

30. Iterationen mit elementaren Funktionen

Praxis der Mathematik 20 (1978), 257-262

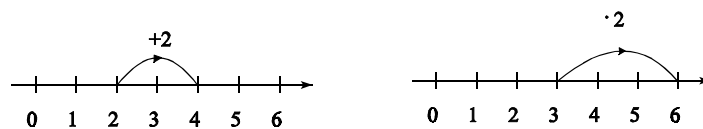
1. Funktionseigenschaften im Unterricht

Bei der Behandlung elementarer Funktionen in der Sekundarstufe I werden Eigenschaften wie Proportionalität, Antiproportionalität, Additivität, Monotonie und Symmetrie der Graphen hervorgehoben. Man bezweckt damit, Strategien zum Lösen von Aufgabentypen zu gewinnen, Möglichkeiten für heuristische Aktivitäten zu erschließen und Übungsfelder zum Beweisen in der Algebra zu schaffen. Es hat sich dabei gezeigt, daß die verschiedenen Darstellungsweisen von Funktionen wie *Tabellen*, *Pfeildiagramme*, *Graphen* und *Terme* das Erkennen von Funktionseigenschaften in unterschiedlicher Weise ermöglichen. So kann man an Tabellen gut die Proportionalität finden, mit Pfeildiagrammen erfaßt man in natürlicher Weise die Verkettung von Funktionen, während Graphen im Achsenkreuz leicht die Monotonie einer Funktion erkennen lassen. Die Termdarstellung kann man schließlich mit Vorteil zum Führen formaler Beweise verwenden.

Pfeildiagramme werden meist in Verbindung mit parallelen Achsen benutzt. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man durch Pfeildiagramme an der Zahlengeraden eine Reihe von Funktionseigenschaften auf naheliegende Weise für den Unterricht erschließen kann.

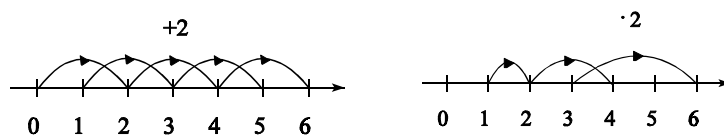
2. Pfeildiagramme an der Zahlengeraden

Bei der Betrachtung von Operatoren im 5. und 6. Schuljahr werden auch Veranschaulichungen an der Zahlengerade benutzt. So kann man etwa die Wirkung der Operatoren $+2$ und $\cdot 2$ wie folgt darstellen:



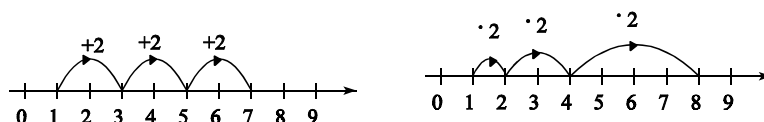
Hierbei wird zwar durch den Pfeil der Zuordnungscharakter angesprochen, andererseits wird nicht deutlich, daß ein Operator eine Funktion auf dem ganzen Zahlbereich ist.

Das wird deutlicher in den Darstellungen:



Hier muß man allerdings in Kauf nehmen, daß die große Zahl von Pfeilen eher verwirrend wirkt.

Es gibt jedoch einen Typ von Fragestellungen, der sich in sehr überzeugender Weise derart darstellen läßt. Wenn man sich etwa dafür interessiert, was wiederholte Anwendung des gleichen Operators bewirkt, dann kann man diesen Vorgang gut mit einem Pfeildiagramm an der Zahlengeraden verfolgen. Wiederholte Anwendung der Operatoren $+2$ und $\cdot 2$ auf die Zahl 1 zeigt sich wie folgt:



Diese Darstellung verdeutlicht z.B. unmittelbar, daß bei dem linken Pfeildiagramm die Schrittweite konstant, nämlich stets gleich 2 ist.

Die Wirkung der Operatoren $+0$ und $\cdot 1$ zeigt sich daran, daß wiederholte Anwendung nicht von der Startzahl wegführt. Im Diagramm erkennt man das an den Ringpfeilen bei jeder Zahl. Damit wird zugleich deutlich, daß beide Funktionen gleich sind, nämlich gleich der identischen Funktion.

Allgemein wollen wir im folgenden Iterationen mit elementaren Funktionen f durch Pfeildiagramme an der Zahlengeraden veranschaulichen und Eigenschaften der Funktionen diskutieren, die bei dieser Darstellungsform auffällig sind. Dabei verstehen wir unter einer *Iteration* mit einer Funktion f bei der Startzahl x die Folge $x, f(x), f(f(x)), \dots$

3. Iterationen beim Spiel mit Taschenrechnern

Nahegelegt werden solche Iterationen für Schüler der Sekundarstufe I durch Spiele mit dem Taschenrechner. Jeder, der mit seinem Taschenrechner „spielt“, stößt auf Iterationen. So kann man z.B. wiederholt die gleiche Zahl addieren.

Bei vielen Rechnern läßt sich etwa durch die Tastenfolge

3 + 2 + + +

die Folge 3, 5, 7, 9, 11, . . . erzeugen. Dem entspricht die Iteration mit der Funktion $x \rightarrow x+2$ bei der Startzahl 3.

Die Tastenfolge

3 x 2 = = =

führt zur Folge 3, 6, 12, 24... .Dem entspricht die Iteration mit der Funktion $x \rightarrow x \cdot 2$ bei der Startzahl 3.

Man kann hier Aufgaben der Art stellen: Wie viele Schritte benötigt man bei der Startzahl 1 mit dem Operator $\cdot 7$, um erstmals 100 zu überschreiten? Aus Varianten dieser Aufgabe kann man leicht Rechnerspiele entwickeln, bei denen es um die Suche nach einer Gewinnstrategie geht.

Wird man durch das Hantieren mit dem Taschenrechner spielerisch auf Iterationen geführt, so zeigt sich spätestens bei der Iteration von $\sqrt{a}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

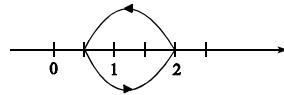
die Bedeutung von Iterationen mit elementaren Funktionen für die numerische Mathematik.

4. Eigenschaften von Funktionen bei Iterationen

Mit dem Taschenrechner stößt man bei Iterationen schnell auf auffällige Funktionseigenschaften. So führt z.B. die Tastenfolge

2 1/x 1/x 1/x

zur Folge 2, 0.5, 2, 0.5, Die Iterationsfolge oszilliert, d.h. sie springt zwischen den Zahlen 2 und 0.5 hin und her. An der Zahlengeraden zeigt sich das daran, daß der Pfeil von der Startzahl zur Zielzahl und mit einem Gegenpfeil wieder zur Startzahl zurückführt.



Diese Eigenschaft ist bei der Funktion $x \rightarrow \frac{1}{x}$ unabhängig von der gewählten

Startzahl, d.h. alle diese Iterationsfolgen oszillieren. (Dabei ist der Sonderfall der Startzahl 1 eingeschlossen. Startzahl 0 ist dagegen nicht zugelassen.) Sie beruht auf der Funktionseigenschaft

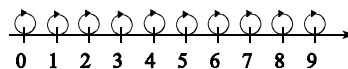
$$(1) \quad f(f(x)) = x \text{ für alle } x,$$

d.h. die Funktion f ist *involutorisch* (KLEMENT 1976). Unter den elementaren Funktionen der Sekundarstufe I haben $x \rightarrow \frac{a}{x}$, $x \rightarrow a - x$ und als Sonderfall

$x \rightarrow x$ diese Eigenschaft.

Die Betrachtung der Iterationsfolge führt also zu einer Vermutung, diese wird formal in (1) ausgedrückt und kann mit Hilfe der Termdarstellung der Funktion f bewiesen werden. Dabei erscheint mir wichtig, daß die Generalisierung („für alle x “) hier als Unabhängigkeit von der Wahl der Startzahl deutlich hervortritt und dem Schüler als Problem bewußt gemacht werden kann.

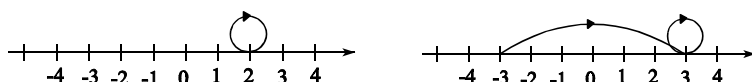
Iteriert man mit $x \rightarrow x$, so zeigt sich, daß man stets *Konstantenfolgen* erhält. Am Pfeildiagramm zeigt sich das daran, daß bei jeder Zahl ein Ringpfeil steht.



Es kann sein, daß bei einer Iterationsfolge erst nach einigen Schritten immer wieder die gleiche Zahl auftritt. Die Folge ist *schließlich konstant*. So ergibt z.B. die Funktion $x \rightarrow |x|$ bei positiver Startzahl eine Konstantenfolge; bei negativer Startzahl stimmen die Glieder der Iterationsfolge vom zweiten Glied an überein.

Ein ähnliches Verhalten zeigt die Funktion $x \rightarrow [x]$. Hier ergeben ganze Zahlen

als Startzahlen konstante Folgen, während die übrigen Zahlen als Startzahlen



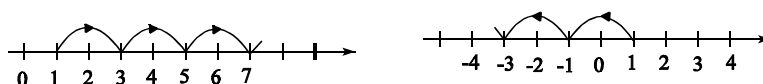
Iterationsfolgen liefern, deren Glieder vom zweiten Glied ab übereinstimmen.

Diese Eigenschaft kann man dadurch beschreiben, daß gilt:

$$(3) \quad f(f(x)) = f(x) \text{ für alle } x,$$

d.h. die Funktion f ist *idempotent* (KLEMENT 1973). Auch diese Eigenschaft ist am Pfeildiagramm besonders auffällig, während man sie z.B. im Graphen nur mühsam erkennen kann.

Die Funktion $x \rightarrow x + 2$ liefert bei der Startzahl 1 die Folge 1, 3, 5, 7... . Sie ist streng *monoton wachsend*. Man erkennt das am Pfeildiagramm daran, daß die Pfeile bei der Iterationsfolge stets nach rechts weisen.



Bei der Funktion $x \rightarrow x - 2$ dagegen erhält man bei der Startzahl 1 die Folge 1, -1, -3... . Sie ist streng *monoton fallend*, die Pfeile zeigen alle nach links.

Den Monotonieeigenschaften der Iterationsfolgen liegen die Funktionseigenschaften zugrunde:

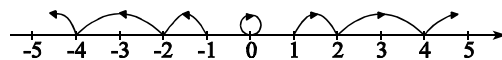
$$(4) \quad x < f(x) \text{ für alle } x,$$

$$(5) \quad x > f(x) \text{ für alle } x.$$

Im Fall (4) ist die Funktion *streng vergrößernd*, im Fall (5) *streng verkleinernd*.

(Ist das Gleichheitszeichen zugelassen, so sprechen wir von vergrößernden bzw. verkleinernden Funktionen.) Man beachte, daß es sich hier ebenfalls um Eigenschaften handelt, die unabhängig von der gewählten Startzahl sind. Auch hier gilt wieder, daß man leicht auf Fehler geführt wird, wenn man nicht die Unabhängigkeit von der Startzahl untersucht.

So ist $x \rightarrow 2x$ nur für alle positiven Zahlen streng vergrößernd, für alle negativen dagegen streng verkleinernd. Das wird am Pfeildiagramm deutlich:



Daß es sich bei dieser Darstellung also lediglich um ein heuristisches Hilfsmittel handelt, muß kein Nachteil sein. Denn einerseits werden die Schüler leicht zu Vermutungen geführt, andererseits aber auch leicht „aufs Glatteis“. So merken sie bald, daß es notwendig ist, formale Beweise zu führen. Dagegen wirken anschaulich am Graphen gewonnene Einsichten meist derart überzeugend, daß ein formales Beweisbedürfnis kaum besteht.

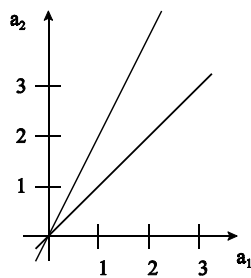
5. Fixpunkte von Funktionen

Wir sahen eben, daß bei $x \rightarrow 2x$ das Verhalten der Iterationsfolge keineswegs von der Startzahl unabhängig ist. Wir wollen uns insbesondere für die Zahl 0 interessieren. Mit ihr als Startzahl erhält man eine Konstantenfolge.

Am Pfeildiagramm zeigt sich dies als Ringpfeil bei der Zahl 0. Die Funktion f hat also die Eigenschaft

$$(6) \quad f(a) = a \text{ für ein } a,$$

d.h. a ist *Fixpunkt* der Funktion f . $x \rightarrow 2x$ hat 0 als Fixpunkt; die identische



Funktion $x \rightarrow x$ hat jede Zahl als Fixpunkt. Man erkennt Fixpunkte daran, daß man bei ihnen als Startzahl eine konstante Folge erhält.

Signalisiert einerseits das Pfeildiagramm Fixpunkte, so muß man andererseits bedenken, daß man Fixpunkte übersehen kann, da man nicht bei jeder Zahl mit einem Pfeil starten kann. Hier ergibt der Wechsel der Darstellungsform eine wesentliche Hilfe. Im Achsenkreuz zeigen sich Fixpunkte als Schnittpunkte des Graphen mit der ersten Winkelhalbierenden. In unserem Beispiel $x \rightarrow 2x$ ergibt sich $(0; 0)$ als einziger Schnittpunkt, also 0 als einziger Fixpunkt.

Man kann die Suche nach Fixpunkten natürlich gleich am Achsenkreuz aufrollen. Allerdings sind Fixpunkte am Graphen nicht so auffällig wie am Pfeildiagramm. Mir erscheint es deshalb sinnvoller, Fixpunkte zunächst am Pfeildiagramm bewußt zu machen und dann durch Variation der Darstellungsform zur Problemlösung zu gelangen. Damit vermittelt man gleichzeitig eine wichtige heuristische Technik.

Die Aufgabe wird man schließlich auch rechnerisch behandeln, indem man die Gleichung $2x = x$ löst und mit der Lösung 0 den einzigen Fixpunkt dieser Funktion bestimmt.

6. Charakterisierungen

Betrachtet man die Iterationsfolgen von $x \rightarrow x + 2$ und $x \rightarrow x \cdot 2$, so fällt auf, daß im ersten Fall die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, während bei der zweiten Funktion die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder konstant sind. Bei der ersten Funktion ergeben sich stets *arithmetische* Folgen als Iterationsfolgen, während alle Iterationsfolgen bei der zweiten Funktion (außer bei 0 als Startzahl) *geometrische* Folgen sind.

Diese Eigenschaften kann man so formulieren

$$(7) \quad f(x) - x = d \text{ für alle } x,$$

$$(8) \quad f(x) : x = q \text{ für alle } x \neq 0.$$

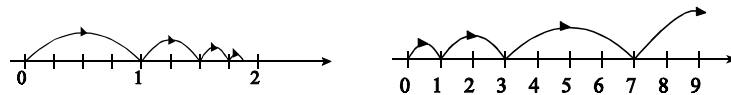
Diese Eigenschaften charakterisieren aber bereits die Funktionen, denn im ersten Fall ergeben sich die Funktionen $x \rightarrow x + d$, im zweiten Fall $x \rightarrow qx$. Die Begriffe arithmetische bzw. geometrische Folge vertiefen die Kenntnisse dieser wichtigen elementaren Funktionen, denn man erhält hier eine weitere interessante Beschreibungsart dieser beiden Funktionstypen. Es ergibt sich damit außerdem ein natürlicher Zugang zu diesen Folgentypen in der Sekundarstufe I. Dazu wird man insbesondere den Einfluß der Konstanten d und q auf die Iterationsfolge untersuchen, indem man sie systematisch variiert.

7. Konvergenzbetrachtungen

Der Zugang zu Folgen über Iterationsfolgen hebt stärker das „Aufeinanderfolgen“ der Glieder hervor als die Betrachtung von Folgen als Funktionen mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$. Die Auffassung von Folgen als speziellen Funktionen erscheint mir eher als eine Verfremdung. Unter dem Aspekt der Anwendbarkeit halte ich den Zugang zu Folgen über Iterationen für zweckmäßiger. Dahinter verbirgt sich natürlich nichts anderes als der rekursive Aspekt von Folgen, denn $x_{n+1} = f(x_n)$ gibt die Rekursionsvorschrift an, x_1 ist die Startzahl. Damit erschließt man den Schülern eine erste Vorstellung für Rekursionen, die

unendlich viele Objekte liefern.

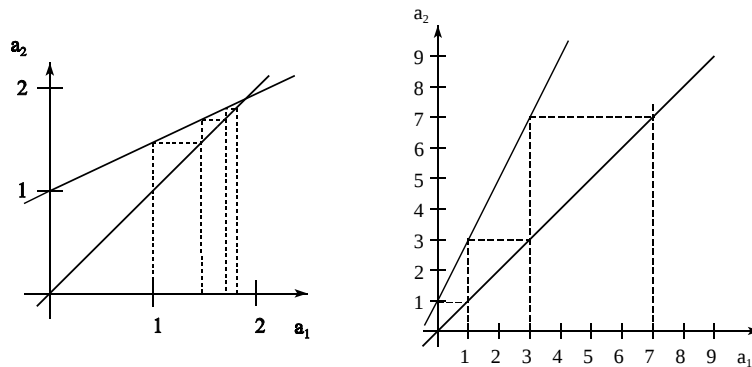
In dieser Altersstufe läßt sich mit Iterationsfolgen auch leicht ein Gefühl für das Konvergenzverhalten von Iterationsfolgen vermitteln, so konvergieren die Iterationsfolgen von $x \rightarrow \frac{1}{2}x + 1$ gegen den Fixpunkt 2. Dagegen divergieren bis auf die Folge mit Startzahl -1 (das ist der Fixpunkt der Funktion) die Iterationsfolgen von $x \rightarrow 2x+1$.



Auch hier gilt wieder, daß das Verhalten der Funktionen in dieser Darstellungsform besonders auffällig ist, ohne daß sich eine tiefere Einsicht über dessen Ursache ergibt. Sie läßt sich wieder durch Transformation der Darstellungsform in das Achsenkreuz gewinnen. Hier läßt sich das Konvergenzverhalten von Iterationsfolgen veranschaulichen und durch Betrachtung der Lage des Graphen zur 1. Winkelhalbierenden einsichtig machen. Dabei ergeben sich die bekannten Darstellungen.

Würde man hier mit dem Achsenkreuz beginnen, hätten die Schüler erhebliche Verständnisschwierigkeiten. Durch die Betrachtung von Iterationsfolgen am Pfeildiagramm kann den Schülern der Sinn der Fragestellung und der Verfahrensweise klar werden. Durch diese Betrachtungen kann man das allgemeine Iterationsverfahren vorbereiten, das in der Kollegstufe zur näherungsweisen Lösung von Gleichungen verwendet werden kann (HERING 1973).

In der Sekundarstufe I wird man auch das Heronische Verfahren mit in diese Betrachtungen einbeziehen. Diese Untersuchungen lassen sich nach Ideen von HERING (1973) und STRICK (1975) auf reizvolle Weise fortsetzen zu Untersuchungen der Iterationsfolgen gebrochener rationaler Funktionen.



Im Vorfeld der Analysis kann man auch wieder spielerisch mit dem Taschenrechner das Konvergenzverhalten von Iterationsfolgen untersuchen. So liefert etwa die Tastenfolge

2 $\sqrt{x}$ $\sqrt{x}$ $\sqrt{x}$...

eine Iterationsfolge mit dem Grenzwert 1. (Dabei ist wegen der Rundung die angezeigte Folge schließlich konstant, es treten schließlich nur noch Einsen auf).

Eine Auflistung der Grenzwerte von Iterationsfolgen, die sich mit Hilfe der Funktionstasten eines Taschenrechners ergeben, findet sich in (SCHÖNWALD 1977).

Literatur

Hering, H., Iterative Berechnungen von Quadratwurzeln. PM 15 (1973) 145-150; 177-184.

Klement, H., Idempotente Funktionen in der Analysis. PM 15 (1973) 237-242.

Klement, H., Involutrische Funktionen in der Analysis. PM 18 (1976) 85-89.

Schönwald, H.G., Konvergenz und Divergenz von Folgen $a_{n+1} = \text{Taste}(a_n)$ bei Taschenrechnern. PM 19 (1977) 181-182.

Strick, H.K., Rekursiv definierte Folgen mit irrationalen Grenzwerten. PM 17 (1975) 115-125.