

31. Rettet die Ideen!¹

Der Mathematisch Naturwissenschaftliche Unterricht 31 (1978), 449–455.

Der Mathematikunterricht läßt sich durch Leitideen strukturieren; Begriffsbildungen, die Suche von Eigenschaften und Zusammenhängen, die Entwicklung von Problemstellungen und Lösungsstrategien haben als Kern mathematische Ideen, die im Unterricht vermittelt werden sollten, weil sich an ihnen Bildung vollziehen kann. Gerade die Ideen sind jedoch zahlreichen Bedrohungen ausgesetzt. Die Arbeit will eine Reihe solcher Gefahren aufzeigen und auf mögliche Abhilfen hinweisen.

Wenn ich im folgenden von Ideen spreche, dann meine ich damit den entscheidenden Gedanken eines Themas, den wesentlichen Kern einer Überlegung, den fruchtbaren Einfall bei der Lösung eines Problems, die leitenden Fragestellungen einer Theorie, die zentrale Aussage eines Satzes, die einem Algorithmus zugrundeliegenden Zusammenhänge und die mit Begriffsbildungen verbundenen Vorstellungen.

Ganz in dem Sinne wie Mathematiker gern in Vorworten oder Kommentaren diesen Begriff der Idee verwenden. So äußert sich KLEIN über die Beiträge von GAUSS zur Theorie der hypergeometrischen Reihe:

»Hierin liegen zwei neue Ideen gegenüber der Eulerschen Periode; erstens, daß man überhaupt nach der Konvergenz einer Reihe fragt, während man sich zu Eulers Zeiten darum nicht kümmert, und zweitens, daß auch komplexe Werte der Veränderlichen x berücksichtigt werden; Gauß zielt mit beiden schon auf das hin, was wir heutzutage (komplexe) Funktionentheorie nennen.« [2, S.8]

COURANT und ROBBINS beschreiben in ihrem Buch »Was ist Mathematik?« die Entwicklung der Kardinalzahlen:

»CANTORS Idee war, den Begriff der Äquivalenz auf unendliche Mengen auszudehnen, um eine »Arithmetik« des Unendlichen zu schaffen.« [1, S. 62]

Oder LANDAU spricht in seinem Buch über neuere Ergebnisse der Funktionentheorie davon, daß er zwei einfache Sätze aus einem bestimmten »Ideenkreis« beweist.

Im Vorwort zu ihrem Buch »Von Zahlen und Figuren« äußern RADEMACHER und TOEPLITZ [6,S.9] ihre Absicht, dem Leser an einigen Themen jeweils »den entscheidenden Gedanken« zu vermitteln, um so »ein Stück von dem Urbild des Mathematischen« sichtbar werden zu lassen. »Den entscheidenden Gedanken eines Themas«, »das Stück am Urbild des Mathematischen« dem Lernenden nahezubringen, ist ein wichtiges Anliegen des Mathematikunterrichts. Ich möchte zunächst einige Aspekte hervorheben, die für das Betonen von Ideen im Mathematikunterricht sprechen.

1. Sich von Ideen entzünden lassen

TOEPLITZ hat einmal geäußert, daß der Lernende ein Recht darauf habe, zu erfahren, weshalb ein Gegenstand, eine Fragestellung erforschenswert gewesen wäre. Bei vielen Kindern läßt sich ein ursprüngliches Interesse an Zahlen und Figuren feststellen. Leider vermag es der Mathematikunterricht nur selten, dieses Interesse wachzuhalten. So wie es dem Jungen ging, der im Alter von 8 Jahren das Problem hatte, ob man auch über die 0 hinaus weiterzählen könne. Er lebte damals während des Krieges in einer Welt von Frauen, die ihm bei seinem Problem nicht helfen konnten, und war froh, als ihm eines Tages ein Verwundeter das Geheimnis der negativen Zahlen enthüllte. Als dann bei ihm im Alter von 15 Jahren die negativen Zahlen in der Schule »dran waren«, war das eine sehr trockene Angelegenheit. Und als er schließlich in der 12. Klasse bei der Behandlung der vollständigen Induktion seinen Lehrer fragte, wie man denn beweist, daß »minus mal minus plus« ergibt, erfuhr er, daß das eine

Festsetzung sei.

Ein positives Beispiel gibt WAGENSCHN in seinem Bericht über ein Unterrichtsgespräch zum Nichtabbrechen der Primzahlfolge. Bei dem er die Schülerin Gabi zitiert:

»Sie ahnen nicht, wie aufregend es war. Wir dachten wirklich an nichts anderes. Ich weiß noch den heißen Nachmittag mit Elnis unter dem Haselnußstrauch, als er den Satz fand: und nachts, oben in der Hütte, war ich so aufgeregt, als ich den fertigen fand, daß ich zum Fenster raus sprang und auf die Bidmisalp ging.« [7, S 10]

Ende der sechziger Jahre lehnten Studenten weitgehend Lehrveranstaltungen ab, bei denen ein Mathematiker Mathematik vermittelte. Man erhoffte sich Wunder von Skripten, Arbeitsgruppen usw. Diese radikale Ablehnung der Persönlichkeit des Lehrenden ist unverständlich, denn es ist eine Grunderfahrung, daß man durch die Begegnung mit großen Persönlichkeiten wesentliche Impulse erfahren kann. Man wird mehr als eine Höflichkeit darin sehen können, wenn KOWALEWSKI schreibt:

»Wenn ich an meine Königsberger mathematischen Studien zurückdenke, so muß ich mit tiefstem Dankgefühl gegen meine damaligen Lehrer, die alle schon im Grabe ruhen, feststellen, daß sie mich wunderbare mathematische Herrlichkeiten haben schauen lassen.« [S.26]

Es ist für mich immer wieder faszinierend zu beobachten, wie eine mathematische Idee über Grenzen hinweg springen und Menschen entzünden kann. Daß die Ideen auch von Schüler zu Schüler und von Schüler zu Lehrer überspringen können, gehört für mich zu den schönsten Möglichkeiten des Mathematikunterrichts. Wenn auch der Lehrer aufgrund seiner Erfahrungen einen Vorsprung hat, so gibt es doch immer wieder Beispiele, wo Schüler zu originellen Lösungen finden, mit denen sie den Lehrer überraschen können. Die Chancen des Schülers für neue, originelle Lösungen scheinen mir besonders durch die Verwendung des Computers im Mathematikunterricht gestiegen zu sein.

2. Zum Kern der Dinge vorstoßen

Es ist ein merkwürdiges Phänomen, daß viele Lernende vielleicht die geistigen Leistungen der Mathematiker im Sinne von Gehirnakrobatik bewundern, ohne vom Wert und dem Sinn der Betrachtungen überzeugt zu sein. Das mag daran liegen, daß die Ideen im Mathematikunterricht nicht deutlich genug hervorgetreten sind. Indem man dem Lernenden die Idee eines mathematischen Themas erschließt, stößt man zum Kern, zum Wesentlichen vor. Einige Beispiele mögen zeigen, wie es möglich ist, durch das Betonen der Ideen zum Wesentlichen vorzustoßen.

Die Analysen der Schlußrechnung haben ergeben, daß den Kern dieses Aufgabenfeldes die proportionalen bzw. antiproportionalen Funktionen darstellen. Das Hervorheben des Funktionsbegriffs und die Betonung grundlegender Funktionseigenschaften haben zu einer Belebung des gesamten Sachrechnens geführt.

Die Diskussionen um die Gleichungslehre haben gezeigt, daß selbst ein so trockenes Gebiet wie das Lösen von Gleichungen durch das Hervorheben einer Idee an Reiz gewinnen kann: Der Benutzung von Äquivalenzumformungen liegt die Idee zugrunde, eine gegebene Gleichung so umzuformen, daß man aus der neuen sofort die Lösungen ablesen kann. Daß man damit alle Lösungen erhält, ist gerade der Witz der Äquivalenzumformungen.

Im Geometrieunterricht hat die Betonung des Abbildungsbegriffs und das Hervorheben von Symmetrien zu einer erheblich besseren Zugänglichkeit und Durchsichtigkeit geometrischer Phänomene geführt.

Freilich kann man über die entscheidende Idee bei einem mathematischen Begriff verschiedener Ansicht sein. So kann man etwa für die Ableitung einer Funktion das Problem der Tangentensteigung oder das der linearen Approximation als zentrale Fragestellung sehen.

Darin liegt für mich kein Widerspruch, sondern eher ein besonderer Reiz der Mathematik, denn hier wird ihre Wandlungsfähigkeit sichtbar, die gerade

phantasievolle, dynamische Schüler ansprechen kann.

3. Den roten Faden erkennen

Eine Schülerin klagte mir einmal ihr Leid über ihren Mathematikunterricht, daß sie wohl alle Aufgaben rechnen könne, daß sie aber überhaupt keinen roten Faden fände, wenn sie ihre Mathematikhefte durchblättere. Daß es auch einem Mathematiker ähnlich gehen kann, zeigen LIETZMANN'S Äußerungen über eine Vorlesung:

»Aber eigentlich habe ich, wie ich zurückblickend sagen muß, den Sinn des Ganzen nicht verstanden. Man hat wohl die Teile in der Hand, fehlt leider! nur das geistige Band.« [5, S. 22]

Im Mathematikunterricht spielen Aufgabenfolgen (vornehmer: Problemsequenzen) eine wichtige Rolle. Es ist auch natürlich, die Schüler schrittweise zu immer neuen Einsichten zu führen. Eine ganz wesentliche Rolle für das Verständnis von Mathematik spielt aber das Erfahren von Sinnzusammenhängen, das Gewinnen eines Überblicks, das Integrieren von Einzeleinsichten in ein übergreifendes Verständnis (WAGENSCHN).

FELIX KLEIN wollte, daß der Funktionsbegriff den Mathematikunterricht wie ein Ferment durchdringen solle. Und für die Reform des Mathematikunterrichts während der letzten beiden Jahrzehnte wurden nach der Anregung von STEINER (1959) Menge, Struktur und Abbildung zu Leitbegriffen für den Mathematikunterricht.

Auf dem Kongreß für Mathematikerziehung in Karlsruhe zeigte ATIYAH (1976), daß die moderne Mathematik durch einige grundlegende Ideen zu ihrer Blüte gelangen konnte. Er nannte: Symmetrie, Stetigkeit und Linearität und forderte, daß diese Ideen auch den Mathematikunterricht durchdringen sollten.

Der Funktionsbegriff hat für Algebra und Analysis tatsächlich die Erwartungen voll erfüllt, für die Geometrie hat sich auch die Betonung des Abbildungs-

begriffs weitgehend durchgesetzt. Daß sogar in der Grundschule der Mengenbegriff zu einem Leitbegriff werden würde, hätte sich wohl KLEIN nicht träumen lassen. So können Leitideen dazu dienen, im Mathematikunterricht einen roten Faden zu erkennen.

4. Die Kraft des eigenen Denkens erfahren

Wie kaum ein Unterrichtsfach bietet die Mathematik dem Lernenden die Möglichkeit, selbst Ideen zu entfalten, die zur Lösung mathematischer Probleme führen. Nicht zufällig stützen sich zahlreiche psychologische Untersuchungen zum Problemlösen auf mathematische Aufgaben. Es ist merkwürdig, daß viele Menschen erst außerhalb des Mathematikunterrichts den Reiz mathematischer Probleme entdecken. Als Beispiele seien das Umlegen von Streichhölzern, das Legen von Tangramfiguren usw. genannt. Wir wissen heute, daß der entscheidende Beitrag zum Finden einer Lösung eines Problems in dem Aufblitzen einer Idee besteht. Sie mag zunächst äußerst gefährdet sein durch das Versinken in das Vergessen und durch Fehler. Sie erweist jedoch ihre ganze Tragfähigkeit, wenn sie gesichert ist. Bei einem solchen Problemlöseprozeß können Freude an der eigenen Leistung und Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten entstehen aber auch Achtung vor der Leistung eines anderen.

Während bei den genannten Problembeispielen der Reiz in der Herausforderung zum Knobeln liegt, gibt es andere, deren Lösung uns neue Möglichkeiten zur Erfassung unserer Umwelt erschließen und die damit bedeutungsvoll für uns werden können. Das Bestimmen der Höhe eines Berges von einer Standlinie aus, die antike Bestimmung des Erdradius, das Finden einer Formel für ein Abzählproblem sind Beispiele dafür, daß uns eine Idee neue Erkenntnisse und Möglichkeiten erschließen kann.

Die Beschäftigung mit solchen Fragen kann den Blick für die Kraft des mathematischen Denkens öffnen und damit Mathematik aus der Unverbindlichkeit des reinen Gedankenspiels lösen.

5. Belastungen ertragen helfen

Es wäre falsch, wenn man den Eindruck erwecken wollte, durch das Betonen von Ideen könnte man Belastungen im Mathematikunterricht vermeiden. Vielmehr ist es durch das Gepacktsein von einer Idee möglich, Durststrecken zu überwinden, knifflige Passagen durchzustehen und bei Fehlern und Mißerfolgen nicht gleich aufzugeben. Jeder Mathematiker wird z. B. eine Abneigung haben, Systeme von linearen Gleichungen zu lösen. Trotzdem nehmen wir solche Mühen in Kauf, wenn wir uns die Lösung eines interessanten Problems davon versprechen.

Mit dieser Schwierigkeit haben alle Bemühungen zu kämpfen, Mathematik für den »gebildeten Laien« zu erschließen. So schreiben COURANT und ROBBINS:

»Aber trotz allen Bemühungen, so direkt wie möglich den Kern mathematischer Erkenntnis verständlich zu machen, kann dem Leser nicht jede Anstrengung erspart bleiben.« [I, S. V]

Im Unterricht können besonders Übungsphasen zur Aneignung eines mathematischen Kalküls solche Durststrecken sein.

Ich habe wiederholt beobachtet, daß Schüler lustlos Aufgabenkolonnen rechnen, weil sie das aufbekommen hatten. Daß sie aber auch aufwendige Rechnungen oder das Anlegen langer Tabellen nicht scheuten, wenn es z.B. um das Entwickeln einer Geheimschrift ging, wenn sie also von einer Idee gepackt waren.

6. Vor dem Versinken in das Vergessen bewahren

Viele Problemlösungen, Methoden und Verfahren lassen sich vor dem Vergessen bewahren, wenn man sich die entscheidende Idee merkt. Für das babylonische Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzeln braucht man sich nur zu merken, daß man den Radikanden in Faktoren zerlegt, aus ihnen den Mittelwert bildet und dies fortsetzt.

Daraus findet man ohne Schwierigkeit die bekannte Rekursionsformel. Wird diese Idee nicht sichtbar, dann handelt es sich bei der Iterationsvorschrift um eine komplizierte Formel, die die Schüler immer wieder in der Formelsammlung nachschlagen müssen.

In Vorlesungen über Angewandte Mathematik wird meist das Horner-Schema sehr kompliziert hergeleitet, so daß die meisten Studenten es schnell wieder vergessen. Erfasst man dagegen die Idee des sukzessiven Ausklammern von x , leuchtet das Verfahren schlagartig ein und kann leicht behalten werden.

So einleuchtend die Vorteile des Betonens von Ideen sein mögen, muß man doch sehen, daß die Ideen im Mathematikunterricht einen schweren Stand haben. Liegt im Physikunterricht die Gefahr, die Phänomene aus dem Blick zu verlieren (WAGENSCHN), so scheinen mir im Mathematikunterricht besonders die Ideen bedroht zu sein.

7. Überwucherung der Ideen durch Formalisierungen

Ein besonderer Vorzug der Mathematik besteht in der Möglichkeit, Ideen durch prägnante formale Sprache deutlich hervortreten zu lassen. Termdarstellungen von Funktionen, der Grenzwertkalkül der Analysis, der Matrizenkalkül der linearen Algebra sind Beispiele, wie man mathematische Sachverhalte so auf das wesentliche konzentrieren kann, daß die Ideen hervortreten. Insbesondere können Ideen in den Anwendungen fruchtbar werden wenn sie sich solcher Formalismen bedienen. So ist z.B. die Beschreibung der von Psychologen hoch geschätzten Faktorenanalyse in den meisten Lehrbüchern für Psychologen eine nahezu ungenießbare Darstellung voll mystischen Dunkels.

Hat man den Matrizenkalkül der linearen Algebra zur Verfügung, so kann man die Faktorenanalyse völlig durchsichtig im Stil eines Übungsbeispiels behandeln.

Solche Einsichten erschließen sich nur dem, der den Kalkül zu handhaben

versteht. Deshalb wird der Mathematikunterricht nicht umhin können, gewisse grundlegende Kalküle zu vermitteln. Andererseits neigt der Mathematiker dazu, sich von der Macht des Kalküls berauschen zu lassen und den Blick dafür zu verlieren, daß sich manche bedeutende Ideen mit geringem formalen Aufwand vermitteln lassen.

Es ist ein besonderes Verdienst WAGENSCHAINS, immer wieder auf solche Beispiele hingewiesen zu haben: Der Satz über das Nichtabbrechen der Primzahlfolge, der antike Beweis über die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2, die Satzgruppe des Pythagoras. Die Reihe der Beispiele läßt sich fortsetzen: Der Eulersche Polyedersatz, das Königsberger Brückenproblem, CANTORS Beweis von der Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen, um nur einige zu nennen.

Diese Beispiele haben vermutlich deshalb bisher kaum im Unterricht Eingang gefunden, weil sie für das Durchnehmen umfangreicher, hoch bewerteter etablierter Gebiete nichts bringen. Stark kalkülorientierte Gebiete wie Termumformungen, Gleichungslehre, Aufbau des Zahlensystems, Behandlung elementarer Funktionen beanspruchen in der Algebra die meiste Unterrichtszeit, während es im Geometrieunterricht der Zwang zum System verhindert, bei einigen in sich interessanten Fragestellungen außerhalb der Systematik zu verweilen. Es läßt sich also feststellen: Nach wie vor besteht die Gefahr, daß der Kalkül die Ideen im Mathematikunterricht überwuchert. Unser Bemühen sollte daher auf die unmittelbare Erschließung bedeutender mathematischer Ideen für den Unterricht gerichtet sein.

8. Ausufernde Begrifflichkeit

Die Einführung neuer Begriffe kann der Darstellung wichtiger Ideen dienen. Mit Hilfe des Begriffs der Ableitung kann man das Tangentenproblem elegant lösen und damit eine Idee von der Steigung einer Kurve vermitteln.

Die Behandlung von Gleichungen kann zu einer interessanten mathematischen

Problemstellung werden, wenn man etwa mit Hilfe der Begriffe Lösungsmenge, Äquivalenzumformung und Grundmenge die zugrundeliegende Idee herausarbeitet. Andererseits zeigt sich die Tendenz, bei der Einführung eines Begriffs sogleich eine Fülle von Nachbar-, Ober- und Unterbegriffen mit einzuführen. Das entspringt dem Bemühen, den eingeführten Hauptbegriff durch Diskussion der Bedingungen abzugrenzen und damit abzuheben. Gleichzeitig erhält man die Möglichkeit zu straffen Formulierungen, wenn man möglichst viel in Hilfsbegriffen verpackt.

So führt z.B. ein Lehrbuch der Analysis den Begriff einer »zulässigen Menge« ein, um damit in der Definition der Differenzierbarkeit den Voraussetzungsapparat reduzieren zu können. Das erscheint mir als »fauler Trick«. Ich finde es ehrlicher, Begriffe dadurch zu vereinfachen, daß man auf möglichst große Allgemeinheit verzichtet. Denn, wie LANDAU in seinem Vorwort zu seiner Funktionentheorie schreibt:

»Oft tritt der wesentliche Kern eines Satzes dadurch nicht deutlich hervor, daß dieser gleich in unwichtiger Weise verallgemeinert und mit Parametern belastet erscheint.« [4, S. 3]

Formulierungen von Sätzen der Analysis in modernen Schulbüchern sind eine Fundgrube für derartige Versäumnisse.

In den Schulbüchern tritt aber als weitere Unsitte zutage, daß sich eine Flut überflüssiger Begriffe behauptet. Das trifft besonders für die Geometrie zu. Offensichtlich um die Vereinigung aller bundesdeutschen Lehrpläne abzudecken, behandeln die Bücher eine Fülle von Begriffen, von denen man nur hoffen kann, daß sie nicht einmal in das Kurzzeitgedächtnis der Schüler eintreten. Ich möchte vorschlagen, auf folgende Begriffe im Geometrieunterricht zu verzichten:

Außenwinkel, Erhebungswinkel, Försterdreieck, Mittendreieck, rechtweisend, strahlige Symmetrie, Zentrale, Rechter, geometrischer Ort, Kettenproportion, Ankreis, lotsymmetrisches Viereck, Kreiskegelstumpf,

Sehnenviereck, Sehnentangentenwinkel.

Daneben erhält sich die Unsitte, zahlreiche Synonyme nebeneinander zu verwenden (teilweise mit unterschiedlichen Bedeutungsnuancen), z.B.

rechter Winkel, Winkel von 90 °, Rechter; senkrecht, lotrecht, orthogonal; Umlaufsinn, Drehsinn, Orientierung; Grundlinie, Basis; Pfeil, Speer, Ortsvektor, Schiebungs Pfeil, Verschiebungs Pfeil; Umfangswinkel, Peripheriewinkel, Randwinkel.

Ich halte es für angebracht, die Lehrbücher endlich sprachlich zu »entrümpeln«. Hier sehe ich nur den Ausweg in der »Beschränkung auf zentrale Begriffe«.

9. Vernebelung der Ideen durch technische Terminologie

Wenn mit den eben genannten Begriffen die meisten Mathematiker etwas anzufangen wüßten, so dürfte das bei Begriffen und Redeweisen wie

Ersatzoperator, Nenneroperator, Zähleroperator, Streckprogramm, Stauchprogramm, Halbzungenregel, Durchschieben der Zunge

kaum der Fall sein, es sei denn, sie haben das gerade bei der Hilfestellung zu den Hausaufgaben ihrer Kinder mitgelernt.

Glücklicherweise nehmen das heute Eltern nicht mehr ohne weiteres hin. So beginnt A. C. BAUMGÄRTNER in der Süddeutschen Zeitung eine kritische Auseinandersetzung mit der Sprache von Schulbüchern (»Leerformeln statt Lehrformeln«):

Im Mathematikbuch meines zwölfjährigen Jungen finde ich, ohne jede Erläuterung zwischen die Aufgaben gerückt, Sätze wie:

Eine *Schrumpfung*, welche die Abstände von Z auf den n -ten Teil verkürzt, kennzeichnen wir durch $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Entsprechend kennzeichnen wir eine *Streckung* mit der Streckungszahl z ($z \in \mathbb{N}$) durch $\frac{z}{1}$. Wird die Schrumpfung $\frac{1}{n}$ verkettet mit der Streckung $\frac{z}{1}$, so kennzeichnen wir die Verkettung durch $\frac{z}{n}$ (lies: z n -tel).

Das erscheint unter der (Überschrift >Rechnen mit Brüchen< und soll offenbar die Lösung der Aufgaben erleichtern.« (März 1977)

Da dieses Zitat kein »Zufallstreffer« ist, wie jeder Eingeweihte weiß, müssen wir uns als Mathematiklehrer, Lehrbuchverfasser und Didaktiker angesprochen fühlen.

Die Idee des Operators kann in der Bruchrechnung viele Schwierigkeiten beseitigen. Insbesondere kann sie dazu dienen, statt eines reinen Kalküls Ideen hervortreten zu lassen und passende Vorstellungen zu vermitteln. Wie kommt es dann zu solchen sprachlichen Entgleisungen? Im Gefolge dieser didaktischen Erfindung ergab sich die Notwendigkeit, über die Objekte zu reden. Dafür wurden solche technischen Begriffe erfunden. Dies hat jedoch zu einer völligen Vernebelung der Ideen durch eine pseudomathematische Terminologie geführt, denn diese Terminologie ist in der Mathematik ja keineswegs üblich. Wenn auch Nichtmathematiker das für typische mathematische Fachsprache halten.

Im Mathematikunterricht in der Bundesrepublik scheint mir ein übertriebener Hang zur Verbalisierung vorhanden zu sein. Auf der einen Seite will man die

Vorteile des Kalküls nutzen, dann bekommt man aber Angst vor der eigenen Courage und drückt den Sachverhalt nochmals ohne Formeln aus, muß dafür aber neue Begriffe einführen. Selbst wenn man aus der Unterrichtssituation heraus das Bedürfnis hat, Arbeitsbezeichnungen einzuführen, um besser über die Objekte reden zu können, sollte man die Gefahr einer Fixierung sehen, wenn solche Formulierungen in den Schulbüchern Eingang finden. Ich habe einmal amerikanische Kollegen gefragt, was »Bruchstrich« heißt. Sie kannten dafür keine Bezeichnung und kommentierten: »Darüber reden wir gar nicht.« Eine kritische Überprüfung unseres Verbalisierungsbestrebens erscheint mir also angebracht. Für das Ansehen der Mathematik ist es zudem keineswegs günstig, wenn Eltern die Texte in den Schulbüchern ihrer Kinder nicht mehr verstehen können. Der Lehrer sollte ausgesprochen kritisch auf sprachliche Neuerungen reagieren. »Das Operator-Chinesisch« sollte ein abschreckendes Beispiel sein. Als nächste Welle befürchte ich das »Computerchinesisch«.

10. Abwertung tradierter mathematischer Ideen

Wir hatten bereits gesehen, daß konkrete mathematische Inhalte unterschiedlich interpretiert werden können. Das kann durchaus nützlich sein, da man damit die Reichhaltigkeit und Fruchtbarkeit gewisser Begriffsbildungen oder Methoden deutlich machen kann. Ich habe jedoch den Eindruck, daß es eine Eitelkeit des Lehrenden gibt, die darauf zielt, durch eine besonders originelle Betrachtungsweise einen wichtigen Begriff in völlig neuem Licht darzustellen und bewährte Betrachtungsweisen als altmodisch anzusehen. Das ist das gleiche, wie wenn man bei einer Wagneroper Siegfried auf einer Honda und Hagen auf einer BMW daherfahren läßt. Das mag man in der Oper mit dem Bemühen um Aktualisierung rechtfertigen, im Mathematikunterricht halte ich aber einen so gearteten Ehrgeiz für ausgesprochen schädlich.

So habe ich z.B. den Eindruck, daß die didaktischen Diskussionen um die Einführung der Ableitung einer Funktion in einigen Schulbüchern zu Lösungen geführt haben, die den Zugang besonders für solche Schüler, die später nicht

Mathematik studieren wollen, eher verschleiern.

Ähnlich geht es mit der linearen Algebra. Während früher der Begriff des Vektorraums aus der Geometrie erschlossen wurde, geht man heute von möglichst pathologischen algebraischen Beispielen aus, um so angebliche Verengungen der Begriffsbildung zu vermeiden. Daß man damit wichtige Entwicklungsstufen dieses bedeutenden Begriffs einfach überspringt, wird offensichtlich nicht als gravierend angesehen.

Hat man die Möglichkeit, bei der Erarbeitung eines Begriffs verschiedene Ideen anzusprechen, so kann man bei der Bewertung des Ansatzes an Zugänglichkeit für den Schüler, Merkbarekeit, Hantierbarkeit, Anwendbarkeit vielleicht sogar Tragfähigkeit denken. Man sollte aber auch daran denken, daß es jeweils so etwas wie eine genetisch fundamentale Idee gibt, die dem Begriffsbildungsprozeß zugrundeliegt. Man tut solchen Ideen einen schlechten Dienst, wenn man sie zugunsten eleganterer oder originellerer Ideen opfert. Ich halte es für notwendig, genetisch bedeutsame Ideen zu respektieren.

11. Atomisierung von Ideen

Unter dem Schlagwort »problemorientierter Unterricht« werden Problemsammlungen angeboten, die für mich kaum eine Linie, den berühmten »roten Faden«, erkennen lassen. So wichtig Probleme für das Lernen von Mathematik sind, so wenig vertretbar scheint es mir zu sein, allein in der Beschäftigung mit mathematischen Problemen ein befriedigendes Ziel für den Mathematikunterricht zu sehen. Mögen solche Probleme zu ihrer Lösung auch origineller Ideen bedürfen, so meine ich doch, daß solche Ideen einer größeren Idee untergeordnet sein sollten, um wirklich Einsicht in Mathematik zu vermitteln. Bisher finden sich diese Vorschläge vorwiegend in Zeitschriften oder Projektmaterialien. Sie üben aber offenbar eine große Faszination auf manche Lehrer aus.

Man muß meines Erachtens sehen, daß hier die Entwicklung eines Netzes von Zusammenhängen zwischen mathematischen Aussagen notwendig ist, so daß

Problemsequenzen stets einer Leitidee untergeordnet werden sollten, damit der Mathematikunterricht nicht in Denksport ausartet.

12. Geringschätzung ideenhaltiger Inhalte

Das Schicksal vieler mathematischer Inhalte besteht darin, daß sie zunächst im Unterricht ihrer Ideen beraubt werden, dann als bloßer Kalkül einige Schülergenerationen zermürben, um schließlich bei einer Reform aufgegeben zu werden. Ein typisches Beispiel ist die sphärische Geometrie. Sie erstarrte als kalkülorientierte sphärische Trigonometrie, um dann Mitte der sechziger Jahre aus den Lehrplänen zu verschwinden. Ich finde es ausgesprochen paradox, daß in einer Zeit, in der sich der Mensch den Weltraum zu erobern beginnt, ausgerechnet ein Gebiet aus dem Mathematikunterricht verschwindet, das eine mathematische Beschreibung des Weltraumes liefert. Hier hätte man auch die Chance, für den Mathematikunterricht Phänomene zu retten. Statt dessen wird man wohl damit rechnen müssen, daß in Zukunft kaum noch jemand so elementare Tatsachen kennen wird wie die, daß die Höhe des Polarstern gleich der geographischen Breite des Beobachtungsortes ist. (Obwohl das eine einfache Folgerung des Satzes über die Winkel an Parallelen ist.) Ein ähnliches Schicksal haben wohl weitgehend die Reihenentwicklungen erlitten. Durch den hohen Zeitaufwand, der im Analysisunterricht für die Behandlung des Stetigkeitsbegriffs erforderlich ist, bleibt heute für Reihenentwicklungen keine Zeit mehr, obwohl gerade sie mit den Kleincomputern die Ideen wie Grenzwert, Konvergenz, Konvergenzgeschwindigkeit, Entwicklung einer Funktion vermitteln könnten.

Die Gefahr scheint mir heute z.B. der ebenen Trigonometrie zu drohen. Man würde so wichtige Ideen verlieren wie die, daß man aus der Kenntnis von Winkelfunktionen in unserer Umwelt Größen bestimmen kann, die einer Messung nicht direkt zugänglich sind, oder daß der Satz des Pythagoras ein Sonderfall des Kosinussatzes ist.

Angesichts dieser Entwicklungen möchte ich vor einer übereilten Elimination ideenhaltiger Inhalte warnen.

13. Verwaltung und Bürokratisierung von Ideen

In den letzten Jahren hat die Entwicklung der Zulassungsmisere an den Hochschulen zu einer Überbewertung von Zensuren geführt. Ein übersteigertes Gerechtigkeitsgefühl hat einer Notenarithmetik den Weg geebnet, die pädagogisch unverantwortlich ist. Das eigentlich Erschreckende an diesem Zustand ist jedoch, daß offensichtlich ein großer Teil der Lehrer derartig betriebsblind ist, daß sie versuchen, das System zu perfektionieren, anstatt das Übel bei der Wurzel zu packen. Letzte Glanzleistung ist das Normenbuch. Hier wird der grandiose Versuch unternommen, Ideen zu verwalten. Nun erhebt sich nicht etwa ein einmütiger Protestschrei unter der Lehrerschaft gegen die Verordnung einer solchen Zwangsjacke. Vielmehr begrüßen viele Kollegen diesen Ansatz im Prinzip, da sie damit ein Instrument erhalten, um der Forderung des Ministeriums nachzukommen, Abituraufgaben bei der Einreichung zu klassifizieren und Noten bei der Beurteilung der Arbeiten zu begründen. Daß man damit entscheidende Bildungsmöglichkeiten des Mathematikunterrichts aufgibt, wird offensichtlich kaum befürchtet.

Das Bestreben, Chancengleichheit in der Schule zu schaffen, ist verständlich. Aber was ist das für ein Unterricht, in dem die Muße fehlt, an der Lösung eines Problems längere Zeit zu arbeiten. Ist es nach dem Normenbuch möglich, im Unterricht der Kollegstufe WAGENSCHAINS berühmtes »Unterrichtsgespräch zu dem Satz EUKLIDS über das Nichtabbrechen der Primzahlfolge« zu versuchen? Ich fürchte, nein. Denn es lebt doch gerade von der Freiheit, in Neuland vorzustoßen. Dieses Normierungsbestreben widerspricht nach meiner Auffassung dem Anspruch der Wissenschaftlichkeit, wie er für die Kollegstufe erhoben wird. Deshalb sollte unser Bemühen darauf gerichtet sein, Freiräume für die Entwicklung von Ideen zu schaffen.

Wenn ich hier den Begriff der Idee in einem naiven Sinne verwendet habe, dann sollte das dazu dienen, auf die Notwendigkeit hinzuweisen, im Mathematikunterricht Akzente zu setzen. Die Geschichte des Mathematikunterrichts zeigt das Bemühen, Leitideen für den Mathematikunterricht zu gewinnen, damit Schüler durch die Beschäftigung mit Mathematik gebildet werden können. Es zeigt sich aber zugleich die Gefahr, daß gerade die Ideen in der Unterrichtspraxis am ehesten verschüttet werden. Deshalb sollte es unser Ziel sein, die Ideen für den Mathematikunterricht zu retten.

Anmerkung

- 1) Vortrag anlässlich der Ehrenpromotion von Prof. Dr. MARTIN WAGENSCHNIG an der TH Darmstadt am 1. Februar 1978

Literatur

- Courant, R., H. Robbins: Was ist Mathematik? Berlin: Springer 1962.
- Klein, F.: Vorlesungen über die hyperbolische Funktion. Berlin: Springer 1933.
- Kowalewski, G.: Bestand und Wandel. - München: Oldenbourg 1950.
- Landau, E.: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. - Berlin: Springer 1916.
- Lietzmann, W.: Aus meinen Lebenserinnerungen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1960.
- Rademacher, H., O. Toeplitz: Von Zahlen und Figuren. - Berlin: Springer 1968.
- Wagenschnig, M.: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken 1. - Stuttgart: Klett 1965.