

40. Funktionsbetrachtungen als Ansatz zum Mathematisieren in der Algebra

Der Mathematikunterricht 28 Heft 3 (1982), 5-27.

Herrn Kollegen A. Kirsch zum 60. Geburtstag

Wenn man im traditionellen Mathematikunterricht schon die Anwendungsmöglichkeiten berührt, so geschieht das immer nach dem Muster der antididaktischen Umkehrung. Statt auszugehen von der konkreten Fragestellung, um sie mathematisch zu erforschen, fängt man mit der Mathematik an, um das konkrete Problem als „Anwendung“ zu behandeln.

H. FREUDENTHAL, Mathematik als pädagogische Aufgabe, Stuttgart: Klett 1974, S.126.

1. Zur Einführung

Zur Zeit sind für den Mathematikunterricht wieder einmal Anwendungen gefragt: Sie werden gern als Motto für Tagungen, als Thema von Aufsatzsammlungen und als Aushängeschild für Unterrichtswerke verwendet. In der Konkretisierung wird Anwendung jedoch meist im Sinne der FREUDENTHALschen „antididaktischen Umkehrung“ realisiert. Dies geschieht z.B. in der Algebra, wenn man Terme anwendet, um Funktionen damit zu beschreiben, das Lösen von linearen Gleichungssystemen anwendet, um den Schnitt von Geraden analytisch zu behandeln, Potenzrechnung anwendet, indem man schließlich Potenz- und Exponentialfunktionen betrachtet.

FREUDENTHAL fordert statt dessen, den Mathematikunterricht am *Mathematisieren* zu orientieren (1974). Dies ist ein Prozeß, der sich in Stufen vollzieht: Die Wirklichkeit wird mit mathematischen Mitteln geordnet. Dabei entsteht ein

„Schatz mathematischer Erfahrung“, der seinerseits wieder mit mathematischen Mitteln geordnet wird. Zunächst geschieht das im Kleinen, indem man etwa überlegt, welche Eigenschaften als Definition und welche als Sätze gewählt werden, dann im Großen, wenn man nach Möglichkeiten zum axiomatischen Aufbau einer Theorie sucht. Bei diesem Prozeß wird auf der jeweils nächsten Stufe die vorhergehende zum Gegenstand der Reflexion.

Derartige Vorstellungen finden sich im Bereich der Pädagogik bereits bei HERBART, sie wurden für den Mathematikunterricht wohl zuerst in der an Stufen orientierten Konzeption der *Mathematical Association* in England für den Geometrieunterricht realisiert und wurden besonders prägnant von VAN HIELE ebenfalls für den Geometrieunterricht formuliert.

In den Diskussionen um den Geometrieunterricht ist wiederholt darauf hingewiesen worden, daß man sich in England bereits frühzeitig darum bemühte, Geometrie aus Umweltphänomenen zu erschließen. Weniger bekannt dürfte sein, daß bereits zu Beginn des Jahrhunderts in England auch die Konzeption eines entsprechenden Algebraunterrichts von T.P. NUNN konzipiert und realisiert worden ist. Im Gegensatz zu den deutschen Mathematikbüchern dieser Zeit erwachsen bei ihm alle algebraischen Themen aus Problemstellungen der Umwelt, während sich in deutschen Lehrbüchern derartige Probleme als Anwendungen finden. Offensichtlich fiel es in Deutschland den Lehrbuchautoren schwer, sich von dem tradierten Muster zu lösen. Erst in neuerer Zeit beginnen einige Unterrichtswerke damit, auch in die Algebra von Umweltsituationen her „einzusteigen“.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe von Funktionsbetrachtungen in der Sekundarstufe 1 so mathematisieren kann, daß man zu einem Algebraunterricht gelangt, der bei Umweltphänomenen ansetzt und bei dem dann auf unterschiedlichen Niveaus mathematisch gearbeitet wird. Bei diesem Prozeß des Mathematisierens ist der Funktionsbegriff zugleich *Werkzeug*, mit dem die Schüler umgehen, und *Gegenstand*, über den sie nachdenken. Man wird dabei dem Anliegen gerecht, im Unterricht den Doppelcharakter ma-

thematischer Begriffe als Objekt und als Werkzeug ausgewogen anzusprechen (OTTE, STEINBRING 1977).

2. Umwelterschließung mit dem Funktionsbegriff

Mathematisieren soll bei Umweltsituationen beginnen. Für den Funktionsbegriff kommen vor allem Phänomene infrage, bei denen der Zusammenhang zwischen Größen im Vordergrund steht. Solche Phänomene werden später besonders im Physikunterricht behandelt. Das könnte den Lehrer veranlassen, auf ihre Behandlung im Mathematikunterricht zu verzichten, um dem Physikunterricht nicht vorzugreifen bzw. sich im Mathematikunterricht nicht mit physikalischen Begriffsbildungen zu belasten. Andererseits kann der Mathematikunterricht aus grundsätzlichen Erwägungen (FREUDENTHAL 1974) nicht auf das Ansetzen bei den Phänomenen verzichten. Es erscheint mir daher sinnvoll, vor allem nach solchen Umweltsituationen zu suchen, die sich nicht ohne weiteres einzelnen Fächern zuordnen lassen, sondern elementar zum Erfahrungsschatz der Schüler gehören.

Wie sich in den Klassen 5–7 proportionale und antiproportionale Funktionen aus Umweltsituationen erschließen lassen und wie man die Grundaufgaben der sogenannten Schlußrechnung mit Hilfe von Funktionstabellen einfach lösen kann, ist von KIRSCH sehr überzeugend dargestellt worden. Diese Ideen haben sich heute weitgehend durchgesetzt. Darüber hinaus ist vorgeschlagen worden, sich nicht auf diese beiden Funktionstypen zu beschränken (VOLLRATH 1973); zumindest als Kontrastbeispiele finden sich heute auch andere Zuordnungen in den meisten Lehrbüchern für das 7. Schuljahr. Um den Schülern Gelegenheit zu geben, Erfahrungen mit Funktionen zu vermitteln, ist empfohlen worden, einfache Experimente zu elementaren Funktionen im Mathematikunterricht durchzuführen (VOLLRATH 1978a). Bereits 1925 hatte WOLFF gefordert, die enge Verbindung zwischen Mathematik und Naturwissenschaften dadurch deutlich zu machen, „daß auch einmal ein einfaches Experiment im Mathematikunterricht zur Erläuterung von Anwendungen vorgeführt wird“.

Meßergebnisse sind mit Fehlern behaftet. In den Naturwissenschaften wird deshalb idealisiert. Diesen Prozeß der Idealisierung setzt der Mathematikunterricht meist voraus, ohne ihn den Schülern bewußt zu machen. Es ist daher eigentlich nicht verwunderlich, wenn die Schüler erhebliche Schwierigkeiten beim Transfer mathematischer Kenntnisse haben, wie die Untersuchung von NÄGERL (1975) u.a. sehr deutlich zeigt.

Man sollte also im Unterricht an Erfahrungen der Schüler mit Zusammenhängen zwischen Größen anknüpfen und sollte ihnen auch geeignete Erfahrungen im Unterricht vermitteln. Dabei sollte ihnen bewußt gemacht werden, wie man von Phänomenen zu einer adäquaten mathematischen Beschreibung gelangt. Zentraler Begriff ist dabei der Funktionsbegriff; Ausdrucksmittel sind verbale Formulierungen wie z.B. „das Volumen in Abhängigkeit von der Querschnittsfläche“, oder etwas formaler: „Querschnittsfläche $\rightarrow$ Volumen“, Tabellen und Darstellungen am Achsenkreuz. Mit Hilfe von Termdarstellungen macht man dann die Zusammenhänge einer algebraischen Beschreibung zugänglich. Man kommt zur Termdarstellung durch eine einfache *Verallgemeinerung*.

Beispiel: Aus einer Wasserleitung fließen stündlich 120 l Wasser. Induktiv überlegt man sich nun, daß in 2 Stunden 120·2 Liter Wasser, in 3 Stunden 120·3 Liter, in t Stunden 120·t Liter Wasser ausströmen.

Es kann jedoch auch der Fall eintreten, daß das Finden eines Terms eine Idee erfordert, die sich erst nach einigem Nachdenken ergibt oder die sich nach der Korrektur einer zunächst spontan falschen Antwort ergibt.

Beispiel: Das Punktmuster von Fig. 1 enthält an jeder Seite n Punkte. Wie viele Punkte sind es insgesamt? Spontan wird häufig geantwortet: 4n. Dabei übersieht man, daß man die Ecken doppelt gezählt hat. Man muß also korrigieren: 4n-4. Man kann jedoch auch durch eine geschickte Zusammenfassung sogleich auf eine richtige Lösung kommen. Faßt man wie in Fig. 2 zusammen, so ergibt sich 4(n-1) als Term.

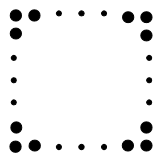


Fig. 1

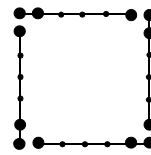


Fig. 2

Weitere Anregungen, wie man durch Abzählprobleme einen Zugang zu Termen erhalten kann, kann man der Arbeit von WELLSTEIN (1978) entnehmen. Vielfach läßt sich ein Term durch Kombination bekannter Zusammenhänge finden. Man betrachte etwa das

Beispiel: Wie groß ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche von Fig. 3? Hier kann man verschieden die Teilflächeninhalte zusammenfassen. So liest man aus Fig. 3 den Term $4ad + 4d^2$ ab, dagegen aus Fig. 4 den Term $4(a + d)d$.

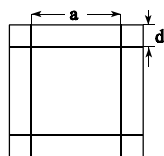


Fig. 3

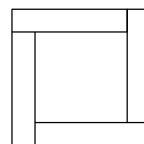


Fig. 4

Bei beiden Beispielen gibt es verschiedene Terme als Lösungen. (Daß von den Schülern ganz unterschiedliche Lösungen gefunden werden, zeigt die Untersuchung von GLASER 1978).

Diese Situation kann bei den Schülern zwei Reaktionen verursachen: Da für jeden der Terme eine überzeugende Überlegung zum Ergebnis führte, müssen die Terme „beide richtig sein“, d.h. sie werden für alle Einsetzungen gleiche Ergebnisse liefern. Man könnte dies als eine *inhaltliche* Begründung der Äquivalenz der Terme ansehen.

Es kann jedoch auch das Problem aufgeworfen werden, ob die Terme tatsächlich äquivalent sind. Dies könnten die Schüler überprüfen, indem sie Zahlen einsetzen, sie gehen dann *induktiv empirisch* vor. Sie können aber auch *formal* mit einer Termumformung über die Äquivalenz der Terme entscheiden. (Wie GLASER in einer weiteren Untersuchung feststellte, fanden sich tatsächlich alle drei Verhaltensweisen. Wobei jedoch unter dem Einfluß des Algebraunterrichts die formale Begründung mit fortschreitendem Alter zunimmt.)

Häufig läuft die Bestimmung eines Terms auch darauf hinaus, daß man einen bestimmten Zusammenhang vermutet und dann verifiziert.

Beispiel: Der Brückenbogen auf dem Foto von Fig. 5 hat die Form einer Parabel. Um das nachzuprüfen, wählt man ein geeignetes Koordinatensystem und zeigt, daß sich die Länge der Streben durch den Term ax^2 beschreiben läßt.

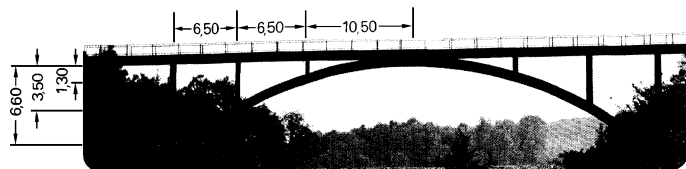


Fig. 5

Nach meinen Beobachtungen bereitet diese Aufgabe selbst Schülern der Sekundarstufe II Schwierigkeiten, weil sie nicht wissen, wie sie vorgehen sollen. Dabei handelt es sich um eine Aufgabenstellung, vor der man in den Naturwissenschaften häufig steht: Man vermutet einen Zusammenhang zwischen Meßwerten und verifiziert ihn.

Eine Variante dieser Aufgabenstellung ist die

Aufgabe: Bei einem Gefäß wird der Zusammenhang zwischen Füllhöhe h und Volumen V durch $V = a \cdot h^3$ beschrieben. In Fig. 6 ist der Graph der Funktion gezeichnet. Wie groß ist a ? Hier ist also aus theoretischen Überle-

gungen bekannt, von welcher Art der beschreibende Term ist. Es ist lediglich eine Konstante zu bestimmen. Algebraisch läuft das auf die Lösung einer Gleichung hinaus.

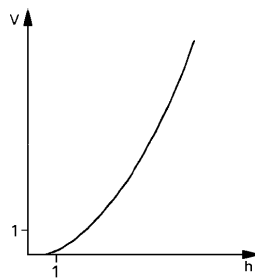


Fig. 6

Auch hierbei handelt es sich um eine Problemstellung, die sich in den Naturwissenschaften häufig ergibt. Es ist notwendig, daß derartige Fragestellungen sinnvoll in den Lernprozeß im Mathematikunterricht eingeplant werden, um Fehlleistungen zu vermeiden, wie sie z.B. in der genannten Untersuchung von NÄGERL u.a. bei derartigen Aufgaben festgestellt wurden.

Es gibt eine Reihe von Umweltsituationen, bei denen sich eine Funktion ergibt, die sich nur abschnittsweise durch bekannte Terme darstellen läßt. Man denke etwa an den Zusammenhang zwischen Gewicht und Porto eines Briefes (stückweise konstante Funktion), an den Preis von Heizöl in Abhängigkeit vom Volumen (stückweise proportionale Funktion) oder an die Abhängigkeit der Einkommensteuer vom Einkommen (Zusammensetzung zweier linearer Stücke, zweier Stücke ganzer rationaler Funktionen 4. Grades und schließlich wieder eines linearen Stücks). In der Regel gibt man derartige Funktionen intervallweise mit Termen an, man braucht hier jedoch auch nicht auf eine Termdarstellung für den gesamten Bereich zu verzichten. Benutzt man z.B. die charakteristischen Funktionen ch_M mit

$$\text{ch}_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{für } x \notin M \end{cases}$$

so kann z.B. für die mit Hilfe der Terme $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ intervallweise definierte Funktion k mit

$$k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [x_0, x_1) \\ g(x) & \text{für } x \in [x_1, x_2) \\ h(x) & \text{für } x \in [x_2, x_3) \end{cases}$$

auch eine Termdarstellung für das ganze Intervall $[x_0, x_3]$ angeben:

$$k(x) = f(x)\text{ch}_{[x_0, x_1)}(x) + g(x)\text{ch}_{[x_1, x_2)}(x) + h(x)\text{ch}_{[x_2, x_3]}(x)$$

Im allgemeinen betrachtet man Terme, die sich mit Hilfe der Grundoperationen ergeben. Eine derartige Termauffassung ist sowohl zur Beschreibung von Umweltsituation als auch zur Erfassung des Funktionsbegriffs ungeeignet. Man denke etwa an einen Vorgang, der durch eine Sinus-Funktion beschrieben wird. Für eine solche Funktion kann man keinen Term angeben, den man mit Hilfe der Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ bilden kann (abgesehen natürlich von unendlichen Reihen). Es ist wichtig, daß die Schüler frühzeitig lernen, daß bestimmte Funktionen zu neuen Termen führen können. Erstmals lernen das die Schüler wohl bei der Betragsfunktion, dann aber insbesondere bei den Exponentialfunktionen, den Logarithmusfunktionen und den trigonometrischen Funktionen.

Den Schülern soll dabei bewußt werden, daß man auf neuartige Situationen reagieren kann, indem man die neuen Funktionen in den Vorrat an bekannten Grundfunktion einbezieht und mit ihnen Terme bildet, mit denen man dann wiederum eine Anzahl neuer Phänomene beschreiben kann. Mathematik gewinnt damit für die Schüler einer Offenheit, die ihr den Eindruck von Sterilität nimmt, der durch eine übertriebene Orientierung am System entsteht.

Besonders deutlich kann dies bei einer Behandlung der Trigonometrie vom Funktionsbegriff her werden. Man wählt als Einstiegssituation einen periodischen Vorgang, den man mit Hilfe einer neuen Funktion, der Sinusfunktion beschreibt. Dieser Funktion gibt man ihren Namen, ohne sie näher zu kennen und versucht dann, immer mehr über sie zu erfahren. Insbesondere versucht man auch durch Termbildungen wie $\sin(x+\pi/2)$, $\sin(2x)$, $\sin^2(x)$ usw. weitere Phänomene zu erfassen. Man macht sich dabei am Graphen klar, wie sich derartige Termbildungen auswirken. Dabei ist es besonders angenehm, daß sich viele derartige Termbildungen ohne Schwierigkeiten am Oszillographen veranschaulichen lassen oder umgekehrt erforderlich werden, um bestimmte Erscheinungen am Oszillographen zu beschreiben. Bekanntlich lassen sich die meisten Formen der Trigonometrie derartig unter funktionalen Gesichtspunkten deuten.

Bemüht man sich darum, über Umweltsituationen zu Termen hinzuführen, dann zeigt es sich, daß der Vorrat an sinnvollen Situationen begrenzt ist. In der didaktischen Literatur und in den Lehrbüchern läßt sich freilich das Bemühen feststellen, immer wieder neue Situationen zu finden. Es besteht wohl der Wunsch, für jeden wichtigen Funktionstyp eine Reihe interessanter Situationen zu finden, mit denen man die Begriffsbildung rechtfertigen kann (z.B. ATHEN 1954/55). Wenig ergiebig ist bisher die Suche nach Situationen für Potenzfunktionen gewesen (abgesehen von den Exponenten 1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2). Dies wirft natürlich die Frage auf, ob man sich mit dem Bemühen um Erschließung von Termen aus Umweltsituationen nicht zu stark einengt.

Diese Gefahr besteht tatsächlich. Denn z.B. beim Potenzbegriff ist es unabhängig von Anwendungssituationen mathematisch ergiebig, allgemein Potenzfunktionen mit reellen Exponenten zu betrachten. Andererseits kann gerade das Bemühen um Erschließung von Termen einen gewissen Schutz vor zu willkürlichen Termbildungen bieten, bei denen lediglich der Komplexitätsgrad ein Maß für die Schwierigkeit ist. (Daß man sich in einem Mathematik-Curriculum mit wesentlich schlichteren Termen als in den Lehrgängen Bundesrepublik begnügen kann, zeigt überzeugend das in England weit verbreitete

SMP-Unterrichtswerk. Die Orientierung am Funktionsbegriff kann vielleicht bewirken, daß die Terme, die man den Schülern in der Sekundarstufe 1 zumutet, auch in der Bundesrepublik schlichter werden.)

Für den Algebraunterricht leistet die Beschreibung von Umweltphänomenen mit Hilfe des Funktionsbegriffs also vor allem die Erschließung von Termen und Termumformungen.

Begrenzt wird die Leistungsfähigkeit dieses Zugangs dadurch, daß bisher lediglich Funktionen mit einer Variablen behandelt werden. In der Regel werden in der Algebra jedoch auch Terme mit mehreren Variablen betrachtet. Dies ist besonders im Hinblick auf die Formeln der Geometrie und in den Naturwissenschaften unumgänglich. Es wäre deshalb überlegenswert, ob man nicht bereits in der Sekundarstufe 1 Grundvorstellungen über Funktionen mit mehreren Variablen vermitteln sollte. Daß dies möglich ist, zeigt das ansprechende Material, das vom IOWO in den Niederlanden entwickelt worden ist (DE LANGE 1978).

Bisher stand das Beschreiben eines beobachteten oder gedachten Zusammenhangs im Vordergrund. Ob eine Beschreibung dem Phänomen *angemessen* ist, kann im Grunde erst beurteilt werden im Hinblick auf bestimmte Problemstellungen, die sich aus der Situation ergeben und die mit mathematischen Mitteln gelöst werden sollen. Bei einer Reihe von Phänomenen ergeben sich solche Problemstellungen unmittelbar.

Bei der Bestimmung der Punktezahlen von Fig. 1 möchte man die Gesamtzahl bestimmen können, auch wenn man die Figur nicht mehr oder nur mit großem Aufwand zeichnen könnte. Diese Problemstellung ist geeignet, die Schüler zu einer Suche nach einem „Zählterm“ zu motivieren. Im allgemeinen geht es darum, daß man zu einer Größe, von der man den zugeordneten Funktionswert noch nicht kennt, ein Verfahren gewinnt, nach dem man diesen Funktionswert berechnen oder zumindest bestimmen kann.

Die Umkehraufgabe, nämlich zu einem Funktionswert mögliche Argumente zu

finden, schließt sich auf natürliche Weise an. Sie führt zu einer Gleichung, wenn die Funktion durch einen Term beschrieben wird. Man erhält hier einen sehr natürlichen Zugang zu Gleichungen, der schon vor Jahren von TIETZ in Vorträgen propagiert und in neuerer Zeit wieder von BRÜNING und SPALLEK empfohlen worden ist (1978).

Häufig lassen sich solche Aufgaben auch in einen etwas komplexeren Zusammenhang einbetten. Fig. 7 zeigt für die Gänge eines Autos den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Drehzahl.

Diese Abhängigkeiten haben aber eher theoretisches Interesse. In der Praxis

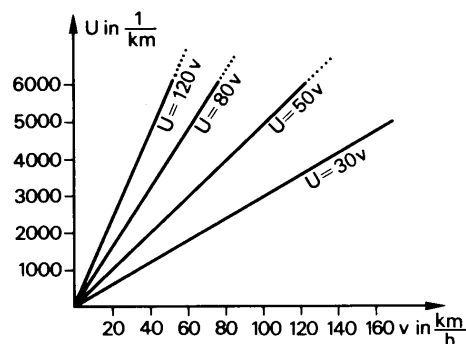


Fig. 7

soll ja bei etwa 4000 Umdrehungen pro Minute geschaltet werden. Es ergibt sich also ein Zusammenhang wie in Fig. 8. Rechnerisch erhält man die drei Geschwindigkeiten v_1 , v_2 , v_3 bei denen geschaltet wird, mit Hilfe der Gleichungen

$$120v = 4000, \quad 80v = 4000, \quad 50v = 4000.$$

Man denke hier auch an die bekannten Aufgaben zur Bestimmung eines Maximums oder Minimums quadratischer Funktionen. Dabei sollte man nicht übersehen, daß auch bei Funktionen wie in der vorigen Aufgabe Minima und

Maxima auftreten und von Interesse sind. Ihre Bestimmung mit algebraischen Mitteln hat überdies den Vorteil, daß sie später nicht eleganter mit Hilfe der Infinitesimalrechnung erfolgen kann, wie das bei den quadratischen Funktionen der Fall ist.

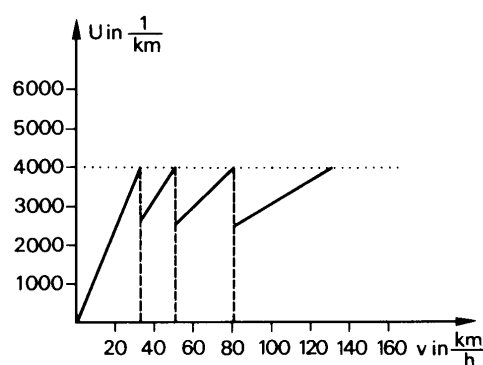


Fig. 8

Einen weiteren wichtigen Aufgabentyp erhält man, wenn man zu zwei gegebenen Funktionen f und g diejenigen Argumente x sucht, für die $f(x) = g(x)$ gilt. Hierher gehören die bekannten Schnittaufgaben. Der Schnitt von Geraden mit Geraden führt zu linearen Gleichungssystemen; der Schnitt der Normalparabel mit Geraden wird im allgemeinen als Möglichkeit einer graphischen Lösung quadratischer Gleichungen behandelt. Man sollte vor allem auch an solche Problemstellungen denken, die vertiefte Einsicht in einen Sachverhalt vermitteln, die sich *direkt* kaum gewinnen läßt.

Beispiel: In der Diskussion um das Energiesparen beim Auto wird besonders auf den Luftwiderstand hingewiesen. Die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit wird durch eine quadratische Funktion beschrieben. Fig. 9 zeigt den Luftwiderstand in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit für zwei verschiedene PKW. Der PKW II hat also günstigeren Luftwiderstand.

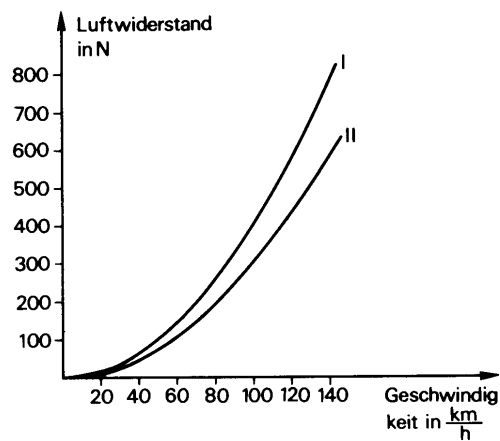


Fig. 9

Ganz so einfach liegen die Verhältnisse jedoch nicht, wenn man zusätzlich den Rollwiderstand betrachtet. Er beträgt bei PKW I 200 N, bei PKW II 300 N. Für den Gesamtfahrwiderstand ergibt sich also bei

$$\text{PKW I: } 0,04 v^2 + 200,$$

bei

$$\text{PKW II: } 0,03 v^2 + 300.$$

Fig. 10 zeigt, daß der Gesamtfahrwiderstand zunächst bei PKW I günstiger ist, ab der Geschwindigkeit v_k jedoch PKW II. Die Geschwindigkeit v_k ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Widerstände als Lösung der Gleichung

$$0,04 v^2 + 200 = 0,03 v^2 + 300.$$

Ähnliche Überlegungen führen zum Vergleich von Tarifen (Strom- und Wassertarif, zum Vergleich von Abschreibungsmöglichkeiten (linear und degressiv) usw. Die Problemlösungen können also eine Entscheidungshilfe darstellen. Wieder wird deutlich, daß algebraische Überlegungen zu etwas nütze sind.

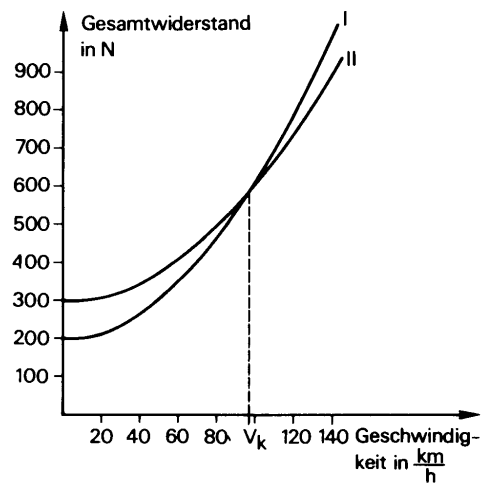


Fig. 10

Eine Variante der Problemstellung ergibt sich, wenn man untersucht, ob $f(x) = g(x)$ für *alle* x ist. Wir hatten bereits beim Abzählproblem für die Randpunkte des Karos von Fig. 1 die beiden Lösungen $f(n) = 4n - 4$ und $g(n) = 4(n - 1)$ erhalten. Hier sieht man unmittelbar, daß die Terme für alle n den gleichen Wert liefern. Eine andere Lösung des Abzählproblems ist aber auch z.B. $n^2 - (n - 2)^2$. Hier ist erst eine etwas aufwendigere Umformung nötig, um die Äquivalenz der Terme zu erkennen.

Indem man im Unterricht nacheinander immer neue Funktionstypen erarbeitet, ergeben sich bei jedem neuen Funktionstyp einschlägige Problemstellungen, die auf bestimmte Gleichungssysteme führen. Für sie wird man dann jeweils Lösungsverfahren entwickeln. Man bettet also Gleichungen und Terme in einen Lehrprozeß ein, bei dem Terme und Gleichungen vor allem als Ausdrucksmittel und als Werkzeug zur Lösung von Problemen erfaßt werden

können. Bei dieser Auffassung ist es eigentlich nicht sinnvoll, von Gleichungslehre zu sprechen. Vielmehr handelt es sich um ein Arbeiten mit Gleichungen, das die Schüler nach und nach immer besser beherrschen und bei dem sie natürlich auch gewisse Einsichten in die Arbeitstechnik gewinnen. Unter dem Einfluß von neuen Curriculumvorstellungen, die sich an einem spiraligen Aufbau orientieren, sind Modelle entwickelt worden, Gleichungen in verschiedenen Phasen zu behandeln und weiterzuentwickeln (VOLLRATH 1974, PICKERT 1980). Damit ist es gelungen, die starke Thematisierung der Gleichungslehre mit den Gefahren einer terminologischen Überladung und einer übertriebenen Neigung, über Mathematik zu reden, zu überwinden.

In dieser ersten Stufe des Mathematisierungsprozesses werden also Funktionen aus Betrachtungen der Umwelt gewonnen. Sie sind ein Werkzeug, um damit Problemstellungen, die sich aus Umweltsituationen ergeben, so zu formulieren, daß sie einer Lösung zugänglich gemacht werden können. Zu lösende Gleichungen oder Ungleichungen werden zunächst durch inhaltliche Überlegungen gelöst, bei denen unmittelbar auf Vorstellungen über das Rechnen angeknüpft zurückgegriffen wird. So kann man z.B. die Gleichung

$$5 \cdot x + 3 = 38$$

durch „Termvergleich“ lösen, indem man jeweils den Term auf der rechten Seite der Gleichung geschickt zerlegt; damit ergibt sich:

$$5 \cdot x + 3 = 35 + 3$$

daraus folgt

$$5 \cdot x = 35.$$

Aus der Zerlegung

$$5 \cdot x = 5 \cdot 7$$

folgt dann

$$x = 7.$$

Die fortschreitend schwieriger werdenden Problemstellungen erfordern dann aber bald ein wirksames Instrument. Man wird also versuchen, für die verschiedenen Gleichungstypen Lösungsstrategien zu entwickeln.

Derartige Lösungsstrategien lassen sich häufig gewinnen, indem man auf Eigenschaften der einschlägigen Funktionen zurückgreift. Für den Unterricht ergibt sich damit ein Ansatzpunkt, sich mit Funktionen näher zu befassen, Eigenschaften von Funktionen zu suchen. Die Problemstellungen der ersten Stufe des Mathematisierungsprozesses können also zu analysierenden Betrachtungen führen, mit denen die nächste Stufe des Mathematisierungsprozesses eingeleitet wird.

3. Entdecken von Funktionseigenschaften

Grundlegende Eigenschaften des Funktionsbegriffs haben die Schüler natürlich bereits in der vorangegangenen Stufe intuitiv erfahren: Bei einer Funktion werden den Größen der einen Sorte in *eindeutiger* Weise Größen der anderen Sorte zugeordnet; häufig kann man diese Zuordnung mit Hilfe eines Terms beschreiben. Diese intuitive Basis bleibt zunächst auch bestehen. Die Aufmerksamkeit der Schüler soll auf spezifische Eigenschaften gelenkt werden.

Derartige Eigenschaften von Funktionen werden im wesentlichen über Darstellungen der Funktionen gewonnen. Für Funktionen gibt es eine ganze Reihe unterschiedlicher Darstellungsformen, die jeweils bestimmte Eigenschaften auffällig machen. An der *Wertetabelle* kann man besonders gut erkennen, wie sich eine gegebene Funktion gegenüber den Verknüpfungen verhält.

x	f(x)	x	g(x)	x	h(x)	x	k(x)
2	10	2	4	2	7	2	4
3	15	3	9	3	10	3	8
5	25	6	36	2,5	8,5	2,5	5,7

So vermutet man z.B. die Additionstreue von f , die Multiplikationstreue von g , die Treue bezüglich der Mittelwertbildung von h , und schließlich sieht man, daß bei k dem arithmetischen Mittel der x -Werte das geometrische Mittel der

y-Werte entspricht.

Es ist offensichtlich, daß diese Darstellungsform keine Beweiskraft hat. Hier dürfte der Schüler am ehesten einsehen, daß ein formaler Beweis nötig ist. Die Durchführung des Beweises ist relativ einfach, wenn die Funktionsschreibweise mit $f(x)$ beherrscht wird. Die hier betrachteten Behauptungen sind vom Typ

$$f(a * b) = f(a) \square f(b)$$

für Verknüpfungen $*$ und $\square$. Es wird deutlich, daß es sinnvoll ist, einen größeren Katalog von Verknüpfungen der Zahlbereiche (in der Regel $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) durchzumustern, wie er etwa von STEINER (1966) angegeben worden ist. Dabei sollte man nicht versäumen, den Schülern klarzumachen, daß man diese Eigenschaften zur Lösung bestimmter Probleme benutzen kann.

Für die proportionalen Funktionen und die Exponentialfunktionen ist das ja von KIRSCH (1969, 1976) sehr überzeugend dargestellt worden (s. auch den Beitrag in diesem Heft).

Die Beweise verlaufen entweder nach dem Muster, daß man $f(a * b)$ und $f(a) \square f(b)$ so umformt, daß man schließlich die gleichen Terme enthält. Oder man formt den Term $f(a * b)$ in einer Gleichungskette so um, daß man $f(a) \square f(b)$ erhält. Die erste Form fällt den Schülern in der Regel leichter.

Am *Graphen* treten besonders deutlich Symmetrien und Schnitte mit Geraden hervor. Hier besteht die eigentliche Schwierigkeit darin, den Schülern die Beweisnotwendigkeit bewußt zu machen und dann die geometrische Eigenschaft algebraisch zu formulieren. Der Schüler erkennt z.B. für $f(x) = x^2$ unmittelbar die Symmetrie des Graphen zur y-Achse. Die Notwendigkeit eines formalen Beweises einzusehen, bereitet ihm ähnliche Schwierigkeiten wie in der Geometrie. Erfahrungen, die bei den anderen Darstellungsformen gewonnen wurden, können vielleicht sein Vertrauen in die Anschauung erschüttern. Man sollte auch daran denken, Funktionen zu geben, bei denen sich die interessante Eigenschaft erst beobachten läßt, wenn man eine größere Zeichnung

anlegt oder wenn man den Maßstab vergrößert. Aus Fig. 11 läßt sich z.B. nicht erkennen, ob die Kurve die 1. Winkelhalbierende schneidet. Aus Fig. 12 kann man nicht entscheiden, ob aus $0 < x < 1$ folgt $f(x) > g(x)$.

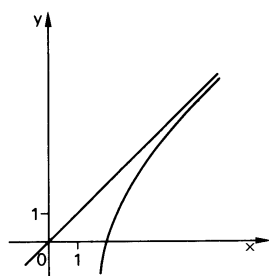


Fig. 11

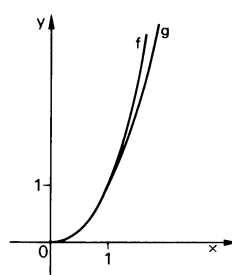


Fig. 12

Die eigentliche Schwierigkeit für den algebraischen Beweis besteht in der Übersetzung der vermuteten Eigenschaft in die Sprache der Algebra. Also z.B. daß die Symmetrie zur y-Achse bedeutet: $f(-x) = f(x)$, Symmetrie zum Ursprung $f(-x) = -f(x)$, Symmetrie zur 1. Winkelhalbierenden: $f(f(x)) = x$ (jeweils für alle x). Der Ablauf Beweise folgt dann wieder einem der beiden Muster, die wir oben angesprochen hatten.

Am Pfeildiagramm treten besonders deutlich Eigenschaften zutage, bei denen mit einer Funktion iteriert wird (VOLLRATH 1978b). Eigenschaften wie

$$f(f(x)) = x, f(f(x)) = f(x), f(f(x)) = f(x) + d$$

usw. lassen sich leicht vermuten, weil sie sehr suggestiv wirken (Fig. 13-15).

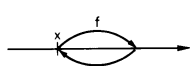


Fig. 13

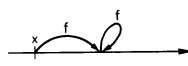


Fig. 14

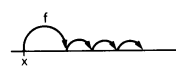


Fig. 15

Andererseits kann man bei ihnen sehr leicht Täuschungen erliegen. Dem Pfeildiagramm von Fig. 16 entnimmt man vielleicht die Vermutung, daß bei der gegebenen Funktion die Pfeile immer nach rechts weisen. Fig. 17 zeigt jedoch, daß dies nicht der Fall ist. Mit diesem *Gegenbeispiel* hat man die Vermutung widerlegt.

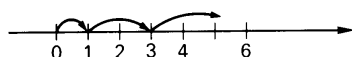


Fig. 16

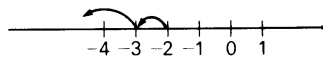


Fig. 17

Die Suche nach einem Gegenbeispiel muß aber nicht erfolgreich sein. Um auch dann Sicherheit zu erhalten, daß die Vermutung wahr ist, muß man also einen algebraischen Beweis suchen. Es wird deutlich, daß die verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen unterschiedliche Beiträge zum Thema „Beweisen“ leisten können. Man sollte sie systematisch einsetzen.

Bei unseren bisherigen Betrachtungen stand die „Auffälligkeit“ einer bestimmten Funktionseigenschaft im Vordergrund. Andererseits hatten wir bereits oben darauf hingewiesen, daß ein besonderes Interesse an Funktionseigenschaften besteht, um ihnen Lösungsstrategien für Probleme zu gewinnen.

Bereits sehr früh kann man, zunächst intuitiv, Eigenschaften von Funktionen zum Lösen von Gleichungen verwenden. BRÜNING und SPALLEK (1978) benutzen z.B. „Monotonieargumente“ wenn sie im 5. Schuljahr eine Gleichung wie $5x+3 = 38$ durch Einsetzen lösen lassen. Setzt man nacheinander 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in die Gleichung ein, so erhält man mit 7 eine Lösung. Man braucht nun nicht weiter einzusetzen, weil die weiteren Einsetzungen zu Zahlen führen, die größer als 38 sind.

Das Benutzen der Proportionalität bzw. der Antiproportionalität in der Schlußrechnung ist ebenfalls ein Beispiel dafür, wie man relativ früh mehr oder

weniger intuitiv Funktionseigenschaften zum Lösen von Problemen heranziehen kann.

Von BRÜNING und SPALLEK ist besonderer Wert auf die Deutung der Umformungsregeln für Gleichungen gelegt worden. Sie schlagen vor, z.B. die beidseitige Addition durch Funktionsbetrachtungen zu begründen. Man denke etwa an eine Darstellung wie Fig. 18 und 19, bei der man erkennt, daß beidseitige Addition die Lage des Schnittpunkts nicht verändert.

Das besagt ja gerade die Äquivalenz

$$f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) + c = g(x_0) + c.$$

Es ist sicher der Fall, daß ein großer Teil der Schüler, die solche Äquivalenzumformungen benutzen, sich nicht über diese mögliche Deutung klar sind. Funktionsbetrachtungen können hier ein vertieftes Verständnis für eine Technik vermitteln. Für die Herleitung und Begründung dieser Technik scheinen mir allerdings diese Funktionsbetrachtungen weniger geeignet zu sein. Zumal ja auch der Beweis im wesentlichen auf Verknüpfungseigenschaften der Zahlen zurückgreift.

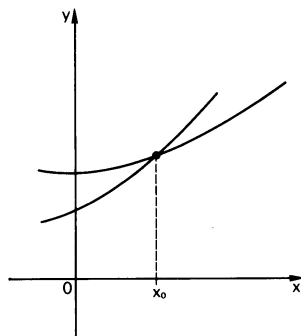


Fig. 18

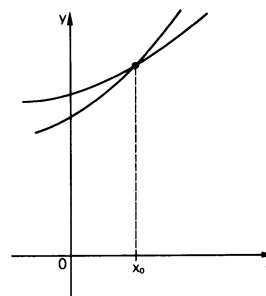


Fig. 19

Eine besondere Rolle bei der Entwicklung von Lösungsverfahren spielen die Graphen der zugehörigen Funktionen. Interpretiert man z.B. die Aufgabe, das lineare Gleichungssystem

$$y = m_1x + n_1$$

$$y = m_2x + n_2$$

als Aufgabe zur Bestimmung des Schnittpunktes der Graphen von

$$x \rightarrow m_1x + n_1 \quad \text{und} \quad x \rightarrow m_2x + n_2,$$

so führt das wie in Fig. 20 auf das Gleichsetzverfahren.

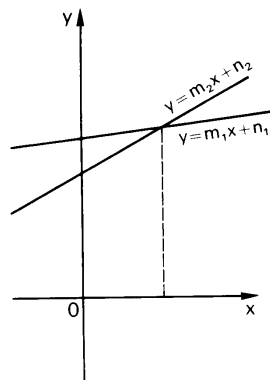


Fig. 20

Optimierungsprobleme lassen sich ebenfalls durch Einsichten, die aus den Graphen gewonnen werden, lösen. So entnimmt man bei der linearen Optimierung dem Graphen, daß es auf die Bestimmung der Ecken des Planungsvielecks ankommt. Bei der Extremwertbestimmung von quadratischen Funktionen erkennt man, daß es entscheidend ist, den Scheitel zu bestimmen (Fig. 21).

So findet man für die Parabel mit $y = x^2 + px + q$ als Abszisse des Scheitels

$$x_s = -\frac{p}{2}.$$

Dies kann man dann später benutzen, um die Lösungsformel für die quadratische Gleichung zu gewinnen.

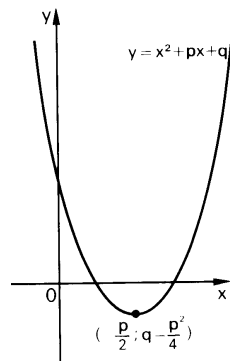


Fig. 21

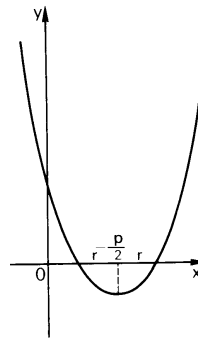


Fig. 22

Betrachtet man etwa den Graphen von Fig. 22, so erkennt man, daß man die Nullstellen der Funktion ausdrücken kann durch

$$x = -\frac{p}{2} + r \quad \text{bzw.} \quad x = -\frac{p}{2} - r.$$

Setzt man nun $x = -\frac{p}{2} + r$ ein, so ergibt sich

Daraus folgt unmittelbar

$$r^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Das ergibt dann die bekannte Lösungsformel.

Bei der Lösung einer Gleichung oder eines Gleichungssystems sind in der

Regel verschiedene Fälle für die Lösungsmenge möglich. Man kann damit über die betreffenden Funktionen Aussagen der Art machen:

Bei einer quadratischen Funktion können folgende Fälle auftreten

- a) sie hat 2 Nullstellen,*
- b) sie hat 1 Nullstelle,*
- c) sie hat keine Nullstelle.*

Auch Aussagen dieser Art kann man als Funktionseigenschaften ansehen. Sie ergeben sich unmittelbar bei Lösung der Problemstellungen. Mathematisch ergibt sich dabei das Problem, wie diese Eigenschaften der Funktionen mit anderen, hier z.B. mit dem Aufbau des Terms zusammenhängen. Man gewinnt dann Aussagen der Art:

Eine quadratische Funktion $x \mapsto x^2 + px + q$ hat genau dann zwei Nullstellen, wenn gilt

$$\frac{p^2}{4} - q > 0.$$

Derartige Überlegungen führen zur nächsten Stufe des Mathematisierungsprozesses.

4. Aufdecken von Zusammenhängen

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß wir eine Fülle ganz unterschiedlicher Eigenschaften gefunden haben, die zum Teil besonders auffällig oder besonders nützlich sind. Die Suche nach Zusammenhängen zwischen derartigen Eigenschaften kann aus unterschiedlichen Interessen entstehen. Stärker analysierend ist das Bemühen, Abhängigkeiten zu ergründen. Das kann sich z.B. darin ausdrücken, daß man einen Überblick gewinnen möchte, wie die Lösung eines Problems von gegebenen Daten abhängt wie im vorigen Beispiel.

Es kann jedoch auch darauf gerichtet sein, Beziehungen zwischen Begriffen zu ermitteln. Durch eine bestimmte Eigenschaft wird ja auch stets ein bestimmter Funktionstyp definiert, den man mit einem besonderen Namen kennzeichnet, z.B. Proportionalitäten, affine Funktionen, monoton wachsende Funktionen usw. Überlegungen dieser Art führen also zum Entwickeln eines Begriffsnetzes. Wir wollen darauf im folgenden Abschnitt eingehen.

Bereits im 7. Schuljahr benutzt man bei der Schlußrechnung, daß Funktionen mit der Eigenschaft

$$(P) \quad f(rx) = rf(x)$$

die Eigenschaft

$$(A) \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$$

haben und daß gilt:

$$(G) \quad \text{Der Graph von } f \text{ ist eine Gerade durch den Ursprung.}$$

In Klasse 8 wird dann meist die Termdarstellung gewonnen, d.h.

$$(T) \quad f(x) = mx.$$

(Die entsprechenden Quantoren wurden der Übersichtlichkeit halber unterdrückt.)

Die Eigenschaften (P) und (A) werden an Tabellen erfahren und bei Problemlösungen benutzt. Die logischen Abhängigkeiten werden zunächst nicht angesprochen. Der Schüler hat allenfalls den Eindruck, daß (P), (A), (G) miteinander vereinbar sind. Im 8. Schuljahr wird dann aus (P) mit Hilfe der Funktionstabelle (T) hergeleitet.

Gelegentlich wird dann auch gezeigt, daß Funktionen mit der Termdarstellung

$$f(x) = mx + n$$

als Graph eine Gerade haben. Daß umgekehrt Geraden durch lineare Gleichungen beschrieben werden können, wird meist anschaulich erarbeitet. Damit

gewinnt der Schüler für den Sonderfall der proportionalen Funktion sicher den Eindruck, daß (G) und (T) äquivalent sind, ohne daß dies streng bewiesen wäre.

Daß aus (T) auch (P) folgt, läßt sich ohne Schwierigkeiten beweisen, es wird jedoch selten angesprochen. Auf intuitiver Basis hat man also

$$(T) \leftrightarrow (G).$$

Streng beweisen kann man mit Mitteln der Sekundarstufe I

$$(T) \leftrightarrow (P).$$

Entsprechend läßt sich auch ohne Schwierigkeit zeigen

$$(T) \Rightarrow (A).$$

Da die Umkehrung ohnehin nur unter Zusatzvoraussetzungen gilt, erscheint es sinnvoll, sich mit dieser Folgerung zu beschränken.

Traditionell wird in der Mittelstufe bei der Behandlung der Wurzelfunktionen auch allgemeiner der Begriff der umkehrbaren Funktion untersucht. Man stellt dann meist den Bezug zu den früher behandelten monotonen Funktionen her, indem man darauf hinweist, daß jede streng monotone Funktion umkehrbar ist. Daß die Umkehrung nicht gilt, läßt sich durch ein Gegenbeispiel leicht widerlegen.

Hat man im Unterricht auch die Minimum- und Maximumverknüpfung behandelt, dann ist es ohne größere Schwierigkeit möglich, die Äquivalenz von monotonem Wachstum und Treue bezüglich der Minimumverknüpfung $\downarrow$ zu zeigen. Dies erkennt man wie folgt:

Sei f treu bezüglich $\downarrow$. Aus $a \leq b$ folgt $a \downarrow b = a$, also

$$f(a) \downarrow f(b) = f(a \downarrow b) = f(a),$$

daraus ergibt sich $f(a) \leq f(b)$.

Sei $a \leq b$ (o.E.d.A.), dann folgt umgekehrt $f(a) \leq f(b)$, also

$$f(a \downarrow b) = f(a) = f(a) \downarrow f(b).$$

Es ist klar, daß derartige Betrachtungen nur lokal sinnvoll sind. Immerhin dienen sie dazu, in rückblickenden Unterrichtseinheiten erarbeitete Sachverhalte zu analysieren und damit vertiefte Einsicht zu schaffen. Formal ergibt sich dabei überdies ein Bereich für Beweisaktivitäten in der Algebra.

Bei diesen Überlegungen wurden Funktionen stets als mathematische Objekte betrachtet, über die man nachdenkt. Das wird auch daran sichtbar, daß man nun Namen für Funktionen bzw. Variable für Funktionsnamen einführt. Man spricht von Funktionen f und g und operiert mit Termen wie $f(x)$ und $g(x)$. Will man darüber hinaus auch mit Funktionen selbst operieren, also z.B. Funktionen f und g miteinander verknüpfen, dann erschließt man sich eine weitere Stufe des mathematischen Arbeitens.

5. Operieren mit Funktionen

Es gibt eine ganze Reihe von Vorgängen, die sich als Überlagerung voneinander unabhängiger Vorgänge vorstellen lassen. Ein bekanntes physikalisches Beispiel ist der senkrechte Wurf als Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung senkrecht nach oben und einer entgegengesetzt gerichteten gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die Weg-Zeit-Funktion des senkrechten Wurfs erhält man durch Addition der Weg-Zeit-Funktionen der beiden anderen Bewegungen.

Ein überzeugendes Beispiel, bei dem man einen Vorgang ohne besondere physikalische Vorkenntnisse algebraisch beschreiben kann, ist von BRÜNING und SPALLEK (1978) mit der Behandlung von Füllvorgängen mit einem Röhrensystem gegeben worden, bei denen zur adäquaten Beschreibung Funktionen addiert werden.

Ein weiteres Beispiel, bei dem die Verknüpfung von Funktionen nahegelegt

wird, ergibt sich, wenn man z.B. Angebote für Mietwagen vergleicht.

Eine Firma bietet einen Wagen zu 50 DM Grundgebühr pro Tag und 40 Pf pro km an, eine andere zu 40 DM Grundgebühr und 50 Pf pro km. Für eine 20-tägige Reise ergeben sich damit als Kostenfunktionen die beiden Funktionen, die in Fig. 23 dargestellt sind. Man erkennt, daß bis zu einer Strecke von 2000 km die Firma B günstiger ist, für größere Strecken ist dagegen A günstiger.

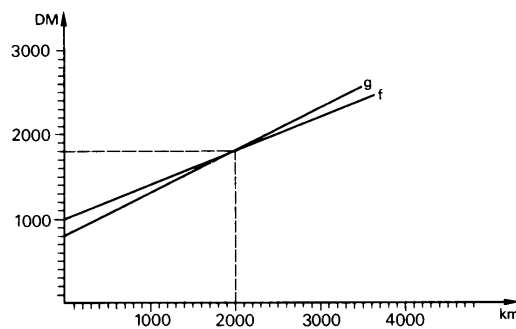


Fig. 23

Die Funktion, die sich bei Berücksichtigung des jeweils günstigsten Angebots ergibt, ist offensichtlich die Funktion mit dem Graphen von Fig. 24.

Man kann sie beschreiben durch

$$f^*: x \rightarrow \min (f(x), g(x)).$$

Schreibt man das Zeichen $\downarrow$ für die Minimumverknüpfung, so erhält man etwas deutlicher $f^*(x) = f(x) \downarrow g(x)$. Dies kann man so deuten, daß f^* diejenige Funktion ist, die man erhält, wenn man die beiden Funktionen f und g mit der Minimumverknüpfung verknüpft, also: $f^* = f \downarrow g$.

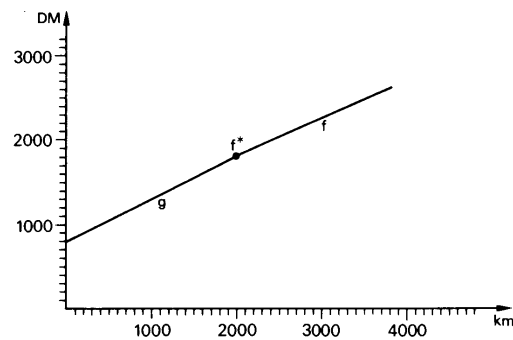


Fig. 24

Die Schüler lernen damit die Technik kennen, wie man Verknüpfungen der reellen Zahlen auf Funktionen überträgt. Man definiert allgemein für eine Verknüpfung $*$

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x).$$

Vom Arbeiten mit Operatoren haben die Schüler bereits frühe Erfahrungen mit dem Verketteten von Funktionen gesammelt. Spätestens bei der Behandlung der Umkehrfunktion liegt es nahe, die Verkettung von Funktionen eingehender zu untersuchen. Dabei wird man insbesondere auch die Analogie zur Geometrie herstellen, bei der die Schüler ausgiebige Erfahrungen mit dem Verketteten von Abbildungen gewonnen haben. Und wie sie dort Abbildungen mit Hilfe der Verkettung verknüpfen, bietet es sich nun auch an, die Verkettung von Funktionen als Verknüpfung zu betrachten.

Ein klassisches Gebiet, bei dem sich Betrachtungen über das Verknüpfen von Funktionen anbieten, ist die *Potenzrechnung*. Wenn man die Potenzrechnung unter dem Funktionsaspekt betrachtet, so kann man im wesentlichen zwei Funktionstypen untersuchen die *Potenzfunktionen*

$$x \rightarrow x^r, x \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R},$$

und die *Exponentialfunktionen*

$$x \rightarrow a^x, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+.$$

Der Prozeß der Begriffserweiterung zeigt sich bei den Potenzfunktionen darin, daß nacheinander Funktionen der Art

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}; \\ x &\rightarrow \frac{1}{x_n}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}; \\ x &\rightarrow \sqrt[n]{x}, x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

unter einen Begriff mit einheitlicher Schreibweise zusammengefaßt und schließlich zu

$$x \rightarrow x^r, x \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$$

verallgemeinert werden. Dabei muß man jedoch in Kauf nehmen, daß der Definitionsbereich der betrachteten Funktionen immer stärker eingeschränkt werden muß. Die Zusammenfassung dieser Funktionen zu einem allgemeinen Funktionstyp wird durch die Multiplikationstreue

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

gerechtfertigt. Bei dieser Betrachtung ist eine gewisse Analogie zum schrittweisen Erweiterungsprozeß des Zahlensystems erkennbar.

Bei den Exponentialfunktionen zeigt sich der Erweiterungsprozeß darin, daß man zunächst mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ beginnt und dann schrittweise unter Erhalt der Eigenschaft

$$f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$$

auf die Definitionsbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ fortsetzt.

Bei beiden „Erweiterungen“ lassen sich beim Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ infinitesimale Betrachtungen naturgemäß nicht vermeiden.

Einmal will man z.B. die Konvergenz von Folgen von Potenzfunktionen erreichen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n} = x^r \text{ für } r_n \rightarrow r$$

und beim anderen Funktionstyp will man die Stetigkeit der Exponentialfunktion erreichen

$$\lim_{x_n \rightarrow x} a^{x_n} = a^x.$$

Beides kann man auf dieser Jahrgangsstufe lediglich geometrisch veranschaulichen.

Auch die Potenzgesetze lassen sich unter dem Aspekt von Funktionen deuten:

$$(1) \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

ergibt für Potenzfunktionen die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation und gibt den Exponenten des Produkts an.

Für Exponentialfunktionen besagt (1), daß der Summe der x-Werte das Produkt der y-Werte entspricht.

Für Exponentialfunktionen ist (1) die elementare Eigenschaft, denn für Potenzfunktionen bezieht sie sich auf die Funktionsmultiplikation, während sie sich bei den Exponentialfunktionen nur auf die Verknüpfung von $\mathbb{R}$ bezieht.

Bei

$$(2) \quad (ab)^r = a^r b^r$$

liegen die Verhältnisse umgekehrt: Für die Potenzfunktionen handelt es sich um die Multiplikationstreue, für die Exponentialfunktionen erhält man dagegen die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation.

$$(3) \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

ergibt für die Potenzfunktionen die Abgeschlossenheit bezüglich der Verkettung. Für die Exponentialfunktionen besagt es, daß dem s -fachen x -Wert die s -te Potenz des y -Wertes zugeordnet wird. Hierbei wird also das Potenzieren bereits vorausgesetzt.

Diese Interpretationen zeigen, daß sich sowohl der Erweiterungsprozeß als auch die Potenzgesetze sinnvoll mit Hilfe von Funktionen deuten lassen. Ein konsequent am Funktionsbegriff orientierter Aufbau der Potenzrechnung müßte sich also auf diese Interpretationen stützen. Bei beiden Funktionstypen hat man dabei die Multiplikation von Funktionen zu betrachten, bei den Potenzfunktionen außerdem noch die Verkettung von Funktionen.

Hinsichtlich des Zusammenspiels von Potenz- und Exponentialfunktionen in der Potenzrechnung sind zahlreiche Varianten denkbar und wohl auch durchführbar. Es ist in jedem Fall zweckmäßig, mit den Potenzfunktionen mit Exponenten aus $\mathbb{N}$ zu beginnen, da sie sich unmittelbar als Verallgemeinerung von linearen und quadratischen Funktionen ergeben.

Das Erweiterungsproblem läßt sich zweifellos sehr suggestiv an den Exponentialfunktionen behandeln. Das würde also für eine frühzeitige Einführung der Exponentialfunktionen sprechen. Dem steht allerdings wohl die unbefriedigende Deutungsmöglichkeit von (3) im Wege.

Außerdem besteht dabei vielleicht die Gefahr einer Verwechslung der beiden Funktionstypen und ihrer Eigenschaften. Man kann dem begegnen, indem man beide Funktionstypen parallel behandelt und jeweils die entsprechenden Eigenschaften interpretiert.

Schließlich besteht die Möglichkeit, die Potenzrechnung zunächst konsequent an Potenzfunktionen zu entwickeln und dann Exponentialfunktionen etwa unter dem Thema „Wachstumsfunktionen“ zu behandeln. Dabei wird man die Multiplikationstreue als gemeinsame Eigenschaft aller Typen von Potenzfunktionen hervorheben und die übrigen Potenzregeln mit Hilfe der Multiplikation und Verkettung von Potenzfunktionen erarbeiten (s. HAYEN, VOLLRATH, WEIDIG).

Der von uns vorgeschlagene Weg benutzt konsequent Funktionsbetrachtungen als Leitfaden und Strukturbetrachtungen zur Vertiefung. Dabei werden die Potenzregeln schrittweise erarbeitet. Auch die üblichen Termumformungen lassen sich von den Funktionen her motivieren. Die Betrachtung der verschiedenen Verknüpfungen konzentriert sich dabei jeweils auf nur eine Regel. Das hat den Vorteil, daß man im Unterricht relativ viel Zeit für jede der Regeln verwenden kann. Man wird dann natürlich zur Sicherung des Lernerfolgs auch Aufgaben stellen, bei denen mehrere Regeln nacheinander anzuwenden sind.

Der Prozeß der Begriffserweiterung stellt sich bei diesem Zugang hauptsächlich als ein Problem des Findens einer geeigneten Schreibweise und ihrer Rechtfertigung dar. Die Beweise sind dabei ziemlich mühsam. Man wird im Unterricht sicher nicht alle Fälle behandeln, um die Schüler nicht zu ermüden.

Strukturelle Untersuchungen machen insbesondere auf die Zusammenhänge zwischen Potenzfunktionen und gebrochenen Potenzfunktionen bzw. zwischen Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen aufmerksam. Aus diesem Grunde halte ich es auch für zweckmäßig, Wurzelfunktionen als besonderen Funktionstyp hervorzuheben.

Am Ende dieses Abschnitts steht a^r für $a \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$ zur Verfügung. Man kann nun die Exponentialfunktionen und die Logarithmusfunktionen für sich in einer neuen Unterrichtssequenz betrachten und sich beim Beweis ihrer Eigenschaften auf die Potenzgesetze stützen. Insbesondere kann man deutlich machen, daß bei den Exponentialfunktionen eine gegenüber den Potenzfunktionen neue Größenordnung des Wachstums gewonnen wird.

Macht man die Verknüpfungseigenschaften von Funktionsmengen selbst zum Gegenstand von Untersuchungen, dann erhält man eine weitere Stufe des Mathematisierens mit dem Funktionsbegriff. Sie wird besprochen, wenn man z.B. nachweist, daß die auf $\mathbb{R}^+$ definierten Potenzfunktionen mit reellen Exponenten bezüglich der Multiplikation und die auf $\mathbb{R}^+$ definierten Potenzfunktionen mit von Null verschiedenen Exponenten bezüglich der Verkettung eine Gruppe bilden. Solche Überlegungen bieten sich insbesondere im Hinblick auf

die Analogie zu Betrachtungen über Symmetriegruppen in der Geometrie an. Auf beiden Stufen kann man in der Sekundarstufe I erste Erfahrungen sammeln lassen, sie werden jedoch erst in der Sekundarstufe II Gewicht erhalten können.

6. Der Funktionsbegriff als Leitbegriff

Durch Mathematisierungen am Funktionsbegriff erhält man die Möglichkeit, auch im Algebraunterricht bei Umweltphänomenen anzusetzen und dann Algebra über unterschiedliche Niveaus zu entwickeln. Die Darstellung des Mathematisierungsprozesses als Stufenfolge sollte jedoch nicht als ein Organisationsschema für einen Unterrichtslehrgang mißverstanden werden. So wäre es sicher verfehlt, wenn nur im 7. Schuljahr Terme mit Hilfe von Funktionen aus Umweltsituationen erschlossen würden und wenn sich algebraische Betrachtungen über Funktionen im 10. Schuljahr ausschließlich auf Verknüpfungen und Verknüpfungsgebilde beschränkten.

Dem Funktionsbegriff ist damit eine ausgezeichnete Rolle im Algebraunterricht zugewiesen. Indem man mit seiner Hilfe Phänomene erschließt, Probleme erzeugt, Zusammenhänge deutlich macht und Querverbindungen aufzeigt, erhält der Lehrgang durch diesen Begriff einen „roten Faden“, er wird durch ihn strukturiert. Der Begriff wird damit zu einem *Leitbegriff* des Lehrgangs. Dabei ist zu beachten, daß ein Begriff nicht von Haus aus ein Leitbegriff ist; sondern ihm wird diese Rolle erst zugewiesen. Häufig geschieht dies durch die Richtlinien, in jedem Fall handelt es sich um eine Entscheidung auf Seiten des Lehrenden. Es gibt bestimmte Begriffe, die als Leitbegriffe prädestiniert sind, während andere eher geeignet sind, eine untergeordnete Rolle zu spielen. Unsere Überlegungen zur Mathematisierung am Funktionsbegriff machen deutlich, daß der Funktionsbegriff die Rolle eines Leitbegriffs für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I übernehmen kann.

Der Begriff selbst entwickelt sich in einem solchen Lehrgang. Das bezieht sich sowohl auf den Begriffsumfang als auch auf die Ausdrucksmittel, die beim

Arbeiten mit dem Begriff verwendet werden. Häufig spiegelt sich dabei die historische Entwicklung eines solchen Begriffs im Unterricht wider, ohne daß zugleich alle Irrwege und Sackgassen der Begriffsgenese nachvollzogen werden müssen.

Indem ein Begriff als Leitbegriff gelehrt wird, wird dem Lernenden Gelegenheit gegeben, über einen längeren Zeitraum Kenntnisse und Vorstellungen über den Begriff zu erwerben, sich Fähigkeiten und Erfahrungen im Umgang mit dem Begriff anzueignen und einen Eindruck von der Bedeutung des Begriffs für die Mathematik und für sein eigenes mathematisches Arbeiten zu gewinnen.

Zieht man in diesem Prozeß immer wieder Bilanz über das bei den Lernenden Erreichte, dann findet man als Resultat des Lernprozesses jeweils *Stufen des Begriffsverständnisses*. Man kann sie beschreiben, indem man angibt, welche Leistungen auf der jeweiligen Stufe des Mathematisierens angestrebt werden.

So kann man z.B. das Verständnis auf der **1. Stufe** (FREUDENTHAL spricht hier von der nullten Stufe) durch folgende Leistungen beschreiben:

- (1) Die Schüler können Zusammenhänge zwischen Größen mit Hilfe des Funktionsbegriffs beschreiben.
- (2) Sie kennen wichtige Beispiele derartiger Funktionen.
- (3) Mit dem Funktionsbegriff, sind Vorstellungen wie Kurve, Graph, Pfeildiagramm, Tabelle usw. verbunden.
- (4) Sie können diese Ausdrucksmittel benutzen, um einfache Grundaufgaben zu lösen.
- (5) Sie haben die Eindeutigkeit der Zuordnung als kennzeichnende Eigenschaft der Funktionen erkannt und kennen die Begriffsbezeichnung „Funktion“.

Die **2. Stufe** ist durch das *Erfassen von Eigenschaften* gekennzeichnet. Man kann sie durch folgende Leistungen beschreiben:

- (1) Die Schüler kennen wichtige Eigenschaften der Funktionen.

- (2) Die Eigenschaften sind eng verbunden mit Vorstellungen, die sich aus den unterschiedlichen Darstellungsformen ergeben.
- (3) Die Schüler sind in der Lage, Argumente für derartige Eigenschaften anzugeben.
- (4) Sie können solche Eigenschaften zum Lösen von Problemen benutzen.
- (5) Sie können Funktionen definieren.

In der **3. Stufe** geht es um das *Erkennen von Zusammenhängen* zwischen Eigenschaften von Funktionen. Im einzelnen werden folgende Leistungen erbracht:

- (1) Die Schüler kennen Zusammenhänge zwischen Eigenschaften von Funktionen.
- (2) Sie kennen wichtige Unterbegriffe und die Beziehungen zueinander.
- (3) Sie können derartige Zusammenhänge formal begründen, dabei benutzen sie Variable für Funktionsnamen.
- (4) Sie kennen für wichtige Funktionstypen unterschiedliche Definitionen und sind sich deren Äquivalenz bewußt.

Auf der **4. Stufe** können die Schüler *operieren mit Funktionen*, d.h.

- (1) Die Schüler kennen wichtige Verknüpfungen von Funktionen.
- (2) Sie haben Vorstellungen von den Verknüpfungen, die an die verschiedenen Darstellungsformen gebunden sind.
- (3) Sie kennen einige Eigenschaften der Verknüpfungen und können sie begründen.
- (4) Sie benutzen beim Operieren mit Funktionen die gefundenen Verknüpfungseigenschaften.

Es könnte sich eine weitere Stufe anschließen, in der die Schüler *Verknüp-*

fungsgebilde von Funktionen kennengelernt haben.

Natürlich handelt es sich bei den angegebenen Leistungen um Beschreibungen von Kenntnissen und Fähigkeiten, deren Ausprägung durch die kognitive Entwicklung der Schüler bestimmt ist, ohne daß dies explizit angegeben ist. Man sollte also im Auge haben, daß sie sich auf elementare Funktionen, auffällige Eigenschaften und einfache Arbeitstechniken beziehen. Die formalen Überlegungen erwachsen erst nach und nach aus der Anschauung.

Die hier angegebenen Stufen sind relativ eng an eine bestimmte Unterrichtskonzeption gebunden. Ich habe an anderer Stelle (1974) ein Stufenschema für das Lernen des Funktionsbegriffs in der Algebra formuliert, das von etwas anderen Intentionen bestimmt war. Es ist jedoch verträglich mit dem hier angegebenen Schema.

Literatur

- Athen, H.: Physikalische Darstellung mathematischer Funktionen, MNU 7 (1954/55) 9-14.
- Brüning, A., Spallek, K.: Eine inhaltliche Gestaltung der Gleichungslehre: Terme oder Abbildungen und Funktionen, MPSB 25 (1978) 236-271.
- de Lange, J.: *Funkties van twee variabelen*, IOWO, Utrecht 1978.
- Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe 1*, Stuttgart: 1973.
- Glaser, H.: Symmetrieverfassung und das Lösen von Abzählproblemen, MU 24 Heft 2 (1978) 76-104.
- Hayen, J., Vollrath, H.-J., Weidig, I.: *Gamma 5-10, Mathematik für Gymnasien*, Stuttgart.
- Kirsch, A.: Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung, MPSB 16 (1969) 41-55.
- Kirsch, A.: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht, DdM 4 (1976) 257-284.
- Nägerl, H. u.a.: Über die Schwierigkeit von Studienanfängern der Medizin beim Transfer einfacher mathematischer Regeln, DdM (1975) 150-158.
- Nunn, T.P.: *Exercises in Algebra*, 1,11, London 1913, 1914.
- Otte, M., Steinbring, H.: Probleme der Begriffsentwicklung zum Stetigkeitsbegriff, DdM 5 (1977) 16-25.
- Pickert, G.: Didaktische Bemerkungen zum Relationsbegriff, MU 19, Heft 6 (1973) 5-23.
- Pickert, G.: Bemerkungen zur Gleichungslehre, MU 26, Heft 1 (1980) 20-33.

Reidt, Wolff, G., Kerst, B.: Die Elemente der Mathematik 1, Berlin: 1925.

Steiner, H.-G.: Einfache Verknüpfungsgebilde als Vorfeld der Gruppentheorie, MU 12, Heft 2 (1966) 5-18.

Vollrath, H.J.: Didaktik der Algebra, Stuttgart 1974.

Vollrath, H.J.: Ware-Preis-Relationen im Unterricht, MU 19, Heft 6 (1973) 58-76.

Vollrath, H.-J.: Schülerversuche zum Funktionsbegriff, MU 24, Heft 4 (1978a) 90-101.

Vollrath, H.-J.: Iterationen mit elementaren Funktionen, PM 20 (1978b) 257-262.

Wellstein, H.: Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen, DdM 6 (1978) 54-64.