

32. Lernschwierigkeiten, die sich aus dem umgangssprachlichen Verständnis geometrischer Begriffe ergeben

Schriftenreihe des IDM 18 (1978), 57-73.

1. Schülerfehler im Umfeld des Definierens

EUKLID beginnt seine „Elemente“ mit Definitionen. Er mag dafür verantwortlich sein, daß man lange glaubte, am Anfang des Geometrielehrens müßten Definitionen stehen. Wenn auch die Einsicht in die Undefinierbarkeit der Grundbegriffe seit HILBERTS „Grundlagen der Geometrie“ dazu geführt hat, daß im Geometrieunterricht auf Definitionen der Grundbegriffe verzichtet wird, so hat doch andererseits ein Zug zu größerer Strenge im Gymnasium zu einer Aufwertung der Definitionen geführt.

In der Hauptschule spielten Definitionen dagegen kaum eine Rolle, da dort auf Erfahrungen mit den Objekten stärker Wert gelegt wurde als auf die Kenntnisse von Definitionen. Seitdem nun in der Hauptschule statt Raumlehre auch Geometrie unterrichtet wird, soll jetzt dort anscheinend auch stärker mit Definitionen gearbeitet werden.

Dieser Wertschätzung des Definierens steht jedoch ein relativ trauriges Bild bei den Schülerleistungen gegenüber. Aus dem breiten Spektrum von Schülerfehlern nur einige Beispiele:

- (1) Der Lehrer definiert „Mittelsenkrechte einer Strecke“. Der Schüler erkennt Mittelsenkrechte nur, wenn die Strecke waagrecht liegt.
- (2) Der Lehrer definiert „Rand einer Figur“.
L: Was ist der Rand eines Kreises?
S: Der Umfang.
- (3) Nachdem das Quadrat schon länger bekannt ist, will der Lehrer Sätze

beweisen. Dazu will er an die Definitionen erinnern.

L: Was ist ein Quadrat?

S: Ein Quadrat hat lauter rechte Winkel.

- (4) Bei der Behandlung der Satzgruppe des Pythagoras wird die Definition der Hypotenuse benötigt.

L: Was ist die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck?

S: c.

Die Reihe der Beispiele ließe sich mühelos fortsetzen.

Bei einigen dieser Fehlleistungen ist es offensichtlich, daß sie den Lernprozeß im Geometrieunterricht erheblich behindern werden. Andererseits zeigt die Erfahrung, daß sich nicht alle Schwächen bemerkbar machen. So ist es z.B. für viele Aufgaben wichtiger, daß der Schüler möglichst viele Eigenschaften des Quadrates kennt, als daß er eine Definition angeben kann. Von daher scheint es mir notwendig zu sein, einerseits Unterrichtsverfahren zu entwickeln, die hemmende Fehlleistungen erschweren, und andererseits zu einer realistischeren Einschätzung des Definierens zu gelangen.

Diese Überlegungen sind von folgenden Beobachtungen gestützt:

Wenn z.B. ein Schüler eine Menge von Quadrate und Rechtecken nach ähnlichen Figuren sortieren soll, dann ergeben sich meist die beiden Sorten Quadrate und Rechtecke. Die Klasse der Rechtecke wird nicht weiter zerlegt, selbst wenn das nach dem mathematischen Ähnlichkeitsbegriff möglich wäre.

Der Schüler wird durch die Art der Aufgabenstellung veranlaßt, Ähnlichkeit in bestimmter, ihm sinnvoller Weise zu interpretieren. Dieses Verhalten des Schülers ist durch die Art der Problemstellung und durch sein umgangssprachliches Verständnis des Ähnlichkeitsbegriffs bestimmt, wie ich nachweisen konnte (1976, 1977, 1978).

Es ist für den Didaktiker natürlich interessant, ob man dieses Schülerverhalten unter dem Einfluß von Unterricht ändern kann. Man weiß heute, daß Begriffslernprozesse auch bis zu einem gewissen Grade erfolgreich verlaufen können, ohne daß eine im mathematischen Sinne strenge Definition gegeben worden ist. So sind z.B. in zahlreichen psychologischen Untersuchungen Begriffe durch Angabe von Beispielen und Gegenbeispielen angeeignet worden. Im Geometrieunterricht kann man z.B. bei Stufenwinkeln durch Angabe einer instruktiven Zeichnung zur Aneignung des Begriffs kommen. Beim Begriff Dreieck dürfte das umgangssprachliche Verständnis in Verbindung mit Zeichnungen eine Definition überflüssig machen. Es erscheint mir daher sinnvoll, einen Überblick über Begriffe zu erhalten, bei denen man auch ohne Angabe einer strengen Definition wesentliche Lernziele erreichen kann.

2. Auffälligkeiten

Als ich Versuche von PIAGET zum Ähnlichkeitsbegriff an Rechtecken mit einigen Kindern wiederholte, kam mir der Verdacht, daß auch hier die Kinder in typischer Weise irreführt würden, indem sie nämlich die Bedeutung eines offenen Terminus gerade so mißverstanden, wie es der Versuchsleiter erhoffte. Ich habe dann meine Untersuchungen mit den Sortieraufgaben nach Ähnlichkeiten begonnen. Bei einer kleinen Stichprobe (ca. 15 Probanden) konnte ich feststellen, daß völlig andere Relationen dominierten als die mathematische Ähnlichkeit (1976). Um die Befunde statistisch abzusichern, begann ich eine größere Untersuchung mit 190 Probanden, in der ich die meisten der ersten Befunde bestätigen konnte, bei der ich aber in einigen Fällen auch Abweichungen erhielt (1977, 1978).

Die Ergebnisse lassen sich so deuten, daß sich die Probanden bei den vorgelegten Sortieraufgaben aus der Aufgabensituation für einen bestimmten Ähnlichkeitsbegriff entschieden und sich dabei im wesentlichen von ihrem umgangssprachlichen Verständnis leiten ließen. Damit ergab sich für mich das Problem, welche Beziehung zwischen dem im Unterricht gewonnenen Begriffs-

verständnis und dem aus der Umgangssprache erworbenen Verständnis besteht.

Für die Hauptschüler unserer Untersuchung war das leicht zu beantworten, denn in Bayern wird Ähnlichkeitslehre nicht im Unterricht behandelt. Die Schüler hatten deshalb allenfalls das umgangssprachliche Verständnis des Ähnlichkeitsbegriffs. Es war deshalb im folgenden ein besonderes Anliegen, Zugänge zum Ähnlichkeitsbegriff zu entwickeln, die sich im Rahmen der Methoden der Hauptschullehrer bewegen, um damit Auskünfte über die Beziehung zwischen umgangssprachlichem Verständnis und Fachverständnis zu gewinnen. Da ich auch bei einigen Gymnasiasten die üblichen „Fehlleistungen“ fand, vermute ich, daß die Schule einen zu engen Ähnlichkeitsbegriff vermittelt hatte, der keine ausreichend klare Problemerkennung ermöglichte.

In meiner ersten Arbeit zum Ähnlichkeitsbegriff hatte ich die Hoffnung ausgesprochen, daß eine stärkere Betonung des Abbildungsbegriffs diese Verengungen vermeiden könnten. Doch sehe ich mich inzwischen in meiner Erwartung enttäuscht. Ich habe kürzlich einigen Würzburger Gymnasiasten, die nach den BSV-Kurs in Ähnlichkeitslehre unterrichtet worden waren, die bekannten „Rechtecke im Rahmen“ vorgelegt und sie gefragt, ob diese Rechtecke ähnlich seien. Dabei entspann sich z.B. folgender Dialog:

E: Sind diese beiden Rechtecke ähnlich?

S: Ja.

E: Wann sind Rechtecke ähnlich?

S: Figuren sind ähnlich, wenn man sie durch eine Ähnlichkeitsabbildung aufeinander abbilden kann.

E: Kann man diese Rechtecke durch eine Ähnlichkeitsabbildung aufeinander abbilden?

S: Ja.

E: Gib mir doch mal die Abbildung an.

Der Schüler zeichnet den Diagonalschnittpunkt des inneren Rechtecks und versucht, die Strahlen zu verlängern. Als er sieht, daß sie nicht durch die Ecken gehen, sagt er:

S: Das geht doch nicht. Das Verhältnis stimmt nicht.

Hier antwortet zunächst der Schüler spontan. Er meint, die Frage anschaulich beantworten zu können. Ihm ist nicht bewußt, daß eine Problemlösung verlangt wird, die man erst nach gründlicher Überlegung und durch Rückgriff auf eine Definition finden kann. Das Interview zeigt, daß der Schüler die entscheidende mathematische Definition kennt, korrekt wiedergeben und sogar richtig anwenden kann, wenn er weiß, daß dies von ihm verlangt wird. Das ist aber gerade der entscheidende Punkt. Die Schüler sehen gar nicht, daß sie auf die Definition zurückgreifen müssen. Man fragt sich als Didaktiker natürlich, ob es vielleicht an der gewählten Definition liegt. Man hätte ja die Ähnlichkeit von Figuren auch über die Gleichheit von entsprechenden Winkeln und Seitenverhältnissen definieren können. Ich habe jedoch den Eindruck, daß im vorliegenden Fall den Schülern bei der Behandlung der Ähnlichkeit im Unterricht nicht bewußt geworden ist, daß die mathematische Begriffsbildung zu einer Einengung führt. Daß Definitionen bei Begriffen, die eine ähnliche Bedeutung in der Umgangssprache haben, relativ wirkungslos sind, ist auch durch andere Untersuchungen bestätigt. So hat etwa (nach einem Bericht von Herrn DYRSZLAG) Frau ZAMORSKA Schülern eine Definition des Begriffs „Randpunkt einer Figur“ gegeben und dann verschiedene Aufgaben zum Verständnis des Begriffs gestellt. Dabei stellte sie fest, daß die intuitive, umgangssprachliche Vorstellung durchschlug und zu Fehlleistungen führte. Bekannt sind auch Fehlleistungen bei „senkrecht-lotrecht“, „fällen-errichten“ (davon berichtet z.B. auch ZYKOVA).

Nach diesen Befunden scheint die Ursache für die Fehlleistungen der Schüler einmal in der Begriffsbezeichnung und zum anderen im Prozeß der Begriffsvermittlung zu liegen.

Um zu differenzierteren Aussagen über Schülerfehler zu gelangen, die durch

umgangssprachliches Verständnis hervorgerufen werden, und um den Anwendungsbereich von Strategien zu beschreiben, bei denen man das umgangssprachliche Verständnis aktivieren kann, so daß eine Definition überflüssig wird, sollen im folgenden Begriffe nach der Beziehung ihrer Bezeichnung zur Umgangssprache klassifiziert werden.

3. Begriffsbezeichnungen in Fachsprache und Umgangssprache

Unter Umgangssprache möchte ich im folgenden das bezeichnen, was Sprachwissenschaftler heute unter „Gemeinsprache“ verstehen. Von der Fachsprache interessieren im folgenden die Begriffsbezeichnungen, die dem Schüler im Mathematikunterricht begegnen. Diese beiden Sprachbereiche sind nicht disjunkt, ja ihre Grenzen sind wandlungsfähig. So wird in letzter Zeit z.B. von Journalisten zunehmend der mathematisch schiefe Begriff des „kleinsten gemeinsamen Nenners“ verwendet. Umgekehrt hat natürlich die Mathematik eine Fülle von umgangssprachlichen Begriffen übernommen, um damit mathematische Sachverhalte zu bezeichnen.

(1) Von der Umgangssprache assimilierte mathematische Begriffe

Begriffe wie Summe, Quadrat, Kreis, Winkel, parallel, Kurve usw. gehören inzwischen so selbstverständlich zur Umgangssprache, daß ihre sprachliche Bedeutung nicht mehr hinterfragt wird, selbst wenn das möglich wäre. Für den Unterricht stellt sich hier vor allem in der Grundschule und der Orientierungsstufe die Aufgabe, die Schüler in diese Begriffswelt einzuführen. Bei der Erarbeitung dieser Begriffe im Unterricht steht die Vermittlung einer breiten Erfahrungsgrundlage im Vordergrund. Aufsuchen dieser Objekte in der Umwelt, Variation von Modellen, Darstellen der Objekte und Suche von Beziehungen und Eigenschaften sind wichtige unterrichtliche Tätigkeiten. Der Lernprozeß wird vor allem behindert durch unterschiedliche Vorerfahrungen der Schüler. Hiervon sind besonders Kinder aus niedrigeren Sprachschichten betroffen. Bei einem internationalen Vergleich sind vielleicht Kinder benach-

teilt, in deren Muttersprache solche Begriffe nicht existieren. Z.B. wird in Tanzania in Kiswahili für Mittelpunkt „Nabel“ genommen, weil es das Wort Mittelpunkt nicht gibt (AUSTIN-HOWSON). Definitionen spielen in der betreffenden Altersstufe kaum eine Rolle, denn hier werden meist Vorstellungen aus Handlungen und Anschauung gewonnen. Andererseits wird es notwendig sein, Verengungen abzubauen. So wird unter Winkel in der Umgangssprache häufig rechter Winkel verstanden. Auch Quader werden in der Umgangssprache als Vierecke bezeichnet (z.B. die berühmte „viereckige“ Wahlurne). Natürlich können auch dadurch Schwierigkeiten auftreten, daß Begriffe in der Umgangssprache in verschiedener Bedeutung auftreten (z.B. Kreis, Kreis Würzburg). Dabei handelt es sich jedoch um kein spezifisch mathematisches Problem.

(2) Aus der Umgangssprache verstehbare Fachtermini

Bei einer Reihe von Begriffsbezeichnungen ergibt sich die Bedeutung unmittelbar aus der sprachlichen Formulierung, die auf die entscheidenden Eigenschaften des Begriffs hinweist. So sind Begriffe wie Viereck, Teiler, fünfstellige Zahl, Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, gleichseitiges Dreieck unmittelbar aus dem Kontext verständlich. Bei Begriffen wie Tangente, Sekante, erschließt sich der Sinn durch eine Übersetzung ins Deutsche.

Im Unterricht ist man bestrebt, eine motivierende Situation zu schaffen, die die Einführung des Begriffs nahelegt. In der Regel gilt das Hauptinteresse Eigenschaften dieser Begriffe. Beim Beweisen werden dann die charakterisierenden Eigenschaften benutzt.

Bei den Fremdwörtern war es früher im Gymnasium üblich, die Übersetzung zu geben und auf die ursprüngliche Bedeutung einzugehen. Mit dem Rückgang des Lateinischen und Griechischen am Gymnasium scheint man heute davon abzugehen, die Fremdwörter zu übersetzen. Im Bereich der Hauptschule werden die Fremdwörter häufig eingedeutscht (z.B. deckungsgleich statt kongruent), weil man erfahren hat, daß den Schülern sowohl Aussprache wie Aneignung Schwierigkeiten bereiten.

Unter dem Aspekt des erarbeitenden Unterrichts findet man in allen Schularten auch häufig die Gepflogenheit, zunächst die Schüler selbst einen passenden Terminus wählen zu lassen, die vorgeschlagenen Termini zu diskutieren und dann den mathematischen Fachbegriff zu nennen. (So wird z.B. von Darmstädter Schülern die Ellipse gern als „eieckig“ bezeichnet.)

Bei diesem Begriffstyp besteht die Gefahr, daß die Schüler nur diejenigen Merkmale beachten, die in der Bezeichnung anklingen. So denken die Schüler z.B. bei „Nebenwinkeln“ häufig nur an das Vorhandensein eines gemeinsamen Schenkels. Sie übersehen z.B. die Forderung, daß die beiden anderen Schenkel zusammen eine Gerade bilden müssen. Solchen Fehlleistungen kann man zu begegnen versuchen, indem man eine Definition gibt. Es zeigt sich jedoch, daß gerade diese Zusatzforderungen als Spitzfindigkeiten aufgefaßt und übersehen werden. Sie werden auch über längere Zeit von den Schülern nicht behalten. Deshalb versucht man, durch eine breite Diskussion von Beispielen und Gegenbeispielen auf die Bedeutung dieser Forderungen hinzuweisen. Geschieht das, so erübrigt sich im Grunde eine formale Definition. Es wäre ausreichend, an Beispielen zu zeigen, was man meint, und an Gegenbeispielen abzugrenzen, was man nicht meint.

Häufig enthalten solche Bezeichnungen auch begriffliche Schiefheiten, von denen man Verständnisschwierigkeiten vermutet. So wird z.B. von manchen Lehrbuchautoren der Begriff „Winkelsumme des Dreiecks“ vermieden, weil man befürchtet, hier werde suggeriert, daß tatsächlich Winkel addiert werden, während es sich um die Addition von Winkelmaßen handelt. Man spricht also vorsichtiger, allerdings auch umständlicher, von der „Summe der Winkelmaße der Winkel des Dreiecks“. Ob hier tatsächlich Verständnisschwierigkeiten auftreten können oder sich hierdurch signalisieren, wenn man die historisch gewachsenen Kurzform benutzt, scheint mir bisher nicht erwiesen zu sein. Es scheint sich hierbei wohl eher um das (nach H. WINTER tiefenpsychologisch interessante) Reinlichkeitsstreben des Mathematikers zu handeln.

Schließlich lassen sich Probleme hinsichtlich des unterschiedlichen Sprachver-

ständnisses von Kindern vermuten, die zu unterschiedlichen Sprachgeschichten gehören.

International ist zu vermuten, daß Kinder aus Sprachgebieten, in denen man auf Verständnis für griechische bzw. lateinische Terminologie hoffen kann, gewisse Vorteile beim Erfassen von solchen Fremdwörtern haben, gegenüber Kindern aus anderen Sprachbereichen, bei denen das nicht der Fall ist.

(3) An umgangssprachliche Begriffe angelehnte Termini

Eine große Zahl von Begriffen trägt Bezeichnungen, die an umgangssprachliche Vorstellungen anknüpfen. Hierunter fallen Begriffe wie ähnlich, stetig, Schneckenkurve, Randpunkt, Verkettung. Ihnen liegt in der Regel ein sehr anschauliches Phänomen zugrunde, das man im Unterricht in einem Mathematisierungsprozeß zu erfassen sucht. Im Gymnasium werden hier erst die Definitionen mitgeteilt. Häufig werden die Schüler durch eine Problemsituation mit den zu betrachtenden Objekte konfrontiert, um sie für die Begriffsbildung zu motivieren. Durch Beispiele und Gegenbeispiele wird das Verständnis gesichert und kontrolliert. Bei anspruchsvolleren Begriffen wird die Methode der schrittweisen Präzisierung gewählt. Bei diesem Vorgehen steht die Definition am Ende einer Unterrichtssequenz. Hier kann man damit rechnen, daß den Schülern der Prozeß des Definierens bewußt gemacht wird. Sie erhalten außerdem einen Einblick in die Entwicklung mathematischer Begriffe, so daß sie im Sinne des genetischen Lehrens Mathematik entstehen sehen. Da hier die Begriffe aus Phänomenen der Umwelt erwachsen, können die Schüler die Begriffsbildung als einen Mathematisierungsprozeß erkennen.

Im Bereich der Hauptschule beschränkt man sich meist darauf, den sprachlichen Kern des Begriffs zu erschließen, um damit bei den Schülern bestimmte Vorstellungen zu vermitteln. Das wird unterstützt durch Angabe von Beispielen, gelegentlich auch von Gegenbeispielen. Man muß dabei in Kauf nehmen, daß die Schüler insbesondere hinsichtlich Grenzfällen nicht klar urteilen können. Andererseits spielen diese Grenzbegriffe in dem Hauptschulbereich auch keine Rolle. Schließlich muß man damit rechnen, daß auch Argu-

mentationen nicht fehlerfrei ablaufen werden. Aber auch hier gilt wieder, daß das Beweisen in der Hauptschule kaum eine Rolle spielt. Lernschwierigkeiten ergeben sich, wenn den Schülern nicht bewußt ist, daß der mathematische Begriff gegenüber dem umgangssprachlichen Verständnis eingengt ist. Es sind besonders die Begriffe dieses Bereichs für die ich mich interessiere.

(4) Aus der Umgangssprache entlehnte Termini mit anderer Bedeutung

Es erscheint allgemein eine Scheu zu bestehen, Kunstwörter für mathematische Begriffe zu wählen. Man unterlegt statt dessen Wörtern der Umgangssprache eine neue Bedeutung. So entstanden Bezeichnungen wie Gruppe, Ableitung, Körper, Ring usw., bei denen sich allenfalls Assoziationen einstellen. Man bezweckt damit, daß die Wörter besser gemerkt werden. Es ist klar, daß man diese Begriffe nur verstehen kann, wenn man eine Definition kennt. Bei mehreren dieser Begriffe bemüht man sich darum, einen Vorrat von Beispielen zu vermitteln. Durch Gegenbeispiele versucht man, den Einfluß von definierenden Bedingungen klar zu machen. Über eine gewisse Zeitspanne greift man auf die Definition zurück, bis man dann Sätze benutzen kann, die Eigenschaften der betrachteten Objekte kalkülmäßig zu erschließen gestatten. Lernschwierigkeiten entstehen, wenn die Schüler andere Vorstellungen haben und meinen, sie könnten sie zum Verständnis aktivieren, ohne zu sehen, wie das möglich ist. Das könnte Z.B. beim Begriff „stumpfer Winkel“ oder bei „Mächtigkeit“ eintreten.

(5) Kunstwörter in der Fachsprache

Wenn auch nur in Gefilden der höheren Mathematik Kunstwörter für mathematische Begriffe gebildet werden (z.B. Ringoid), so stellen für die Lernenden insbesondere im Bereich der Hauptschule Fremdwörter solche Kunstwörter dar. Der wichtigste Nachteil dieser Bezeichnungen ist darin zu sehen, daß es dem Schüler schwer fällt, diese Wörter auszusprechen und zu merken. Für die Hauptschüler liegt hier eine ähnliche Schwierigkeit vor wie für die Schüler, deren Unterrichtssprache von der Muttersprache abweicht. AUSTIN und HOWSON berichten über Untersuchungen, die man vielleicht vergleichsweise

benutzen könnte.

4. Das Problem der Strategiemodelle

Die meisten empirischen Arbeiten über Strategien zum Begriffslehren orientieren sich am Modell von HENDERSON. Er unterscheidet einzelne Schritte ("moves"); z.B. Geben einer Definition, Untersuchen eines Beispiels, Untersuchen eines Gegenbeispiels und klassifiziert sie als C-Schritte (Charakterisierung) und E-Schritte (Exemplifizierung). Das Geben einer Definition ist z.B. ein C-Schritt, das Untersuchen eines Beispiels ist ein E-Schritt. Eine Strategie ist eine Folge von Schritten. Varianten unterscheiden sich hinsichtlich Anzahl und Reihenfolge der einzelnen Schritte. Die Ausprägung der einzelnen Schritte wird nicht diskutiert.

Die Forschungsergebnisse auf der Basis dieses Modells sind bisher sehr unbefriedigend. Das verwundert eigentlich nicht. Sicher spielen solche Schritte beim Begriffslehren eine Rolle. Doch wird man aus der Unterrichtserfahrung nicht auf die Idee kommen, daß ausgerechnet Auswahl und Anordnung solcher Schritte für die Begriffsaneignung entscheidend sind. Vielmehr wird man entscheidende Varianten gerade in der Ausprägung der einzelnen Schritte vermuten. Außerdem besteht die Gefahr einer Atomisierung des Lehrprozesses, wenn man ihn in zu enge Schritte aufteilt. Dem könnte man durch die Gliederung in umfangreichere Abschnitte begegnen. Das Vorgehen vieler Lehrer beim Erarbeiten von Begriffen könnte man durch die folgenden Phasen beschreiben:

Einstieg – Erklärung – Diskussion – Anwendung.

Variation der einzelnen Phasen könnte dann zu verschiedenen Strategien führen. Man muß allerdings darauf achten, daß man nicht lediglich eine Variante des Systems der HERBARTSchen Formalstufen erhält (z.B. Vorbereitung, Darbietung, Verknüpfung, Zusammenfassung, Anwendung; nach dem Herbartianer REIN). Aus der Geschichte der Pädagogik weiß man, daß ein solches System

den Unterricht in unerträglicher Weise einengt und persönliches Gestalten von Unterricht verhindert.

Wenn ich im folgenden über zwei Unterrichtsversuche berichte, so lege ich dabei eine Abfolge von Phasen zugrunde, die sich aus der Zielsetzung relativ zwanglos ergibt. Im Vordergrund steht dabei aber die inhaltliche Ausfüllung der Phasen.

5. Unterrichtsversuche zum Ähnlichkeitsbegriff

Im folgenden möchte ich über Überlegungen und erste Versuche zu Strategien für den Ähnlichkeitsbegriff in der Hauptschule berichten. Ich arbeite zunächst an zwei Strategien.

1. Strategie:

Traditionell spielt in der Hauptschule das Zurückgehen auf die sprachlichen Wurzeln beim Einführen eines neuen Begriffs eine große Rolle. Aus diesem Grunde soll zunächst die ganze Breite dessen behandelt werden, was man in der Umgangssprache mit „ähnlich“ bezeichnet, z.B. „die Zwillinge sehen sich ähnlich“, „die beiden Bilder sind ähnlich“, „die beiden Stühle sind ähnlich“, „die beiden Aufsätze sind ähnlich“, „das sieht dir ähnlich“.

In einer Phase des Beschreibens soll herausgearbeitet werden, daß „ähnlich“ so viel wie „Übereinstimmung in möglichst vielen wichtigen Eigenschaften“ bedeutet. Diese Formulierung zielt auf die Definition der Ähnlichkeit von Figuren mit Hilfe der Übereinstimmung von Merkmalen hin. Dabei möchte ich im Hinblick auf die Hauptschule versuchen, auf möglichst elementarem Niveau zu bleiben. Insbesondere soll zunächst eine formale Definition vermieden werden.

In einer Diskussionsphase wird es dann notwendig sein, durch Betrachtung geometrischer Figuren auf die Bedeutung der Formulierung „wichtige Eigenschaften“ einzugehen, also auf die Winkeltreue und die Verhältnistreue. Ins-

besondere wird der Fall der Kongruenz einzuordnen sein, um zu verhindern, daß die Schüler entweder diesen Fall als Idealfall für Übereinstimmung (Übereinstimmung in allen Eigenschaften) ansehen oder diesen Fall als Sonderfall ignorieren.

2. *Strategie:*

Zu Beginn der Unterrichtseinheit wird eine experimentelle Einführung gegeben. Mit einem Dia-Projektor werden verzerrte und unverzerrte, vergrößerte und verkleinerte Bilder von Dingen gezeigt und miteinander verglichen. Dem liegt die Idee zugrunde, daß Ähnlichkeit ein Phänomen bezeichnet, das man beim Experimentieren beobachten kann. Es ist also daran gedacht, einen Mathematisierungsprozeß einzuleiten.

In der Phase der Beschreibung soll herauskommen, daß Ähnlichkeit so viel wie „unverzerrte Darstellung“ bedeutet. Die Beschreibung zielt also auf die Definition mit dem Abbildungsbegriff. Auch hier versuche ich, zunächst ohne formale Definition auszukommen. In der Diskussionsphase werden dann mathematische Objekte auf Ähnlichkeit betrachtet.

In zwei unterfränkischen Hauptschulklassen des 8. Schüler-Jahrgangs hat eine Studentin im Praktikum zwei Unterrichtseinheiten erprobt, die sich an diesen Strategien orientierten. In diesem Vorversuch haben wir auch die 3. Phase verzichtet und hier sogleich den Schülern ein Arbeitsblatt gegeben, in dem sie typische Aufgaben lösen sollten:

Zeichnen eines zu einem gegebenen Dreieck (Rechteck) ähnlichen Dreiecks (Rechtecks).

Sortieren von Dreiecken (Rechtecken) nach Ähnlichkeit.

Den Verzicht auf die 3. Phase kann man damit vertreten, daß ja nach Piaget die Kinder im Alter von 14 Jahren in der Lage sein sollten, den mathematischen Ähnlichkeitsbegriff bei solchen Aufgaben zu entdecken. Zudem hoffte ich, typische Schwächen der ersten beiden Phasen zu entdecken, die durch die

folgenden Phasen ausgeglichen werden sollten.

Ich möchte kurz über die Versuche berichten, ohne daß die gefundenen Daten überbewertet werden sollten.

Die Gruppe, die nach der 1. Strategie unterrichtet wurde, wird mit Spr, die andere mit Str bezeichnet.

In beiden Gruppen wurde die Erklärung herausgearbeitet. An Beispielen aus dem täglichen Leben zeigte es sich, daß die Schüler diese verstanden hatten.

Bei den Sortieraufgaben zeigten sich beim Dreieck ordentliche Leistungen (Str ca. 60 %, Spr ca. 55 %). Dagegen waren die Ergebnisse beim Sortieren von Rechtecken außerordentlich schwach (in beiden Gruppen jeweils nur ein Schüler).

Beim Zeichnen ähnlicher Figuren zeigten sich beim Dreieck etwas schwächere Leistungen als beim Sortieren (Str ca. 40 Spr ca. 30 %). Beim Rechteck waren die Ergebnisse dagegen überraschend gut (Str ca. 50 %, Spr ca. 22 %). Hier wurde als Vergrößerungsverhältnis häufig 1:2 bzw. als Verkleinerungsverhältnis 2:1 gewählt.

Auffällig war, daß viele Schüler der Gruppe Spr beim Zeichnen der ähnlichen Figuren kongruente zeichneten. Hier wollten sie es offensichtlich besonders gut machen und Übereinstimmung in möglichst vielen Eigenschaften erzielen.

Bei den falsch gelösten Sortieraufgaben scheint hauptsächlich nach „ist ungefähr genauso groß wie“ sortiert worden sein.

Die Versuche scheinen mir zu zeigen, daß es bei Begriffen dieses Typs durchaus möglich ist, ohne Angabe einer formalen Definition bei einigen wichtigen Aufgabensorten brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Dabei scheint die Strategie Str insgesamt etwas besser abzuschneiden. Es scheint mir also sinnvoll zu sein, auch in weiteren Untersuchungen zunächst noch ohne formale Definition zu arbeiten.

Die Sortieraufgaben bei Rechtecken sind dagegen nicht befriedigend gelöst worden. Hier wird es wohl wesentlich von der Gestaltung der Diskussionsphase abhängen, ob sich bessere Erfolge erzielen lassen.

Literatur

- Austin, J.L. & Howson, A.G., Language and Mathematical Education, Preprint 1978.
- Clark, D.C., Teaching concepts in the Classroom: A set of teaching prescriptions derived from experimental research, Journ. Ed. Psych., 1971, 62, 253 - 278.
- Dienes, Z.P., Die sechs Stufen im mathematischen Lernprozeß. Freiburg 1971.
- Henderson, K.B., A model for teaching mathematical concepts, Math. Teach., 1976, 6, 573 - 579.
- Kolb, J.R., Predictive model for teaching strategies research, Prepr. Georgia center.
- Pavelka, E.B., Moves, strategies, and models of concept venture in secondary school mathematics (Diss., University of Illinois, 1974). DAI, 1975, 35 A, 7183.
- Vollrath, H.-J., Ähnlichkeit von Rechtecken. In: H.Winter & E.Wittmann (Hrsg.), Beiträge zur Mathematikdidaktik. Hannover 1976, 111 - 129.
- Vollrath, H.-J., The understanding of similarity and shape in classifying tasks, Ed. Stud. 8 (1977), 211 - 224.
- Vollrath, H.-J., Klassifikationen nach Ähnlichkeit. MU 24, Heft 2, (1978), 105 - 115.
- Zykova, V.L., The psychology of sixth-grade pupils' mastery of geometry concepts, Soviet Studies, 1976, 1, 149 - 188.