet man die Beziehung zwischen Funktions- und Relationsbegriff in dieser Sicht, dann ist diese Frage durch neuere Unterrichtskonzeptionen, bei denen der Funktionsbegriff in Stufen gelehrt wird (z.B. VOLLRATH 1974, 1982) eigentlich gegenstandslos. Für KIESOW und SPALLEK (1983) ist dagegen die Problematik tiefer gehend. Für sie liegen Betrachtungen von Relationen auf der

„Ergebnisebene“, während für Funktionen bereits eine „operative Ebene“ vorgelagert ist. Die Ergebnisebene hat es mit Zuordnungen zu tun, dagegen geht es bei der operativen Ebene um Zuordnungsvorschriften. Die operative Ebene liegt für sie dichter an der Realität, ist informationsreicher und unmittelbarer gegeben als die abstraktere Ergebnisebene. Nach ihrer Ansicht sollten die Schüler deshalb über die operative Ebene zum Funktionsbegriff geführt werden. Dies läßt sich natürlich in einer Stufenkonzeption auch gut realisieren.

Die mengentheoretischen Betrachtungen überwanden einerseits die begrifflichen Verschwommenheiten des traditionellen Mathematikunterrichts, legten aber zugleich übermäßiges Gewicht auf die Begriffsbildung. Es wurde bald deutlich, daß der Unterricht der Verwendung von Funktionen als Werkzeug stärkere Aufmerksamkeit schenken mußte.

Die Beschreibung der funktionalen Abhängigkeit und das Ausnutzen dieser Abhängigkeit beim Lösen von Problemen (z.B. Berechnen von Funktionswerten, Beweisen von Eigenschaften) erfolgt mit Hilfe der verschiedenen *Darstellungsformen*. Das Arbeiten mit Gleichungen und Tabellen war bereits vor den Meraner Vorschlägen üblich. Die Verwendung graphischer Darstellungen wurde dagegen als moderner Gedanke empfunden (LIETZMANN II, 1922[2]; S. 279). Die logischen Betrachtungen in den sechziger Jahren führten dann zur Einführung der Termdarstellung mit der Pfeilschreibweise; die Auffassung von Funktionen als speziellen Relationen brachte die Darstellung durch Pfeildiagramme, die besonders von PAPY propagiert wurde (z.B. PAPY 1964). Die Vielzahl der unterschiedlichen Darstellungen machte es notwendig, die didaktische Funktion solcher Darstellungen näher zu diskutieren (z.B. TOOREN 1937, VOLLRATH 1974, BLUM/TÖRNER 1983). Man erhält dabei Aussagen der Art: Das Pfeildiagramm läßt besonders deutlich den Zuordnungscharakter hervortreten, während der Graph die Abhängigkeit der einen Größe von der anderen stärker betont. Ähnliche Aussagen lassen sich auch über Schreibweisen machen: So hebt die Pfeilschreibweise $x \to y$ den Zusammenhang zwischen x und y hervor, während die Gleichung $y = f(x)$ die Abhängigkeit des y vom x deutlich macht. Daß allerdings die Schüler die Fülle „funktionaler Ausdrucksmöglichkeiten“ erfahren sollten, „um nicht in allzustarke Abhängigkeit von einer von ihnen zu geraten“, wurde schon 1937 von TOOREN gefordert.

Funktionen beschreiben beobachtete oder vermutete Zusammenhänge, z.B. die Abhängigkeit des Umfangs vom Durchmesser eines Kreises oder die Abhängigkeit der Dehnung einer Schraubenfeder von der Belastung. Funktionen schaffen aber auch neue Zusammenhänge, etwa wenn man durch $y = x^2$ jeder Zahl x ihr Quadrat zuordnet. Für den Unterricht ergibt sich also das Problem vom Finden und vom Aufstellen von Funktionen (z.B. BLUM/TÖRNER 1983). Das Finden einer geeigneten Funktion kann man als „Entdecken“; das Aufstellen einer Funktion als „Erfinden“ sehen. Die Bedeutung von Entdecken und Erfinden in der Mathematik ist eine immer wieder diskutierte Grundlagenfrage (z.B. WAISMANN 1947). Sie ist Gegenstand einer didaktischen Auseinandersetzung über die Rolle der Axiomatik für den Mathematikunterricht geworden, die durch einen Vortrag von LAUGWITZ 1965 in Nürnberg ausgelöst worden war (s. LÖFFLER 1966). Auch hinsichtlich des Findens und Aufstellens von Funktionen sind die verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen unterschiedlich wirksam.

Didaktische Überlegungen und Entwicklungen haben also im Laufe der Zeit zu einer erheblichen Erweiterung der Darstellungsmöglichkeiten von Zuordnungen geführt. Darstellungen werden dabei nicht in erster Linie als Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Funktionen sondern als Ausdrucksmittel gesehen. Die Ausprägung funktionalen Denkens zeigt sich an dem Grad der Beherrschung dieser Ausdrucksmittel zum Erfassen und Lösen von Problemen.

(2) Durch Funktionen erfaßt man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.

Dieser Aspekt drückt sich z.B. in Beziehungen aus wie: Je größer x wird, desto größer wird y. Bei der Darstellung einer Funktion durch eine senkrechte Tabelle interessiert man sich damit auch für „senkrechte Zusammenhänge“.

Das Stichwort der „Änderungen“ findet sich in den Erläuterungen der Meraner Vorschläge für das funktionale Denken sowohl im Bereich der Arithmetik als auch in der Geometrie. Für die meisten Didaktiker, die sich darauf beziehen, scheint dieses Betrachten von Änderungen und ihren Wirkungen charakteristisch für das funktionale Denken zu sein. So schreibt z.B. ENGEL (1922):

> „Mit der Forderung einer Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens ist in die klassische Ruhe des geometrischen Unterrichts Bewegung gekommen; die Form als starres Gebilde ist verschwunden. Linien, Flächen und Körper entstehen, wachsen und schwinden; sie bestehen aus beweglichen Elementen. Mit der wachsenden oder schwindenden Größe des einen wächst oder mindert sich die Größe des anderen. Die Seite ändert den Winkel, der Winkel die Seite, die Höhe den Inhalt, der Radius den Kreis, die Kante den Körper. Aus scheinbar zusammenhanglosen Gebilden wird eine fließende Reihe von Formen; einzelne Formen gebieten als Sonder-oder Grenzfälle einen kurzen Halt.“ (S.23)

Ich habe dieses Zitat zum Geometrieunterricht gewählt, weil das Entscheidende des funktionalen Denkens gerade darin gesehen wurde, Denkweisen, die für den Umgang mit Funktionen typisch sind, auch in Bereichen fruchtbar werden zu lassen, in denen traditionell nicht mit Funktionen gearbeitet wurde (LIETZMANN II, 1922[2]).

In der Betrachtung systematischer Änderungen – als Unterrichtsmethode – wird ein Weg gesehen, auf eine neue Weise mathematische Einsicht zu vermitteln und Verständnis zu erzielen. ENGEL liefert ein solches Programm für den Geometrieunterricht. Für den Arithmetik- und Algebraunterricht wird eine entsprechende Konzeption von RUDERT (1919) entwickelt. Dabei muß man sehen, daß diese Arbeiten zugleich in enger Verbindung zur pädagogischen Idee der Arbeitsschule entstanden sind (FÜHRER 1985).

Es ist gerade diese Idee der *systematischen Änderungen*, die lange mit dem Begriff des funktionalen Denkens verbunden wird. So ist für STRUNZ (1949) kennzeichnend für das funktionale Denken, daß es „kinematisch“ oder auch

„dynamisch“ ist. Auch STEINER akzeptiert „kinematisches Denken in der reellen Funktionenlehre“ (1959), sieht aber Probleme mit dem Begriff der Variablen. Er schreibt: „Diese Vorstellungen ... müssen didaktisch anders verarbeitet werden als durch die Schaffung von unhaltbaren 'Gegenständen'.“ (S. 78). Gemeint ist der Variablenbegriff. In Überlegungen zur Behandlung des Funktionsbegriffs (1967) zeigt er, daß die mengentheoretische Auffassung von Funktionen eher „statisch“ ist. Das Bedürfnis nach Berücksichtigung kinematischer Erfahrungen sieht er in Überlegungen wie:

> „Wenn ich den geordneten Definitionsbereich in einem bestimmten Sinne durchlaufe, so werden die Werte des Wertebereichs vermöge der Zuordnung f in dem und dem Sinne durchlaufen“. (S. 171)

Auch die didaktische Diskussion um den Variablenbegriff war von PICKERT ausgelöst worden (1955/56a und 1960/61). Er betonte, daß Variable bei Funktionen nichts anderes sind als Platzhalter oder Leerstellenbezeichnungen. Das Bedürfnis der Physiker nach Variablen im Sinne veränderlicher Größen sah er durch das Vorgehen von MENGER (1953[2]) befriedigt, nach dem eine physikalische Variable eine Funktion ist, die jedem Zustand aus einer Menge von Zuständen eine Zahl zuordnet. Um deutlich zu machen, daß bei Funktionen die Variablen gebunden sind, schlug FREUDENTHAL (1973) die Einführung eines besonderen Zeichens zur Bindung der Variablen vor. Es hat sich aber nicht durchgesetzt. (Natürlich ist auch durch die übliche Bezeichnung $x \to f(x)$ die Variable x gebunden.)

Diese Arbeiten dienen überwiegend der begrifflichen Klärung und sind damit vor allem auf den Begriff als Objekt des Denkens gerichtet. Die Betrachtung systematischer Änderungen zum Arbeiten mit Funktionen wurde vor allem durch Anregungen von KIRSCH neu belebt. Er setzte bei proportionalen Funktionen an (1969) und führte es fort bei den Potenzfunktionen (1982) und den Exponentialfunktionen (1976b). RUDERT hatte bereits 1919 vorgeschlagen, die Schlußrechnung funktional zu behandeln. RUTH (1957) hatte sie als Propädeutik der Funktionenlehre betrachtet, aber erst der Vorschlag von KIRSCH (1969) führte zu einer praktischen Umsetzung. Während es in der Schlußrechnung darum geht, mit Hilfe von systematischen Änderungen zu einer Größe die zugehörige zu bestimmen, betont KIRSCH bei den Wachstumsprozessen vor allem die Bedeutung systematischer Änderungen für das Finden und Aufstellen von Funktionsgleichungen. Auch hier ergibt sich natürlich wieder die Frage, inwieweit es sich bei diesem Vorgehen um ein Entdecken oder ein Erfinden handelt. Wird in einer Sachsituation eine Funktion betrachtet, die den Zusammenhang zwischen Größen beschreibt, dann kann man als Gesetzmäßigkeit entdecken, daß bestimmte Änderungen der einen Größe zu bestimmten Änderungen der anderen führen. Andererseits kann man jedoch auch mit der Vorgabe eines bestimmten Änderungsverhaltens Funktionen erfinden. Man kann in der Entscheidung für eine bestimmte Betrachtungsweise einer Situation (DÖRFLER spricht von einer „Fokussierung" und „Verlagerung" der Aufmerksamkeit) aber auch ein konstruktives Element sehen, bei dem also ein Zusammenhang nicht entdeckt, sondern konstituiert wird (DÖRFLER 1988).

Auch in den funktionalen Betrachtungen der Gleichungslehre (BRÜNING/SPALLEK 1978) spielen systematische Änderungen eine wichtige Rolle. Wenn z.B. eine Gleichung durch Probieren gelöst werden soll, dann kann man mit der Monotonie der zugrundeliegenden Funktion argumentieren, daß weitere Einsetzungen zu immer größeren Werten führen, also keine weiteren Lösungen liefern können. Die Betrachtung von Änderungsraten bei Funktionen findet schließlich auch im Analysisunterricht ein besonderes Interesse (z.B. FISCHER 1976, HERING 1982, BLUM/TÖRNER 1983).

Hübsche Beispiele dafür, wie Schüler bereits sehr früh Zusammenhänge zwischen Änderungen intuitiv erfassen und mit Gesten und Worten beschreiben, finden sich bei HÖFLER (1910). Dies kann man in qualitativen Betrachtungen von graphischen Darstellungen fortsetzen (z.B. STELLMACHER 1986). Welche Schwierigkeiten Schüler dabei haben, wie sie z.B. aus dem Änderungsverhalten, das sie der Darstellung entnehmen, auf die Sachsituation schließen und umgekehrt, ist näher von JANVIER (1978) untersucht worden.

Auch in Aufgabenfolgen zu den Grundrechenarten, den „Päckchenaufgaben“, kann man durch systematische Änderungen funktionale Zusammenhänge schaffen, die den Schülern schon in der Grundschule bewußt gemacht werden können (KARASCHEWSKI 1970). Zur Bedeutung funktionalen Denkens für sinnvolles Üben sei auch auf WINTER (1984) verwiesen.

War das didaktische Interesse also zunächst auf das intuitive Erfassen von Änderungen gerichtet, so werden nun auch subtilere Betrachtungen des Änderungsverhaltens von Funktionen durchgeführt. Die Ausprägung des funktionalen Denkens zeigt sich also auch daran, in welcher Weise Änderungen geplant, durchgeführt, analysiert und zur Lösung von Problemen eingesetzt werden können.

(3) *Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.*

Man betrachtet also nicht nur einzelne Wertepaare, sondern die Menge aller Wertepaare bzw. die Zuordnung als neues Objekt. Auch diese Sicht spielt in der didaktischen Diskussion schon früh eine Rolle. So schreibt RUDERT (1919):

> „Die Zuordnung, als Vorgang vorgestellt, hat den bedeutenden Vorzug vor einer Zuordnung in Einzelwerten, daß alle Wertepaare durch den Vorgang in ein Ganzes zusammengeschlossen sind...“ (S. 40).

Neben dem dynamischen Aspekt des funktionalen Denkens hebt STRUNZ (1949) als zweiten wichtigen Aspekt die „ganzheitliche“ Sicht hervor. Darin zeigt sich „sein verbindender, integrierender Charakter, seine Eigenschaft, Wesenszusammenhänge herauszustellen.“ (S. 33). Daraus folgt für ihn, daß das funktionale Denken eine Gedächtnishilfe darstellt.

> „Mathematische Sachverhalte, die zu einem sinnvollen geschlossenen Ganzen gehören und in irgendeiner Weise eine verstehbare Einheit bilden, lassen sich leichter merken als eine gleiche Anzahl von Sachverhalten, die ihrem Sinne nach wenig oder nichts miteinander zu tun haben.“ (S. 35)

Diese Folgerung zieht er unter dem Eindruck der Forschungen von „Ganzheitspsychologen" wie KRUEGER, SANDER, KOEHLER und METZGER.

Will man mit Funktionen als Objekten operieren, so benötigt man *Funktionsnamen*. Die verschwommenen Formulierungen, die früher üblich waren, stehen dem etwas im Wege. Sprach man früher z.B. von der Funktion sin x, so konnte man zwischen Funktionsnamen und Funktionswert nicht unterscheiden. Selbst FREUDENTHAL, der vor übertriebenen Präzisierungen warnt, empfiehlt, an dieser Stelle klar zu unterscheiden (1974, S. 371-374). So hat es sich dann auch in den Schulbüchern einbürgert, sin als Funktionsnamen und sin x als Funktionswert zu unterscheiden.

Unter den verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen eröffnet sich der Blick für das Ganze besonders deutlich bei den graphischen Darstellungen. Hier fallen auch Eigenschaften von Funktionen ins Auge wie Wachsen, Fallen, Symmetrien usw. Allerdings ist das Erkennen solcher Eigenschaften überwiegend das *Ziel* von Aufgabenstellungen (Untersuchung des Verlaufs von Graphen in der Sekundarstufe 1 oder die Kurvendiskussion in der Sekundarstufe 2). Dagegen werden Eigenschaften nur selten als *Hilfsmittel* beim Lösen von Aufgaben benutzt. (Beispiele sind das Finden der Funktionsgleichung bei gegebenen Graphen oder die Extremwertbestimmung quadratischer Funktionen durch Bestimmung des Scheitels in der Sekundarstufe 1 sowie das Bestimmen von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften in der Sekundarstufe 2). So wie der Blick auf das Ganze Eigenschaften enthüllt, so lassen auch umgekehrt Eigenschaften das Ganze erkennen.

Der Blick auf das Ganze kann also als Beobachten oder als Erzeugen eines Zusammenhanges gedeutet werden. Die Sicht des Ganzen kann eine Grundlage aber auch das Ziel von Problemlösungen sein. Die Ausprägung des funktionalen Denkens zeigt sich an der Fähigkeit, in unterschiedlichen Darstellungen von Funktionen das Ganze der Funktion zu erfassen und in der Fähigkeit, vom Einzelnen aufs Ganze und umgekehrt vom Ganzen aufs Einzelne „umzuschalten".

Ich erhebe hier nicht den Anspruch, das funktionale Denken vollständig charakterisiert zu haben. Aber wir haben doch charakteristische Merkmale hervorgehoben, die bei den bisherigen didaktischen Betrachtungen eine wichtige Rolle spielten und auch Ansatzpunkte für weitere didaktische Überlegungen bieten. Im folgenden wollen wir nun das funktionale Denken in phänomenologischer Sicht betrachten.

3. Durch Funktionen Situationen erfassen und beherrschen

Es gibt eine Reihe von Grundphänomenen, die für die Bildung des Funktionsbegriffs und damit auch für die Entwicklung des funktionalen Denkens eine wichtige Rolle spielen. FREUDENTHAL hat in seiner didaktischen Phänomenologie (1983) die Bedeutung von Phänomenen für „die Konstitution mentaler Objekte“, wie er es ausdrückt, dargestellt. Auch WAGENSCHEIN betont die Bedeutung der Phänomene für das Lernen (1977), und in der Didaktik von WITTENBERG (1963) wird das Ansetzen bei den Phänomenen ein Grundprinzip. FREUDENTHAL (1983) gibt auch eine Phänomenologie des Funktionsbegriffs. Die Wurzel des Funktionsbegriffs ist für ihn das Feststellen, Fordern, Erzeugen und Wiedergeben von Abhängigkeiten oder Verbindungen zwischen Variablen, die in der physikalischen sozialen, geistigen Welt und zwischen diesen Welten auftreten (S. 494).

FÜHRER betont die phänomenologische Sicht, wenn er funktionales Denken durch das Wortspiel beschreibt: „Bewegtes fassen – das Gefaßte bewegen“ (1985). Ich möchte im folgenden vier Arten von Phänomenen zum Funktionsbegriff ansprechen und zeigen, in welcher Weise sie den Funktionsbegriff prägen. Da es uns um funktionales Denken geht, soll auch hier wieder der Werkzeugcharakter des Funktionsbegriffs betont werden. Ich sehe dafür als gemeinsames Merkmal das „Erfassen und Beherrschen“ von *Situationen*. Dabei beschränken wir uns nicht nur auf Umweltsituationen, sondern beziehen auch mathematische Gegebenheiten mit ein. Als Grundphänomene erscheinen mir dabei: „Vorgänge“, „Messungen“, „Operationen“ und „Kausalitäten“. Unter *Vorgängen* will ich Situationen zusammenfassen, die auf Funktionen der Zeit führen. Mit *Messungen* bezeichne ich Zuordnungen, bei denen Größen Zahlen zugeordnet werden. *Operationen* werden in diesem Zusammenhang als Änderungen von Größen betrachtet, bei denen jeweils einer Größe eine andere der gleichen Art eindeutig zugeordnet ist. *Kausalitäten* bezeichnen schließlich Beziehungen zwischen verschiedenartigen Größen, die als kausale Zusammenhänge gedeutet werden können. Für jeden Typ von Phänomenen möchte ich nun beschreiben, in welcher Weise funktionale Betrachtungen ansetzen, so daß dabei die Intention des Arbeitens mit Funktionen deutlich werden kann.

(1) Funktionen dienen bei der Beschreibung von Vorgängen dazu, Aussagen über die zeitliche Entwicklung zu machen.

Das bedeutet insbesondere, daß Ereignisse vorhergesagt oder Aussagen über Vergangenes gemacht werden können.

Eine Fülle unterschiedlicher Vorgänge wird im Mathematikunterricht, traditionell vor allem in der Schlußrechnung, behandelt: Bewegungen, Wachstumsvorgänge, Fördervorgänge, Arbeitsvorgänge, Verbrauchsvorgänge usw. Alle diese Vorgänge können durch Funktionen der Zeit beschrieben werden. Die Variable Zeit ändert sich kontinuierlich in einer Richtung. Der Beobachter stellt fest, daß sich die beobachtete Größe im Laufe der Zeit ändert. Wachsen, Fallen, das Vorhandensein von Minima und Maxima drängen sich dem Betrachter geradezu auf, insbesondere, wenn diese Funktionen graphisch dargestellt sind (SCHLÖGLMANN 1984, 1986). Häufig können solche Darstellungen durch „Schreiber" wie Thermographen, Barographen usw. gewonnen werden. Bereits KLEIN (1904) und LIETZMANN (1922) empfehlen das Arbeiten mit solchen Diagrammen. Durch FREUDENTHALS didaktische Phänomenologie ist auch das Interesse an der didaktischen Analyse dieser Phänomene gewachsen. So fragt man etwa, worin die spezifischen Beiträge von Funktionen der Zeit zum Lernen des Funktionsbegriffs bestehen (WEIGAND 1988). Die Bedeutung qualitativer Betrachtungen und Beschreibungen von Vorgängen ist ebenfalls im Gefolge der Meraner Vorschläge erkannt und durch schöne Beispiele belegt worden (LIETZMANN 1922[2], RUDERT 1919, HÖFLER 1910).

Quantitative Betrachtungen stehen dagegen beim Messen im Vordergrund:

(2) Mit Maßfunktionen kann man Größen berechnen.

Wenn wir hier von Messen reden, dann meinen wir weniger den technischen Vorgang als vielmehr den Sachverhalt, daß man Größen durch Zahlen ausdrückt, die also den Größen zugeordnet werden. Wir schließen uns hier dem Sprachgebrauch von KIRSCH (1970) an. Die funktionale Sichtweise dieser Phänomene ist in der Mathematikdidaktik relativ jung. Sie ist im Zusammenhang der Entdeckung von Operatoren für das Verständnis von Zahlen und Größen aktuell geworden. Beim Berechnen von Größen, also bei der Bestimmung der zugehörigen Maßzahlen einer unbekannten Größe, werden vor allem die Additivität und die Proportionalität der Maßfunktion benutzt. Diese Erfahrungen werden in der Regel intuitiv gewonnen und nicht explizit gemacht. Denn wenn die Kinder diese Technik kennenlernen (Grundschule) haben sie nicht die formalen Fähigkeiten, um darüber zu reflektieren. Andererseits ist die Problematik später, wenn sie über die entsprechenden Fähigkeiten verfügen, für sie wenig motivierend. Man beobachtet z.B. immer wieder bei den Studierenden für die Lehrämter eine erhebliche Abneigung gegen solche Betrachtungen. Den Beitrag des Messens für das Arbeiten und Verstehen des Funktionsbegriffs heben auch VON HARTEN und OTTE hervor (1986).

Wir haben bereits auf die Beziehung zwischen Größen und Operatoren hingewiesen, die in den sechziger Jahren bei der Behandlung der Bruchrechnung besonderes Interesse gefunden hat. Auch die Phänomene des Arbeitens mit Operatoren wollen wir näher betrachten. Zu den Phänomenen des Operierens zählen wir allgemein auch das Handeln mit Größen, bei dem sie einer Veränderung unterworfen werden. Man kann dies durch ein Maschinenmodell beschreiben (input-output), wie es von BRAUNFELD (1968) zum Aufbau der Bruchrechnung verwendet wurde. Damit ergibt sich als weiterer Bereich:

(3) Durch funktionale Betrachtungen von Operationen werden Änderungen von Größen erfaßt.

Funktionale Betrachtungen von Operationen werden schon früh als Mittel zum besseren Verständnis der Rechenoperationen gesehen. So schreibt z.B. LIETZMANN (1922[2]):

> „Von der ersten Arithmetikstunde an soll dann der Funktionsbegriff seine Rolle als Bindemittel im ganzen Lehrstoff spielen. Um Mißverständnissen vorzubeugen, will ich gleich sagen, wie ich mir das denke. Wenn z.B. der Ausdruck 2a gegeben ist, so bedeutet das, daß a jede Zahl vertreten kann; da liegt es nun nahe, zuzusehen, welche Werte der Ausdruck annimmt, wenn a etwa die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft. Ebenso geht es mit Ausdrücken wie a+b, wo a eine feste Zahl ist, vielleicht 3, während b sich ändert, oder wo a und b gleichzeitig wachsen, gleichzeitig abnehmen usw. Derartige Untersuchungen, die besonderen Wert bei den inversen Operationen haben, erschließen einen tieferen Einblick in das Wesen der Rechenoperationen. Der Schüler lernt den ungeheuren Unterschied von a+b und a·b kennen, Ausdrücke, die sonst nicht selten bei flüchtigem Rechnen verwechselt werden. Wieder ist vor zweierlei zu warnen. Auf keinen Fall möge schon hier das Wort Funktion fallen. Auch von einer graphischen Darstellung in Cartesischen Koordinaten ist dringend abzuraten; um so mehr ist eine Veranschaulichung an der Zahlengeraden zu empfehlen.“ (S. 280, 281).

(Man beachte: spricht KLEIN noch von einem Fermant, so LIETZMANN bereits von einem Bindemittel!)

Ähnlich argumentiert RUDERT (1919) und zeigt, wie das in einem Lehrgang realisiert werden kann. LIETZMANN weist auf die häufig zu beobachtende Verwechslung von Summen und Produkten hin, und er hofft, sie mit solchen Betrachtungen verhindern zu können. Allgemein kann man beobachten, daß die Schüler wenig Gespür für die Wirkung von Operatoren haben. Sie meinen häufig, daß Multiplizieren vergrößert, und sind verwundert, wenn sie dann bei den

Brüchen erkennen müssen, daß Multiplizieren auch verkleinern kann. Ähnlich ist es mit dem Quadrieren. Auch hier wird allgemein angenommen, daß Quadrieren immer vergrößert. Durch Darstellung am Achsenkreuz kann man sehr gut deutlich machen, in welchen Fällen Quadrieren eine Vergrößerung und in welchen Fällen es eine Verkleinerung bewirkt, indem man untersucht, in welchen Bereichen die Normalparabel oberhalb bzw. unterhalb der 1. Winkelhalbierenden verläuft.

Zur Darstellung von Operatoren werden häufig Pfeildiagramme verwendet. An ihnen wird in Verbindung mit der Zahlengeraden die Wirkung von Operatoren gut sichtbar, allerdings immer nur für die gewählten Eingaben. Sie führen damit leicht auf falsche Vermutungen (VOLLRATH 1978a). Auch hier werden also wieder didaktische Analysen der Darstellungsformen ansetzen (s. Abschnitt 2).

Bei der Konstruktion der Bruchzahlen aus den natürlichen Zahlen mit Operatoren, die sich bereits bei WEYL (1918) findet (er spricht von Multiplikatoren), wird mit Funktionen operiert. Nachdem zunächst Ende der sechziger Jahre die Bruchrechnung überwiegend als Rechnen mit Operatoren behandelt wurde, setzten sich in den siebziger Jahren Mischkonzeptionen durch (PADBERG 1978). Dabei stand die Auffassung im Vordergrund, daß ein Zahlenbereich nur dann verstanden werden kann, wenn die unterschiedlichsten Aspekte dieses Bereiches angesprochen werden. Nach wie vor ist aber das Wechselspiel zwischen Zahl und Funktion didaktisch interessant.

Schließlich bieten Operationen auch einen natürlichen Ansatz, Operatoren mit gewünschter Wirkung zu bestimmen. Es werden also Funktionen gesucht, die bestimmten Erwartungen genügen. Mathematisch interessant ist hier vor allem die Frage, wie viele Forderungen man benötigt, um eine Funktion festzulegen. Funktionen, die z.B. 2 auf 4 abbilden, gibt es beliebig viele; unter den proportionalen Funktionen gibt es aber nur eine mit dieser Eigenschaft. Durch derartige Überlegungen wird dem Schüler bewußt, wie groß der Vorrat von Funktionen ist. Lernen sie zunächst Funktionen zur Beschreibung von Beziehungen zwischen Zahlen kennen, so erfahren sie nun, daß auch zwischen Funktionen ein Beziehungsgefüge besteht (VOLLRATH 1982).

Wir wollen als vierten Bereich von Phänomenen Zusammenhänge betrachten, die sich vor allem in den Naturwissenschaften ergeben und sich als Kausalzusammenhänge deuten lassen.

(4) Durch die Beschreibung von Kausalzusammenhängen durch Funktionen kann man Abhängigkeiten beschreiben.

Typische Kausalzusammenhänge sind die durch physikalischen Gesetze ausgedrückten Zusammenhänge wie z.B. das Hookesche Gesetz (Dehnung einer Schraubenfeder in Abhängigkeit von der Belastung,) das Ohmsche Gesetz (Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung) usw. Auch geometrische Beziehungen wie Kreisumfang in Abhängigkeit vom Durchmesser oder Flächeninhalt eines Quadrats in Abhängigkeit von der Kantenlänge lassen sich in diesem Sinne deuten. Kennt man die Funktion, so beherrscht man die betreffende Situation: Man kann z.B. den Radius so wählen, daß man einen Kreis mit einem bestimmten Umfang erhält. Solche Kenntnisse eröffnen Handlungsspielräume, sie stellen aber meist auch Sachzwänge dar, an denen man sich orientiert. Funktionale Betrachtungen spielen hierbei häufig eine wichtige Rolle für die Entdeckung bzw. Erarbeitung einer Formel. Umgekehrt dienen funktionale Betrachtungen dazu, eine Formel zu verstehen. Allerdings zeigt sich hier bald im Unterricht die Beschränkung auf Funktionen mit einer freien Veränderlichen als hinderlich. Gerade im Hinblick auf die Bedürfnisse der Algebra ist deshalb immer wieder empfohlen worden, auch Funktionen mit mehreren Veränderlichen zu betrachten (z.B. RUDERT 1919, KIRSCH 1986).

Die hier angesprochenen Phänomene sind *fächerübergreifend*. Sprechweisen und Arbeitsmethoden bei der Behandlung dieser Phänomene haben teilweise eine unterschiedliche Tradition und entwickeln sich auch immer wieder selbständig, so daß sie sich voneinander entfernen, dann aber auch wieder annähern. Das hängt auch von Zeitströmungen ab. Phasen, in denen das Allgemeine, Strukturelle betont wird, wechseln ab mit Phasen, in denen man sich stärker für das Spezifische interessiert. Solche Strömungen schlagen sich auch in der Didaktik nieder. Nachdem in den sechziger Jahren vorwiegend strukturell gedacht wurde (z.B. STEINER 1959), wird heute eher bereichsspezifisch argumentiert (z.B. BAUERSFELD 1983). An sich müßten strukturelle, auf gemeinsame Eigenschaften verschiedener Bereiche gerichtete Überlegungen auch fächerübergreifend wirken. Tatsächlich waren jedoch die strukturmathematischen Betrachtungen zu einseitig auf innermathematische Bedürfnisse und Gepflogenheiten zugeschnitten. Den Bruch zwischen der mengentheoretisch orientierten Auffassung des Funktionsbegriffs im Mathematikunterricht und dem im Physikunterricht benötigten Funktionsbegriff beschreibt JUNG (1976), ohne daß allerdings konkrete Maßnahmen gefolgt wären. Für den Mathematikunterricht der DDR bemühte sich ein Projekt von SIETMANN (SIETMANN/KÖLBL 1974 und SIETMANN 1976) um Verbindung mit dem naturwissenschaftlichen Unterricht. In den meisten Ländern findet eine wirkliche Abstimmung zwischen den Fächern wohl kaum statt. Ein Auseinanderlaufen der Fächer wird durch das Fachlehrerprinzip noch verstärkt. Hier sind sicher auch für den Bereich des funktionalen Denkens didaktische Aufgaben gegeben. Wie Schüler im Physikunterricht mit Funktionen umgehen und welche Erfahrungen sie dort sammeln können, ist eingehend von HÄUSSLER (1981) beschrieben werden.

Es war ein besonderes Anliegen der Reformbestrebungen um die Jahrhundertwende, *Anwendungen* in den Mathematikunterricht einzubeziehen. VOSS wollte, daß die in den Naturwissenschaften so erfolgreichen funktionalen Betrachtungen auch im Mathematikunterricht den Schülern vermittelt werden sollten. Auch KLEIN und LIETZMANN wollten den Mathematikunterricht für Anwendungen öffnen, so daß z.B. auch physikalische Gesetze als Funktionen im Mathematikunterricht angesprochen werden. Im Zusammenhang mit Funktionsbetrachtungen werden deshalb heute in der Regel auch Arbeitstechniken zum Auswerten von Experimenten mit Hilfe von Funktionen behandelt, z.B. Untersuchung zusammenhängender Größen auf Quotientenkonstanz als Proportionalitätstest oder das Arbeiten mit halblogarithmischem

Papier als Test, ob eine Exponentialfunktion vorliegt (z.B. HENN 1988). Es werden auch Vorschläge gemacht, im Mathematikunterricht den Schülern Gelegenheit zu bieten, sich Daten selbst zu beschaffen, um dann Zusammenhänge zu untersuchen (z.B. VOLLRATH 1978b). Dabei können die Schüler erfahren, wie die beobachteten Daten auf Grund von Fehlereinflüssen streuen, so daß eine funktionale Beziehung nur nach einer Idealisierung angenommen werden kann. BAUMANN (1981) schlägt vor, diesen Sachverhalt dadurch deutlich zu machen, daß auch korrelative Zusammenhänge betrachtet werden. Wie wir später sehen werden, vertritt dies mit anderen Argumenten auch FÜHRER (1985).

Bei diesen Betrachtungen sollte dem Schüler bewußt werden, daß Naturgesetze sich durch Funktionen beschreiben lassen und dazu dienen, „sich die Natur untertan zu machen“, schlichter: Abläufe zu steuern und Zusammenhänge auszunutzen, um bestimmte Ziele zu erreichen.

Im Hinblick auf die Behandlung von Anwendungen des Funktionsbegriffs in empirischen Wissenschaften erscheint auch eine wissenschaftstheoretische Diskussion über die Natur der verwendeten Begriffe im Mathematikunterricht didaktisch interessant. Man könnte an eine didaktische Analyse denken, wie sie von BURSCHEID angeregt worden ist, bei der man in Anlehnung an SNEED zwischen theoretischen und empirischen Begriffen unterscheidet (BURSCHEID/MELLIS 1988).

Phänomene standen in der Entwicklung der Mathematik meist am Anfang. Am Ende ergibt sich dann ein hoch entwickelter formaler Apparat, der seine Wurzeln in den Phänomenen kaum erkennen läßt. Der Mathematikunterricht läßt sich leider immer wieder dazu verführen, die Mathematik vom Höhepunkt der Entwicklung her zu sehen. Damit müssen dem Lernenden wesentliche Einsichten verschlossen bleiben. Wir werden später noch sehen, welche große Bedeutung die Kenntnis der Phänomene z.B. für die Hypothesenbildung hat. Eine phänomenologische Betrachtung des funktionalen Denkens soll deutlich machen, welche Phänomene der Mathematikunterricht ansprechen, behandeln, erfahren und erleben lassen muß, um eine ausreichende Erfahrungsgrundlage für das Verstehen und das Arbeiten mit Funktionen zu schaffen. Sinngemäß gilt also auch für den Mathematikunterricht die Forderung WAGENSCHEINS: „Rettet die Phänomene!“ (1977).

Die Ausprägung funktionalen Denkens zeigt sich demnach auch daran, welche Phänomene zum Funktionsbegriff als Erfahrungsgrundlage vorhanden sind.

Wir haben bereits an verschiedenen Stellen erkenntnistheoretische Fragen angesprochen. Auf diese Fragen wollen wir jetzt noch etwas näher eingehen und sie unter didaktischen Gesichtspunkten betrachten.

4. Funktionales Denken als Erkennen

(1) Funktionale Beziehungen

Wie wir gesehen haben, gehört zu den Grundvorstellungen, die mit dem Funktionsbegriff verbunden sind, die Annahme einer kausalen Abhängigkeit (STOYE 1983). Für FÜHRER (1985) sind Funktionen „Kürzel für hypothetische Kausalbeziehungen“. Das klassische Kausalitätsprinzip besagt: „Ex nihilo nihil fit“. Aus nichts, wird nichts. Alles hat seinen Grund. Dieses Kausalitätsprinzip ist Gegenstand zahlreicher philosophischer Spekulationen gewesen. SACHSSE (1979) zeigt, wie dieses Prinzip im Laufe der Zeit erschüttert wurde (s. WEYL 1928). So vertritt z.B. HUME die Ansicht, daß die Verbindung von Ursache und Wirkung durch „Gewohnheit“ hergestellt wird. Die Seele ist für KANT nicht das passive Objekt, dem die Natur ihre Regelmäßigkeit aufprägt, sondern es handelt sich um ein aktives spontanes Vermögen des Menschen. BACON engt die Frage der Kausalität ein auf Gesetzlichkeit im Sinne einer funktionalen Beziehung. Für MACH (1919[3]) entspringt die Suche nach Ursachen, nach Erklärungen psychischen Bedürfnissen, die von der Physik eigentlich nicht recht befriedigt werden können, da sie nur Beschreibungen von Zusammenhängen liefert, indem sie eben funktionale Zusammenhänge angibt. MACH versuchte daher, den „Ursachenbegriff“ durch den „mathematischen Funktionsbegriff“

zu ersetzen, so daß man sich auf die Beschreibung der „Abhängigkeit der Merkmale der Erscheinungen voneinander“ beschränkt. Er schreibt:

> „Sobald es gelingt, die Elemente der Ergebnisse durch meßbare Größen zu charakterisieren, was bei Räumlichem und Zeitlichem sich unmittelbar, bei anderen sinnlichen Elementen aber doch auf Umwegen ergibt, läßt sich die Abhängigkeit der Elemente voneinander durch den Funktionsbegriff viel vollständiger und präziser darstellen, als durch so wenig bestimmte Begriffe, wie Ursache und Wirkung.“ (MACH 1905, S. 273).

In dieser Sicht liegt natürlich eine Verarmung. Der Wunsch, die Ursachen zu *verstehen*, bleibt damit unbefriedigt.

Wie die stochastischen Aussagen der Quantenphysik auf das Kausalitätsprinzip wirken, ist ausführlich von PLANCK diskutiert worden (1948[4]). Dabei wird deutlich, daß funktionale Beziehungen im engeren Sinn zur Beschreibung von Zusammenhängen in der Natur nicht ausreichen, sondern daß man zumindest stochastische Zusammenhänge zulassen muß. FÜHRER fordert daher (1985):

> „Nach den Erfahrungen der Makro- und Mikrophysik ist das Denken in stilisierten Kausalbeziehungen (oder Handlungen) unbedingt zu erweitern um ein angemessenes Denken in Korrelationen. Es wird sich erst noch zeigen müssen, ob das Vordringen der Stochastik diese notwendige Ergänzung funktionaler Sichtweisen um stochastische leisten kann. Denkbar wäre, ausgehend von feineren Beobachtungen unvermeidlicher Streuungseffekte jeglichen Handelns, eine Ausweitung von Funktionsmodellen zu Regressionsmodellen.“ (S. 13)

Wir hatten bereits gesehen, wie mathematische und naturwissenschaftliche Zusammenhänge im Mathematikunterricht mit Hilfe des Funktionsbegriffs beschrieben werden können. Dieses Vorgehen sollte im Unterricht reflektiert werden. Dabei sollte den Schülern bewußt werden, welche Bedeutung der Funktionsbegriff für das Erkennen von Zusammenhängen hat. Auch die Problematik Erfinden-Entdecken kann hier deutlich gemacht werden.

Für PLANCK ist das Kausalitätsprinzip ein „heuristisches“ Prinzip (1948[4], S. 23). Zusammenhänge werden vermutet, so daß neue Erkenntnis gewonnen werden kann. Entsprechend kann auch funktionales Denken im Mathematikunterricht zu Vermutungen führen, die dann überprüft werden und zur Entdeckung neuer Zusammenhänge führen können. Die Schüler sollten auch dies Vorgehen reflektieren und als heuristisches Prinzip erfassen.

(2) Funktionale Begriffsbildungen

Funktionen sind sowohl in der Mathematik als auch in den Naturwissenschaften ein wichtiges Werkzeug, um Begriffe zu bilden. Man denke etwa an die Begriffe der Ableitung, des unbestimmten Integrals, der Geschwindigkeit, der Dichte, der Arbeit usw. Diese Begriffsbildungen lernen die Schüler im Mathematikunterricht zum Teil in der Sekundarstufe 1, vor allem aber in der Analysis kennen. Andererseits verwischen sich hier für die Schüler häufig die logischen Beziehungen zwischen den auftretenden Begriffen, etwa zwischen Tangentensteigung und Ableitung oder zwischen Flächeninhalt und Integral (KIRSCH 1977). Schließlich stellen solche Begriffsbildungen häufig Verallgemeinerungen elementarer Begriffe dar, die zunächst von den Schülern nicht funktional erfahren werden. Man denke etwa an die Tangentensteigung oder den Flächeninhalt. Einerseits gewinnen die Schüler aus den elementaren Fällen Vorstellungen, andererseits übertragen sie diese meist unkritisch auf allgemeinere Situationen. Für die Schüler stellt sich dann nicht das Problem, die Tangentensteigung oder den Flächeninhalt zu definieren, sondern ihnen geht es vor allem um die Berechnung dieser Größen. BLUM und KIRSCH verzichten deshalb zumindest für Grundkurse in Analysis auf eine Formalisierung bzw. Problematisierung dieser Begriffe (1979).

(3) Funktionale Argumentationen

Wir hatten bereits darauf hingewiesen, daß funktionale Betrachtungen bei Gleichungen und Ungleichungen zu Beweisen führen können (z.B. BRÜ-

NING/SPALLEK 1978, KRAUSKOPF 1980, VOLLRATH 1982). Hier bieten sich vor allem Argumentationen über graphische Darstellungen an, die insbesondere Generalisierungsmöglichkeiten zeigen, aber auch vor unzulässigen Generalisierungen warnen können. Die besondere Schwierigkeit liegt jedoch in der „Übersetzung“ von algebraischer Eigenschaft in Funktionseigenschaft und umgekehrt. Offensichtlich können bestimmte Darstellungen das algebraische Problem so stark verfremden, daß die funktionale Überlegung deutlich schwieriger ist als die algebraische. Diese Verhältnisse bedürfen noch eingehender didaktischer Untersuchungen. Schließlich kann für die Schüler auch ein Bruch zwischen geometrischem und algebraischem Anspruch entstehen. Akzeptiert man bei einem funktionalen „Beweis“ mit der graphischen Darstellung die Anschauung, dann steht das im Widerspruch zum Geometrieunterricht, in dem gerade die mangelnde Tragfähigkeit der Anschauung betont wird. Zumindest müßten hier also die Anforderungen aneinander angepaßt werden.

Funktionale Beweise ergeben sich schließlich, wenn man mit Funktionen operiert und dabei die Gesetze der Addition, Multiplikation und Verkettung verwendet. Beispiele könnten etwa die Potenzgesetze sein (VOLLRATH 1982). Allerdings stellt dies erhebliche Ansprüche an das Abstraktionsvermögen der Schüler.

Funktionale Argumentationen sind auch in der Geometrie möglich. Ich denke hier vor allem an die anschaulichen Beweise durch stetige Bewegungen bzw. Verformungen, die erneut von BENDER (1987) propagiert worden sind. Häufig wird ein funktionaler Zusammenhang betrachtet, (z.B. Umfangswinkel-Mittelpunktswinkel, Winkel-Nebenwinkel). Bei der Bewegung bzw. Verformung wird dann beobachtet, welche Wirkungen die Änderung der einen Größe auf die andere hat. Solche Betrachtungen liefern dann den Beweis selbst und vertiefen die Überzeugungskraft des Beweises, indem sie ihn plausibel machen. Sie stützen schließlich die Einsicht in die Allgemeingültigkeit, indem sie viele Fälle zeigen, also insbesondere Sonderfälle in allgemeine Fälle einbetten.

(4) Funktionen als kognitive Modelle

Funktionen kann man als mathematische Objekte betrachten, die aus „natürlichen Phänomenen“ (DÖRFLER 1988) konstruiert werden. DÖRFLER beschreibt als wesentliche Schritte eines solchen Konstruktionsprozesses: Die Wahrnehmung des Phänomens (Interpunktion), die Verbindung mathematischer Objekte mit den Gegenständen und Abläufen des Phänomens (Assoziation), die Betrachtung bestimmter Stadien und deren mathematischer Charakteristika (Fokussierung) und gegebenenfalls die Verlagerung der Aufmerksamkeit auf andere Stadien und deren mathematischer Charakteristika. Beobachtet man z.B. einen Wachstumsprozeß, dann wird zunächst in einer Interpunktion das Phänomen wahrgenommen. Den beobachteten Zuständen des Prozesses werden in einer Assoziation Zahlen bzw. Größen zugeordnet. Indem man äquidistante Stadien auswählt, erfolgt eine Fokussierung, die dann zum Begriff der Exponentialfunktion führt. Für DÖRFLER ist das ein konstruktiver Vorgang. Verbunden sind damit stets „Meßhandlungen“, bei denen es sich um ein aktives Eingreifen des Menschen handelt. Damit ist auch bei mathematischen Objekten, die scheinbar eher deskriptiv sind, das menschliche Handeln entscheidend.

> „Die Struktur solcher Handlungen ist auch in der kognitiven Repräsentation der mathematischen Objekte als kognitives Schema mit enthalten ... Es erscheint aus dieser theoretischen Position heraus als bedenklich und defizitär, wenn viele mathematische Begriffe in der Schule im wesentlichen nur mehr als formale Beziehungen an Prototypen oder gar nur an Symbolen vermittelt werden ohne Bezug auf die jeweils konstitutiven Handlungen.“ (S. 90,91)

DÖRFLER sieht als Folge davon, daß es damit nicht zu einer subjektiven Konstitution mathematischer Objekte als kognitive Schemata von Handlungen und Beziehungen kommt.

Im folgenden wollen wir etwas näher untersuchen, welche psychologischen Vorstellungen über die kognitive Entwicklung des Funktionsbegriffs vor allem unter dem Einfluß von PIAGET und in kritischer Distanz zu seinen Vorstellungen gewonnen werden können.

5. Entwicklung des funktionalen Denkens

Funktionales Denken beginnt bei intuitiven Vorstellungen über funktionale Zusammenhänge wie: „Wenn man die eine Größe ändert, dann ändert sich die andere“ oder „Je mehr ..., desto mehr ...“, und es ist voll entwickelt bei den Denkweisen der Analysis. HÖFLER (1910) hatte Bedenken, auch schon die frühen Ausprägungen als funktionales Denken zu bezeichnen und sprach deshalb von „funktionaler Anschauung“. RUDERT (1919) schloß sich dem an und sprach von „funktionalen Vorstellungen“. Bei ihm finden sich auch Hinweise, daß Voraussetzungen für funktionales Denken bei Kindern elementare funktionale Vorstellungen sind. So schreibt er:

> „Schon das vorschulpflichtige Kind schließt, daß der Vater ein immer größeres Stück vom Garten umgegraben haben wird, je länger er daran arbeitet, daß der Milchtopf umso voller wird, je länger die Mutter aus der Kanne Milch hineingießt. Es hat dazu nicht nötig, den Vorgang in seinen Einzelheiten immer wieder zu beobachten, sondern es arbeitet mit der Vorstellung dieser Vorgänge.“ (S. 41)

Auch die Frage, inwieweit sich Unterschiede je nach Veranlagung zeigen, wird bei ihm angesprochen und als Forschungsproblem genannt.

RUDERT ist überzeugt, daß funktionale Vorstellungen gefördert werden können. So soll etwa das Kind bei geschlossenen Augen mit der Hand auf den Kopf einer Person in der Ferne zeigen und nun andeuten, wie sich die Stellung des Armes ändert, wenn sich die Person nähert. Durch solche Übungen können

Erfahrungen und Vorstellungen vermittelt werden.

Ohne das Problem näher zu behandeln, werfen seine Überlegungen und Vorschläge doch bereits die Grundfrage auf, ob sich dieses Denken beim Kinde spontan entwickelt oder ob es das Ergebnis von Erfahrungen und Instruktionen ist. Durch die Untersuchungen von PIAGET liegt es nahe, auch die Entwicklung des funktionalen Denkens als einen spontanen Prozeß anzusehen, der sich in Stadien vollzieht und das Ergebnis der Reifung und der Verarbeitung spontaner Erfahrungen ist. Andererseits sind die damit verbundenen Probleme nicht zu übersehen. So schreibt BANDURA (1979):

> „Es spricht einiges dafür, die Entwicklung als einen spontanen Prozeß der Selbstentdeckung darzustellen. Doch werden die negativen Aspekte von Stadientheorien zu wenig berücksichtigt. Solche Theorien neigen dazu, die Menschen in vorgegebene Typologien zu zwängen. Allzu leicht stempeln sie die Menschen durch Stadienklassifizierungen sterotyp ab. Nachdem die Menschen klassifiziert worden sind, werden sie in der Regel nach ihrer Kategorie, nicht nach ihrem individuellen Denken und Handeln, beurteilt. Aus diesem Grunde schaden solche Klassifizierungspraktiken häufig mehr als sie nützen. Außerdem können Stadientheorien als willkommene Entschuldigung für schlechte Programme zur Förderung der intellektuellen Entwicklung herhalten... Statt geeignete Lernumwelten zu schaffen, neigen die Anhänger der Stadientheorien dazu, zu warten, bis die Kinder zum Lernen bereit sind. Für viele wird es eine lange Wartezeit.“ (S. 183)

Die Untersuchungen von PIAGET zur Entwicklung des Funktionsbegriffs beim Kinde (1977) wirken sehr artifiziell (FREUDENTHAL 1983), obwohl es nicht an Versuchen fehlt, auch sie für die Mathematikdidaktik fruchtbar zu machen (JAHNKE/SEEGER 1986). Seine Beobachtungen zur Entwicklung der Fähigkeit, *Proportionalität* zu erfassen, haben eine große Zahl weiterer Untersuchungen angeregt, in denen es vor allem darum geht, Zwischenstadien zwischen dem Erfassen der Monotonie und der Proportionalität zu identifizieren. PIAGET hatte z.B. beobachtet, daß es vor dem Stadium, in dem Proportionalität erfaßt wird, ein Stadium gibt, in dem fälschlich eine additive Änderung angenommen wird, also z.B. $f(x+a) = f(x) + a$. Die große Zahl der Untersuchungen zur Entwicklung des „proportional reasoning" ist ausführlich von TOURNAIRE und PULOS (1985) referiert worden. Viele dieser Untersuchungen sind auch von ANDELFINGER (1981) dokumentiert und didaktisch ausgewertet worden. Daß die Ergebnisse dabei relativ mager ausfallen, liegt wohl an einem recht eingeschränkten Verständnis für „funktionales Denken" und an einer unzulänglichen Phänomenologie als Grundlage der Untersuchungen.

Untersuchungen über die Entwicklung des funktionalen Denkens sollten sich auf die Fähigkeiten beziehen:

(1) Zusammenhänge zwischen Größen festzustellen, anzugeben, anzunehmen und zu erzeugen;

(2) Hypothesen über die Art eines Zusammenhanges und über den Einfluß von Änderungen zu bilden, zu kontrollieren und gegebenenfalls zu revidieren.

Diese Fähigkeit setzt voraus, daß Gedankenverbindungen hergestellt, Blickrichtungen verändert und Handlungen konkret und in Gedanken durchgeführt werden können. Das unterliegt einer Entwicklung, über die PIAGETS Theorie der kognitiven Entwicklung wichtige Einsichten vermittelt. Zugleich muß man jedoch sehen, daß funktionales Denken Erfahrungen mit Phänomenen erfordert, durch die Hypothesen überhaupt erst möglich werden. Im Vollzug des funktionalen Denkens, in der Auseinandersetzung mit neuen Phänomenen, werden neue Erfahrungen erworben, die zu einer weiteren Entfaltung des funktionalen Denkens führen. Gerade dieser Prozeß ist aber von besonderem didaktischen Interesse.

Daß sich also z.B. bei der Entwicklung der Fähigkeit, proportionale Zusammenhänge zu erkennen, Entwicklungsstadien erkennen lassen, liegt einmal in den Stadien der kognitiven Entwicklung begründet, sicher aber auch im Sammeln von einschlägigen Erfahrungen. Für die Proportionalität scheinen mir vor allem „Phänomene des Messens" verantwortlich zu sein. Auch bei der

Fähigkeit, die Monotonie einer funktionalen Abhängigkeit zu erfassen, läßt sich eine Entwicklung feststellen. So habe ich z.B. mit Versuchen an einer Fahrbahn, bei denen Kinder einen passenden Startwert suchen sollten, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen, beobachtet, daß Kinder zunächst keinen Zusammenhang zwischen Startwert und Ergebnis erkannten. Sie blieben erfolglos. Erste Erfolge stellten sich bei Kindern ein, die zwar einen Zusammenhang annahmen, aber unsystematisch probierten. Gute Erfolge stellten sich ein, sobald ein monotoner Zusammenhang angenommen wurde. Ich habe eine Altersabhängigkeit der von mir beobachteten Stadien nachweisen können, die etwa der Altersabhängigkeit der von PIAGET angegebenen Stadien entspricht (VOLLRATH 1986). Inwieweit einschlägige Erfahrungen etwa mit dem Herabrollen von Fahrzeugen (Schlitten, Dreirad, Fahrrad) oder Spielzeugen (Ball, Murmeln) eine Rolle spielten, konnte dabei allerdings nicht geklärt werden. Sie müssen aber wohl angenommen werden. Die beobachteten Verhaltensweisen hat auch MEISSNER (1987) bei Suchaufgaben mit dem Taschenrechner festgestellt, ohne allerdings eine Altersabhängigkeit untersucht zu haben.

Für das Erkennen weiterer Funktionseigenschaften ist die Entwicklung z.B. für die Linearität näher von RICCO (1982) und für Antiproportionalitäten und quadratischen Zusammenhang von SUAREZ (1977) untersucht worden. Wechselnde Strategien in einem Versuch deuten auf einen Wechsel der zugrundeliegenden Annahmen bei den Versuchspersonen hin. Wie SUAREZ beobachtete, nehmen z.B. Kinder bei einem Versuch, dem eine quadratische Funktion zugrundeliegt, zunächst einen proportionalen Zusammenhang an, um die gestellte Aufgabe (Bestimmung eines unbekannten Wertes) zu lösen. Viele Kinder haben dann Probleme, sich von dieser Annahme zu trennen, selbst wenn sie zu offensichtlich falschen Ergebnissen führt. Erfahrene Schüler verfügen allerdings in der Regel über ein Repertoire weiterer Funktionstypen, die sie zur Bildung neuer Hypothesen heranziehen können. Weniger erfahrene Schüler verfallen dagegen auf noch ungeeignetere Annahmen, wenn sie mit einer neuen Situation konfrontiert werden (KARPLUS u.a. 1983). Jenseits der Proportionalität ist aber ganz sicher der Unterricht ausschlaggebend, so daß es wenig sinnvoll ist, noch eine spontane Entwicklung anzunehmen. Das bedeutet, daß hier vor allem der Einfluß des Unterrichts auf Fähigkeiten zu funktionalem Denken zu untersuchen ist.

Nach unseren Betrachtungen zum funktionalen Denken ist es nicht zu erwarten, funktionales Denken als eine bestimmte Fähigkeit angeben und messen zu können. Insbesondere wird man kaum einen einzigen Faktor „funktionales Denken“ als mathematische Leistungsdimension angeben können. Es ist also nicht verwunderlich, daß sich in dem ausführlichen Bericht von TREUMANN (1974) über Leistungsdimensionen im Mathematikunterricht ein solcher Faktor nicht findet. Man könnte allerdings Beziehungen zum Faktor „induction“ bei THURSTONE (1938) sehen, bei dem es z.B. um das Auffinden eines Bildungsgesetzes einer Folge geht. Aber das ist didaktisch sicher nicht sehr ergiebig. Immerhin weist der Bericht auf das Problem der Beziehungen zwischen solchen Leistungsdimensionen hin. Das ist in der Tat ein Problem, das bisher didaktisch nicht befriedigend behandelt worden ist. Für unser Thema bedeutet das etwa, welche Beziehungen zwischen funktionalem Denken und anderen Denkweisen, also z.B. stochastischem oder logischem oder algorithmischem Denken bestehen. So ist z.B. BAUMANN (1981) der Auffassung, daß sich funktionales Denken in algorithmischem Denken konkretisiert.

Wie wir gesehen hatten, gibt es unterschiedliche Auspägungen des funktionalen Denkens. Für didaktische Forschungsarbeiten, aber auch zur Formulierung und Kontrolle von Lernzielen im Unterricht benötigt man handhabbare Beschreibungen der unterschiedlichen Ausprägungen funktionalen Denkens. Ansätze finden sich dazu in der didaktischen Literatur (z.B. VOLLRATH 1974, 1982; VON HARTEN u.a. 1986; BLUM/TÖRNER 1983; STOYE 1983).

Die Auswertung der bisherigen Forschungsarbeiten zum funktionalen Denken durch ANDELFINGER (1982) und die Untersuchung von HART (1981) zeigen, daß die Schüler entgegen optimistischer Annahmen auf Seiten der Lehrer doch erhebliche Schwierigkeiten im Umgang mit Funktionen haben. Folgende Beobachtungen zu Schwierigkeiten mit dem Funktionsbegriff berichtet z.B.

ANDELFINGER (1987): Wohl assoziieren die meisten Schüler „Funktion“ mit „Zuordnung“, bringen diese Idee aber selten in die Arbeit mit Funktionen ein. In der Regel bleibt die Kenntnis der Definition des Funktionsbegriffs ohne Wirkung auf den konkreten Umgang mit Funktionen. Im Umgang mit Wertetabellen überwiegt die Betrachtung „horizontaler“ Zusammenhänge zwischen den Spalten; „vertikale“ Zusammenhänge treten zurück. Die Schüler vermeiden, wenn irgend möglich, das Arbeiten in negativen Koordinatenbereichen und verlängern die Graphen nur ungern in diese Bereiche. Schüler haben erhebliche Schwierigkeiten mit endlichen und mit diskreten Definitionsbereichen. (Funktionales Denken ist vielfach auf „stetige Veränderungen“ eingeschränkt.) Das Zeichnen von graphischen Darstellungen fällt schwer, sobald die üblichen Bezeichnungen der Variablen nicht benutzt werden (s.a. NÄGERL/ZERBST 1978). Das Bilden von Umkehrfunktionen bleibt häufig ein dem Lehrer nachgeahmtes Verfahren, ohne daß eine Einsicht in die Bedeutung der einzelnen Schritte gegeben wäre. Als Grundvorstellungen (ANDELFINGER spricht von Signalen des Themenbereichs Funktionen) finden sich zwar: „Funktion ist ein Zusammenhang, eine wechselseitige Abhängigkeit“, aber auch immer noch „Funktion ist eine Gleichung zum Ausrechnen“ und „Funktion ist ein Bild, eine ordentliche Kurve“.

Die Ursache für die Schwierigkeiten liegen sicher in der Komplexität des Themas: es gibt zahlreiche verschiedene Darstellungsformen, viele Eigenschaften und unterschiedliche Grade der Abstraktheit bzw. der Allgemeinheit. Die Erforschung dieses dreidimensionalen Beziehungsgefüges, wie es z.B. von DREYFUS und EISENBERG (1982) beschrieben wird, ist deshalb ein wichtiges Anliegen der Didaktik. Wie so häufig sind allerdings die bisher gefundenen Ergebnisse etwas enttäuschend, wenn etwa eine Untersuchung aus diesem Forschungsprogramm zu dem Ergebnis kommt: „Die Vorstellung der Schüler zum Funktionsbegriff wachsen mit fortschreitender Klassenstufe“ oder „Begabte Schüler zeigen häufiger korrekte Vorstellungen über den Funktionsbegriff als weniger begabte.“ Man wundert sich, wenn dann aus derartigen Ergebnissen noch Folgerungen für den Unterricht gezogen werden.

6. Funktionales Denken im Mathematikunterricht

Wir kommen zum Ausgangspunkt zurück. Die Meraner Vorschläge hatten die „Erziehung zum funktionalen Denken“ gefordert. Es war damals neben der Stärkung des räumlichen „Anschauungsvermögens“ und der „logischen Schulung“ eines von drei übergreifenden Zielen des Mathematikunterrichts. Daß für KLEIN funktionales Denken und räumliches Anschauungsvermögen so wichtig sind, liegt für SCHUBERTH (1971) in KLEINs mathematischer Denkweise begründet. Für INHETVEEN (1976) dagegen sind dafür gesellschaftliche Gründe maßgebend.

Erziehung zum funktionalen Denken wurde als „inhaltliches Ziel“ gesehen (HÖFLER 1910). Formale Ziele waren damals etwa die Förderung des Gedächtnisses oder die Steigerung der Ausdauer beim Lösen von Aufgaben. Für HÖFLER war die Herstellung des richtigen Verhältnisses zwischen Inhalt und Form „geradezu der springende Punkt“ der damaligen Reformbestrebungen (S. 16).

Wir hatten bereits gesehen, daß sich funktionales Denken auf das Arbeiten mit Funktionen bezieht. Deshalb wird statt dessen auch häufig nur vom *Umgang* oder dem *Arbeiten mit Funktionen* gesprochen (z.B. KIRSCH 1976a, STOYE 1983).

Andererseits sahen die Meraner Vorschläge das funktionale Denken wohl doch wesentlich umfassender im Sinne eines allgemeinen Prinzips, wie es etwa STRUNZ (1949) als dynamisches oder kinetisches Denken beschreibt, das nicht mehr unmittelbar auf den Funktionsbegriff bezogen ist. Auch bei FÜHRER (1985) finden sich solche Anklänge, wenn er insbesondere eine Verbindung zum operativen Prinzip herstellt:

> „Man könnte sich darauf verstehen, das operative Prinzip als methodische Hilfe auf dem Weg zum obersten Bildungsziel des funktionalen Denkens anzusehen.“ (S. 13).

Dabei bleibt für mich unklar, in welcher Hierarchie von Zielen dieses „oberste Bildungsziel“ des Mathematikunterrichts anzusiedeln ist. Ich sehe die Gefahr, daß sich in dieser Allgemeinheit der Begriff des funktionalen Denkens der didaktischen Forschung und auch der Unterrichtswirklichkeit weitgehend entzieht. Es erscheint mir zweckmäßiger, diesen Begriff stärker an den Funktionsbegriff anzubinden, indem darunter vor allem das Denken mit Funktionen verstanden wird.

Der Mathematikunterricht hat dann die Aufgabe, dafür zu sorgen, daß sich bei den Schülern funktionales Denken in diesem Sinne entfalten kann. Nach unseren phänomenologischen Betrachtungen bedeutet dies, daß sie grundlegende Erfahrungen an einschlägigen Phänomenen sammeln. An den auftretenden Problemen entwickeln sie dann die Denkweisen, die für funktionales Denken typisch sind. Die didaktische Literatur und die Schulbücher bieten dafür eine Fülle von Realisierungsangeboten. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, diese näher zu beschreiben vor allem auch im Hinblick auf die unterschiedlichen Klassenstufen und Schultypen.

Wir hatten gesehen, daß es unterschiedliche Ausprägungen des funktionalen Denkens gibt, von intuitiven Vorstellungen bis hin zum erfolgreichen Gebrauch hoch entwickelter Methoden. Der Mathematikunterricht hat also das Ziel, einerseits tragfähige Intuitionen zum Funktionsbegriff zu erzeugen (FISCHER 1976), andererseits aber auch jeweils schulartbezogen ein angemessenes Repertoire an Methoden zu vermitteln.

Wenn man schließlich Ziele des Mathematikunterrichts angibt, so sind Unterrichtsmethoden zu entwickeln und zu kontrollieren. Die didaktische Literatur enthält eine Fülle methodischer Vorschläge zum funktionalen Denken. Die wenigen empirischen Befunde über die tatsächlich erzielten Resultate sind eher deprimierend, wie insbesondere der Bericht von ANDELFINGER (1987) zeigt. Vor allem scheinen erhebliche Schwierigkeiten zu bestehen, die verschiedenen Vorstellungen und Methoden ineinander überzuführen, wie es z.B. von FISCHER (1976) gefordert wird. Auch das Gefühl für die Angemessenheit eines Verfahrens hinsichtlich der Problemstellung scheint nicht sehr ausgeprägt zu sein.

Schließlich stellt sich natürlich auch die Frage, welche Vorstellungen die Lehrer von Funktionen haben und wie sich ihre Vorstellungen auf den Unterricht auswirken. Die Beziehungen zwischen Lehrer- und Schülerkonzepten finden zunehmend das Interesse didaktischer Forschung (z.B. ANDELFINGER 1984).

7. Schlußbemerkungen

Funktionales Denken ist also bestimmt durch das Denken in Zusammenhängen, das sich in der Auseinandersetzung mit bestimmten Phänomenen entfaltet. Dazu bedarf es persönlicher Erfahrung und der Anleitung durch Erfahrene. Dabei ist funktionales Denken verschiedener Ausprägungen fähig. Worin diese bestehen, wie sie erzeugt, festgestellt, weiterentwickelt und genutzt werden können, ist erst in Umrissen erkennbar und bedarf deshalb weiterer theoretischer und empirischer didaktischer Forschungen.

Ich bedanke mich für wertvolle Hinweise der Gutachter, der Herausgeber und von Kollegen aus dem Beirat.

8. Literatur

Andelfinger, B., Didaktischer Informationsdienst, Mathematik, Thema: Proportion, Neuss 1982

Andelfinger, B., Arithmetik und algebraische Lernerkonzepte in der SI, BMU (1984) 71-74

Andelfinger, B., Didaktischer Informationsdienst, Mathematik, Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen, Soest 1987

Bandura, A., Sozialkognitive Lerntheorie, Stuttgart 1979

Bauersfeld, H., Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und- lehrens, in: H. Bauersfeld u.a. (Hrsg.) Lernen und Lehren von Mathematik, IDM 6, Köln 1983, 1-56

Baumann, R., Rez.: Briel,W.v., R. Neveling, Grundkurs Analysis, ZDM 13 (1981)122-125

Bender, P., Anschauliches Beweisen im Geometrie-Unterricht- unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen, Gesamthochschule Kassel, Preprint 1987

Blum, W., A. Kirsch, Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen, MU 25, Heft 3 (1979) 6-24

Blum, W., G. Törner, Didaktik der Analysis, Göttingen 1983

Braunfeld, P., Ein neuer Zugang zur Bruchrechnung vom Standpunkt der Operatoren, BMU (1968) 209-217

Brüning, A., K. Spallek, Eine inhaltliche Gestaltung der Gleichungslehre: Terme oder Abbildungen und Funktionen, MPSB 25 (1978) 236-271

Burscheid, H.J., W. Mellis, The Construction of the Fraction Concept and the Addition of Fractions as Content of an Empirical Theory, In: H.G. Steiner, A. Vermandel (Hrsg.), Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics), Proc. 2nd TME-Conference, Bielefeld-Antwerpen 1988, 226-235

Burton, L., Mathematical thinking: The struggle for meaning, JRME 15 (1984) 35-49

Dörfler, W., Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion, in: W. Dörfler (Hrsg.), Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung, Wien 1988, 55-125

Dreyfus, T., T. Eisenberg, Intuitive functional concepts:A baseline study on intuitions, JRME 13 (1982) 360-380

Du Bois-Reymond, E., Kulturgeschichte und Naturwissenschaft, 1877, In: S. Wollgast (Hrsg.) E. Du Bois-Reymond, Vorträge über Philosophie und Gesellschaft, Hamburg 1974

Engel, E., Raumlehre, Langensalza 1922

Fischer, R., Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen, ZDM 8(1976) 185-192

Fischer, R., G. Malle, Mensch und Mathematik, Mannheim 1985

Freudenthal, H., Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1,2, Stuttgart 1973

Freudenthal, H., Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Dordrecht 1983

Führer, L., Zur Entstehung und Begründung des Analysisunterrichts an allgemeinbildenden Schulen, MU 27, Heft 5 (1981) 81-122

Führer, L., „Funktionales Denken“: Bewegtes fassen-das Gefaßte bewegen. Math. Lehren 11 (1985) 12-13

Gutzmer, A., Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten, MU 26, Heft 6 (1980) 53-62; Nachdruck aus: A. Gutzmer (Hrsg.) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission derGesellschaft Deutscher Nachforscher und Ärzte, Leipzig 1908

Häussler, P., Denken und Lernen Jugendlicher beim Erkennen funktionaler Beziehungen, Bern 1981

Hamley, H.R., Relational and Functional Thinking, 9th yearbook 1935, NCTM,Reprint AMS Press, New York 1966

Hart, K.M., Children's Understanding of Mathematics: 11-16, London 1981

von Harten, G., M. Otte, Gleichungen, in: G. von Harten u.a., Funktionsbegriff und funktionales Denken, Köln 1986, 131-180

von Harten, G., H.N. Jahnke, T. Mormann, M. Otte, F. Seeger, H. Steinbring, H. Stellmacher, Funktionsbegriff und funktionales Denken, Köln 1986

Helmholz, C.P., Zum funktionalen Denken im Mathematikunterricht, MSch 16 (1978) 303-309

Henn, H.-W., Meßwertanalyse - Eine Anwendungsaufgabe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, MNU 41 (1988) 143-151

Hering, H., Wie reagiert eine Funktion auf additive Änderungen des Arguments? MU 28, Heft 3(1982) 50-66

Höfler, A., Didaktik des mathematischen Unterrichts, Leipzig 1910

Inhelder, B., J. Piaget, The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence, New York 1958

Inhetveen, H., Die Reform des gymnasialen Mathematikunterrichts zwischen 1890 und 1914, Bad Heilbrunn 1976

Jahnke, H.N., F. Seeger, Proportionalität, in: v. Harten, G. u.a., Funktionsbegriff und funktionales Denken, Köln 1986, 35-83

Jung, W., Wachsende Kluft zwischen Schulmathematik und Schulphysik? BMU 1976, Hannover (1976) 95-102

Janvier, C., The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations-Studies and teaching experiments, University of Nottigham 1978

Karplus, R., S. Pulos, E.K. Stage, Proportional reasoning of early adolescents, in: R. Lesh, M. Landau, Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, New York 1983, 45-86

Karaschewski, Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts, Teil II, Stuttgart 1970

Kiesow, N., K. Spallek, Zum funktionalen Ansatz in der Schulmathematik - Ein inhaltlich-operativer Zugang zum Funktionsbegriff, JMD 4 (1983) 3-38

Kirsch, A., Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung, MPSB 16 (1969) 41-55

Kirsch, A., Elementare Zahlen-und Größenbereiche, Göttingen 1970

Kirsch, A., Eine „intellektuell ehrliche“ Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen, DdM 4 (1976a) 87-105

Kirsch, A., Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht, DdM 4 (1976b) 257-284

Kirsch, A., Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht, DdM 5 (1977) 87-101

Kirsch, A., Zuordnungstafeln und Operatorpfeile: Vorschläge zum Arbeiten mit Funktionseigenschaften statt Funktionstermen, MU 28, Heft 3 (1982) 28-49

Kirsch, A., Lineare Funktionen zweier Veränderlicher als erschließender Unterrichtsgegenstand, math.did.9 (1986) 133-158

Klein, F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, 1. Band, Berlin 1933[4]

Klein, F., E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen, Leipzig 1904

Krauskopf, R., Der funktionale Aspekt der Schulmathematik - Bemerkungen zur Ungleichungslehre, MU 26, Heft 1 (1980) 42-55

Lauter, J., Aufbau der elementaren Gleichungslehre nach logischen und mengentheoretischen Gesichtspunkten, MU 10, Heft 5 (1964) 59-119

Lenné, H., Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart 1969

Lietzmann, W., Methodik des mathematischen Unterrichts, 1. Teil, Leipzig 1926[2]

Lietzmann, W., Methodik des mathematischen Unterrichts, 2. Teil, Leipzig, 1922[2]

Lietzmann, W., R. Stender, Methodik des mathematischen Unterrichts, Heidelberg 1961

Löffler, E. (Hrsg.) Die axiomatische Methode im Schulunterricht, MU 12, Heft 3 (1966)

Mach, E., Erkenntnis und Irrtum, Leipzig 1905

Mach, E., Die Prinzipien der Wärmelehre, Leipzig 1919[3] (Nachdruck: Frankfurt 1981)

Meißner, H., Schülerstrategien bei einem Taschenrechnerspiel, JMD 8 (1987) 105-128

Menger, K., Calculus, A. Modern Approach, Chicago 1953[2]

Nägerl, H., J. Zerbst, Transferprobleme der Studienanfänger beim Umgang mit affinen Funktionen, math.did.3 (1978) 99-117

Neigenfind, F., „Alte“ Fragen, gestern und heute, MSch 18 (1980) 604-614

Nguyen, B.K., Zur Entwicklung der funktionalen Denkweise im Mathematikunterricht, MSch 20 (1982) 139-147

Oehl, W., Der Rechenunterricht in der Hauptschule, Hannover 1965

Otte, M., H. Steinbring, Probleme der Begriffsentwicklung - zum Stetigkeitsbegriff, DdM 5 (1977) 6-25

Oehl, F., Didaktik der Bruchrechnung, Freiburg 1978

Padberg, F., Didaktik der Bruchrechnung, Freiburg 1978

Papy, G., Mathematique moderne 1, Prise De Keyn, 1964

Piaget, J., B. Inhelder, The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence, New York 1958

Piaget, J., J.-B. Grize, A. Szeminska, V. Bang, Epistemologie und Psychologie der Funktion, Stuttgart 1977Pickert, G., Der Mengen-und Funktionsbegriff in der Anfängervorlesung, MPSB 5 (1955/56b) 71-79

Pickert, G., Bemerkungen zum Funktionsbegriff, MNU 8 (1955/56a) 394-397

Pickert, G., Bemerkungen zum Funktionsbegriff, MU 11, (1958/59) 223-224

Pickert, G., Bemerkungen zum Variablenbegriff, MPSB 7 (1960/61) 76-88

Pickert, G., Didaktische Bemerkungen zum Relationsbegriff, MU 19, Heft 6 (1973) 5-23

Planck, Der Kausalbegriff in der Physik, Leipzig 1948[4]

Pringsheim, A., Grundlagen der allgemeinen Funktionslehre, Enzykl.d.Math.Wiss.,Bd. II 1.1, Leipzig (1899-1916) 1-188

Ricco, G., Les premières acquisitions de la notion de fonction lineaire chez l'enfant de 7 a 11 ans, ESTM 13 (1982) 289-327

Rudert, G., Die Grundlagen des funktionalen Denkens in ihrer Bedeutung für den ersten mathematischen Unterricht, Berlin 1919

Ruth, W., Dreisatzrechnung als Propädeutik der Funktionenlehre, MU 3, Heft 3, (1957) 75-88

Sachsse, H., Kausalität - Gesetzlichkeit - Wahrscheinlichkeit, Darmstadt 1979

Schuberth, E., Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts, Stuttgart 1971

Schultze, A., The teaching of mathematics in secondary school, New York 1928

Schlöglmann, W., Erarbeitung eines „intuitiven“ Verständnisses von Funktionseigenschaften, BMU (1984) 305-308

Schlöglmann, W., Zum Verständnis von Funktionseigenschaften BMU (1986) 251-254

Siemon, K., Der mathematische Unterricht, 1.Band, Leipzig 1931

Sietmann, G., Abstimmung zwischen dem Mathematikunterricht und dem Unterricht in Physik, Chemie und Biologie, MSch 14 (1976) 97-100

Sietmann, G., I. Kölbl, Zu Fragen der stofflichen Koordinierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der allgemeinbildenden Schule, Wiss.Z.d.Univ.Rostock, Math.-Nat.Reihe, 23 (1974) 677-680

Steinbring, H., Ähnlichkeit, in: G.von Harten u.a., Funktionsbegriff und funktionales Denken, Köln 1986, 85-122

Steiner, H.-G., Das moderne mathematische Denken und die Schulmathematik, MU 5, Heft 4 (1959) 5-79

Steiner, H.-G., Zur Behandlung des Funktionsbegriffs, In: H. Behnke u. H.-G. Steiner (Hrsg.) Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen, Göttingen 1967, 139-171

Steiner, H.-G., Aus der Geschichte des Funktionsbegriffs, MU 15, Heft 3 (1969) 13-39

Stellmacher, H., Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht, in: G.v.Harten u.a., Funktionsbegriff und funktionales Denken, Köln 1986, 21-34

Stoye, W., Zum Arbeiten mit Funktionen im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule, WZ d.Humboldt Univ. Berlin, Math.Nat.R.32 (1983) 77-84

Strunz, K., Das funktionale Denken in der Mathematik, Studium generale 2 (1949) 31-37Pickert, G., Der Mengen-und Funktionsbegriff in der Anfängervorlesung, MPSB 5 (1955/56b) 71-79

Suarez, A., Formales Denken und Funktionsbegriff bei Jugendlichen, Bern 1977

Thurstone, L.L., Primary and mental abilities, Chicago 1938

Tooren, E., Mathematische Wesensschau und funktionales Denken, ZMNU 68 (1937) 105-111

Tournaire, F., S.Pulos, Proportional reasoning: A review of the literature, ESTM 16 (1985) 181-204

Treumann, K., Leistungsdimensionen im Mathematikunterricht, in: P.M. Roeder, K. Treumann, Dimensionen der Schulleistung, Teil 2, Stuttgart 1974

Vollrath, H.-J., Didaktik der Algebra, Stuttgart 1974

Vollrath, H.-J., Iterationen mit elementaren Funktionen, PM 20 (1978a) 257-262

Vollrath, H.-J., Schülerversuche zum Funktionsbegriff, MU 24, Heft 4, (1978b) 90-101

Vollrath, H.-J., Funktionsbetrachtungen als Ansatz zum Mathematisieren, MU 28, Heft 3 (1982) 5-27

Vollrath, H.-J., Search strategies as indicators of functional thinking, ESTM 17 (1986) 387-400

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik, Leipzig 1908

Wagenschein, M., Rettet die Phänomene!, MNU 30 (1977) 129-137

Waismann, F., Einführung in das mathematische Denken, Wien 1947

Walsch, W., K. Weber (Leiter eines Autorenkollektivs), Methodik - Mathematikunterricht, Berlin 1975

Weigand, H.-G., Zur Bedeutung von Zeitfunktionen für den Mathematikunterricht, JMD 9 (1988) 55-86

Weyl, H., Das Kontinuum, Leipzig 1918

Weyl, H., Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 1928

Winter, H., Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht, Math.Lehren Heft 2 (1984) 4-16

Wittenberg, A.I., Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963