19. Ware-Preis-Relationen im Unterricht

Der Mathematikunterricht 19 Heft 6 (1973), 58-76

1. Einleitung

Als Käufer hat man für jede Menge einer bestimmten Ware einen Geldbetrag, den Preis der Warenmenge, zu zahlen. Die Zuordnung „Warenmenge → Preis der Warenmenge“ will ich kurz *Ware-Preis-Relation* einer bestimmten Ware nennen. Bei der Behandlung von Ware-Preis-Relationen im Mathematikunterricht standen bisher Proportionalitäten im Vordergrund. Für die Diskussion der Proportionalität sei auf die Arbeiten von KIRSCH (1969) und ILSE (1973) verwiesen. Sie können eine moderne *Schlußrechnung* anregen.

Aufgaben wie „5kg Zucker kosten 1,30 DM, was kosten 225 g?“ sind mit dieser Technik leicht zu lösen, werden aber häufig nicht der Wirklichkeit gerecht, da vom Handel derartige Warenmengen im allgemeinen nicht mehr abgegeben werden. So ist der Käufer unter Umständen gezwungen, wenigstens 250 g Zucker zu kaufen, wenn er 225 g haben will. Weiter ist es allgemein üblich, beim Abnehmen größerer Warenmengen einen Rabatt zu vereinbaren. Dadurch ist die Proportionalität nicht mehr für den ganzen Warenbereich gewährleistet. Schließlich ist bei manchen Waren, etwa bei elektrischer Energie, zunächst eine Grundgebühr zu bezahlen. Auch dadurch wird die Proportionalität zerstört. Bei einer Parkuhr muß man sich vorher für eine bestimmte Parkzeit entscheiden. Es kann sein, daß man dabei „zu viel“ zahlt, denn man bekommt für nicht ausgenutzte Zeit kein Geld heraus. Die Ware-Preis-Relation ist also in diesem Fall keine Funktion. Solche Beispiele aus dem täglichen Leben legen es nahe, den Bereich der zu betrachtenden Ware-Preis-Relationen für den Unterricht zu erweitern. An einigen wichtigen Beispielen aus der Praxis will ich eine solche Erweiterungsmöglichkeit zeigen. Dabei kommt es mir besonders darauf an, im Überblick einige Beispiele mit Modellcharakter zu behandeln. Es sollen für jedes dieser Modelle spezifische mathematische Fragestellungen dargestellt werden.

2. Strom-Modell

Der Preis der im Haushalt verbrauchten elektrischen Energie setzt sich zusammen aus dem Grundpreis und dem Preis pro kWh. Je höher der Grundpreis ist, desto niedriger ist der Preis pro kWh.

Beispiel:

Bei einem Grundpreis G_1 = 8,00 DM (Tarif 1) im Monat beträgt der Preis pro kWh 0,10 DM.

$$p_1 = 0{,}10 \text{ DM/kWh},$$

dagegen ist beim Grundpreis G_2 = 16,00 DM (Tarif 2)

$$p_2 = 0{,}07 \text{ DM/kWh}.$$

In beiden Fällen ist die Zuordnung „elektrische Energie → Preis“ eine ganze algebraische Funktion 1. Grades:

$$f_1\colon x \to p_1 x + G_1$$

$$f_2\colon x \to p_2 x + G_2.$$

Hier wird deutlich, daß p_1 und p_2 zusammengesetzte Größen sind.

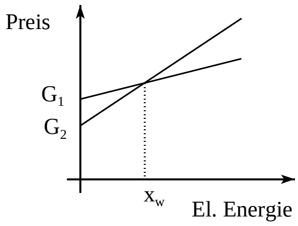

Abb. 1

In Abb. 1 sind die beiden zugehörigen Graphen dargestellt. Wie üblich kann man für jeden der Tarife die beiden Grundaufgaben stellen:

Gegeben: Elektrische Energie

Gesucht: Preis

oder

Gegeben: Preis

Gesucht: Elektrische Energie

Darüber hinaus stellt sich hier die Frage, welcher Tarif günstiger ist. Dazu betrachten wir die beiden Gleichungen

$$f_1(x) = p_1 x + G_1$$

$$f_2(x) = p_2 x + G_2.$$

Ist $p_1 = p_2$ und $G_1 \neq G_2$ dann haben die Graphen keinen Schnittpunkt. In diesem Fall ist Tarif 1 genau dann günstiger als Tarif 2, wenn $G_1 < G_2$ ist. Ist $p_1 \neq p_2$, etwa $p_1 > p_2$, dann ergibt sich ein Schnittpunkt. Die Stelle x_w des Schnittpunktes gibt den elektrischen Energieverbrauch im Monat an, oberhalb dessen es zweckmäßig ist, Tarif 2 statt Tarif 1 zu wählen. Die mathematische Behandlung ist mit den üblichen Mitteln leicht möglich. Man kann x_w graphisch bestimmen oder algebraisch (Klasse 8).

Es sei vorausgesetzt

$$G_1 < G_2 \text{ und } p_1 > p_2$$

Dann erhält man

$$f_1(x_w) = f_2(x_w).$$

Daraus folgt

$$p_1 x_w + G_1 = p_2 x_w + G_2.$$

Das ergibt

$$x_w = \frac{G_2 - G_1}{p_1 - p_2}.$$

In unserem Beispiel beträgt $x_w = \dfrac{8{,}00 \text{ DM}}{0{,}03 \text{ DM/kwh}} \approx 267 \text{ kWh}.$

Hier besteht die Möglichkeit, eine Verallgemeinerung der Proportionalität an einem praktisch wichtigen Beispiel im Unterricht zu behandeln. Außerdem kann man das mathematische Beschreibungsniveau variieren. Eine wirtschaftlich wichtige Entscheidung kann mathematisch begründet werden.

3. Das Parkhaus-Modell

Auch beim Parken in einem Parkhaus ist zunächst ein Grundbetrag G zu entrichten. Dieser Grundbetrag gestattet das Parken bis zu einer Zeitdauer a_1. Für jede weitere Zeitspanne Δa ist ein bestimmter Betrag p zu entrichten bis zu einer Höchstzeit von $a_1 + n \cdot \Delta a$, $n \in$ N. Von da an treten Sondervereinbarungen in Kraft.

Beispiel:

Die erste Stunde kostet 1,30 DM, jede weitere angefangene Stunde kostet 0,50 DM bis zu 5 Stunden. Abb. 2 zeigt den Graphen dieser Relation.

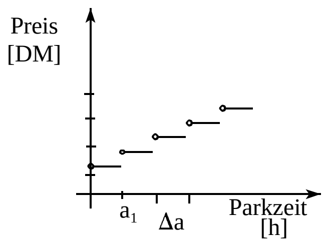

Abb. 2

Die Paare aus vollen Stunden und zugehörigen Preisen sind Elemente einer ganzen rationalen Funktion 1. Grades. Die volle Relation „Parkzeit → Preis“ ist jedoch eine Treppenfunktion, denn bei angebrochenen Stunden ist der Preis der vollen Stunde zu zahlen.

Wir beschreiben diese Funktion algebraisch durch:

$$f(x) = \begin{cases} G & \text{für } 0 < x \leq a_1 \\ kp + G & \text{für } a_1 + (k-1) \cdot \Delta a < x \leq a_1 + k \cdot \Delta a,\ k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Hier ist die Möglichkeit gegeben, die Schüler mit einem Funktionstyp bekanntzumachen, der nicht durch einen geschlossenen algebraischen Ausdruck definiert ist. Damit kann man einer Einengung des Funktionsbegriffs vorbeugen.

Andererseits wird man jedoch bestrebt sein, weitgehend geschlossene algebraische Ausdrücke zur Beschreibung heranzuziehen. Dazu bedienen wir uns des folgenden Verfahrens:

Für eine beliebige Zeit x suchen wir die kleinste Zeit x^* aus

$$M=\{a_1 + (k-1)\cdot \Delta a \mid k = 1, \ldots , n + 1\},$$

die größer oder gleich x ist. Sie ist eindeutig bestimmt. Damit gilt

$$f(x) = f(x^*).$$

Mit

$$f(a_1 + (k-1) \cdot \Delta a) = \frac{p}{\Delta a}(a_1 + (k-1) \cdot \Delta a) + G - \frac{p - a_1}{\Delta a}$$

kann man auch schreiben

$$f(x) = \frac{p}{\Delta a} \cdot x^* + G - \frac{p \cdot a_1}{\Delta a}.$$

In unserem Beispiel ergibt sich die Gleichung

$$f(x) = 0{,}50\frac{\text{DM}}{\text{h}} \cdot x^* + 0{,}80 \text{ DM};$$

für

$$x = 1\frac{1}{4}\text{h} \text{ ist } x^* = 2\text{h};$$

dazu gehört der Preis

$$f(1\frac{1}{4}\text{h}) = 1{,}80 \text{ DM}.$$

Als Funktionswerte treten nur Elemente aus

$$f(M) = \{p\,(k-1) + G \mid k = 1, \ldots, n + 1\}$$

auf.

Im Sonderfall $\Delta\, a = a_1$ und $G = p$ ist es möglich, zu vereinfachen:

$$f(x) = (k + 1)\, p \text{ für } k\mathrm{a}_1 < \mathrm{x} \leq (k + 1)a_1,\ k=0, ..., n.$$

Zu jedem x des Definitionsbereichs gehört ein eindeutig bestimmtes Element $k \in N_0$ mit

$$k\, a_1 < x \leq (k + 1)\, a_1.$$

x^* ist gerade der ebenfalls eindeutig bestimmte Wert $(k+1)\, a_1$, also

$$x^* = (k + 1)a_1.$$

Andererseits gilt

$$k < \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}_1} \leq k+1.$$

Diese Zahl $k+1$ kann man mit Hilfe der Gauß-Klammer ausdrücken (VOLLRATH 1973). Denn eine Äquivalenzumformung ergibt

$$-(k + 1) \leq -\frac{x}{a_1} < -k.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$-(k + 1) \leq \left[-\frac{x}{a_1}\right],$$

also

$$\mathrm{k} + 1 = -\left[-\frac{x}{a_1}\right].$$

Damit erhält man:

$$\mathrm{x}^* = -\left[-\frac{x}{a_1}\right].$$

Das ergibt für die Funktion

$$f(x) = -\left[-\frac{x}{a_1}\right] \cdot p.$$

4. Das Taxameter-Modell

Das Taxametermodell ist mathematisch eine leichte Abwandlung des Parkhausmodells (z.B. WINTER-ZIEGLER 1971). Auch hier ist ein Grundpreis *G* zu zahlen, der gleichzeitig ein Anrecht auf eine Fahrstrecke a_1 liefert. Für jede weitere zurückgelegte Strecke $\Delta\, a$ ist der gleiche Betrag *p* zu zahlen. Außerdem sind Wartezeiten zu bezahlen. Für eine verstrichene Zeiteinheit z ist der Preis p_2 zu entrichten. Das bewirkt beim Graphen der Ware-Preis-Funktion eine Parallelverschiebung nach oben um den Betrag *p*. Wie beim Parkhausmodell erhalten wir die Ware-Preis-Funktion ohne Wartezeit:

$$f_o(x) = \begin{cases} G & \text{für } 0 < x \le a_1 \\ kp+G & \text{für } a_1+(k-1)\cdot\Delta\, a < x \le a_1+k\cdot\Delta\, a, \\ k=1,\ldots,n. & \end{cases}$$

Für die Ware-Preis-Funktion mit Wartezeit $i \cdot z$ ($i \in N_0$) erhalten wir

$f_i(x) = f_o(x) + i \cdot p_z$.

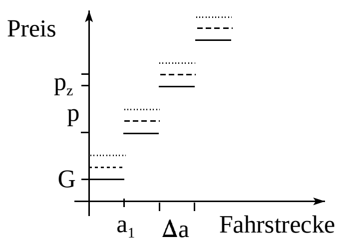

Abb. 3

Abb. 3 veranschaulicht die Schar von Funktionen. Es ergibt sich hier die Möglichkeit, auf die Bedeutung von Parametern bei Funktionen hinzuweisen.

Typische Aufgaben sind z.B.:

> Wieviel muß man für eine Fahrtstrecke von 3 km bei 5 Wartezeiten zahlen ? Man hat 5 DM. Welche Strecke kann man ohne Wartezeit zurücklegen.
>
> Um wieviel verringert sich die Fahrtstrecke, wenn man mit 2 Wartezeiten rechnen muß?

Aufgaben dieser Art kann man leicht am Graphen lösen. Statt des zweidimensionalen Koordinatensystems kann man natürlich ein räumliches wählen. Es kommt dann noch eine Zeitachse hinzu.

5. Das Münzfernsprecher-Modell

Die Selbstwählfernsprecher fassen Münzen von 0,10 DM, 0,50 DM, 1,00 DM. Nur „unangebrochene" Münzen werden herausgegeben. Das Risiko, Geld zu verschenken, erhöht sich demnach mit dem Münzwert. Mit 0,10 DM kann man eine Zeiteinheit *E* telefonieren; man muß jedoch wenigstens 0,20 DM zu Beginn einwerfen.

Abb. 4 veranschaulicht die Zeit-Preis-Relation.

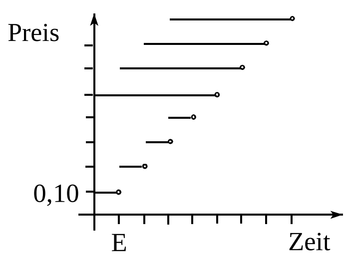

Abb. 4

Der Automat ist so eingerichtet, daß für $0 < x < E$ wenigstens 0,10 DM, möglicherweise 0,50 DM oder 1,00 DM zu zahlen sind. Das sind aber auch alle möglichen Beträge. Denn einen Betrag von weniger als 0,50 DM kann man nur mit 0,10 DM Stücken erzielen. Dabei wird dann nur eine Münze verbraucht; die anderen werden zurückgegeben. Für einen Betrag zwischen 0,50 DM und 1,00 DM kommt es auf die Reihenfolge des Münzeinwurfes an.

0,60 DM kann man z.B. einwerfen in Form von

6 Münzen zu 0,10 DM,

1 Münze zu 0,10 DM und 1 Münze zu 0,50 DM

oder 1 Münze zu 0,50 DM und 1 Münze zu 0,10 DM.

Die Gesprächszeit möge kürzer als E sein. Im 1. Fall wird nur 1 Münze verbraucht, die 5 anderen werden ausgeworfen, man zahlt also für $0 < x < E$: 0,10 DM.

Im 2. Fall wird die 0,10 DM-Münze verbraucht, die 0,50 DM-Münze wird ausgeworfen, man zahlt also wieder 0,10 DM.

Im 3. Fall wird die 0,50 DM-Münze verbraucht, die Münze zu 0,10 DM wird ausgeworfen, man zahlt 0,50 DM.

Entsprechend überlegt man sieh die weiteren Fälle. Es wird deutlich, daß im allgemeinen die Zeit-Preis-Relation keine Funktion ist. Verwendet man jedoch nur 0,10 DM-Münzen, so liegt eine Funktion vor. Sie kann beschrieben werden durch

$$f(x) = -\,0{,}10 \cdot \left[-\; \frac{t}{E} \right] \text{ DM.}$$

Wieder handelt es sich um eine Treppenfunktion.

Verluste können z. B. eintreten, wenn man eine falsche Nummer wählt oder ein Gespräch abgebrochen wird. Es ist also zweckmäßig, zunächst möglichst zwei 0,10 DM-Stücke einzuwerfen. Kommt das gewünschte Gespräch zustande, dann kann man telefonieren, bis das eingeworfene Geld verbraucht ist. Telefoniert man immer so lange, bis das Geld verbraucht ist, dann liegt dieser Strategie eine Proportionalität zugrunde.

Jedem möglichen Geldbetrag $k \cdot 0{,}10\,\mathrm{DM}$, $k \in \mathbb{N}$, ist die Zeit

$$x = k \cdot E = \frac{E}{0{,}10\ DM} \cdot k \cdot 0{,}10\,\mathrm{DM}$$

zugeordnet. Definitionsbereich ist $\{k \cdot 0{,}10\,\mathrm{DM} \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Auch bei diesem Modell wird deutlich, daß das eigentliche Problem in der mathematischen Erfassung wirtschaftlich vernünftigen Verhaltens liegt. Wichtige Funktionstypen ergeben sich bei bestimmten Strategien. Sie stellen damit eine Motivation für diese Funktionstypen dar.

6. Das Parkuhr-Modell

Als Beispiel sei eine Parkuhr betrachtet, bei der man für 0,05 DM, 0,10 DM, 0,15 DM, 0,20 DM eine Parkzeit von 15 Minuten, 30 Minuten, 45 Minuten, 60 Minuten erhält. Nicht ausgenutzte Parkzeiten muß man trotzdem bezahlen. Der Glücksfall, daß man noch Parkzeit vom Vorgänger übernimmt, wird nicht betrachtet.

Der Preis für die Zeiteinheit E sei p. Abb. 5 veranschaulicht die Preis-Zeit-Relation f. Sie besteht aus allen Paaren (rE, kp) mit $r \leq k$, $r \in \mathbb{R}_0^+$, $k = 1, \ldots, n$.

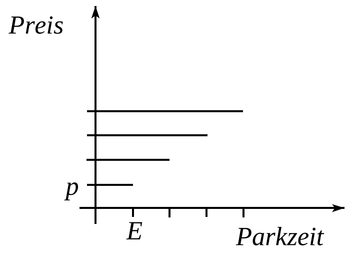

Abb. 5

Die optimalen Paare sind (kE, kp), $k = 1, ..., n$. Die Menge

$$f_o = \{(kE, kp) / k = 1, ..., n\}$$

der optimalen Paare ist eine Proportionalität.

Aus dem Graphen von f lassen sich leicht einige Eigenschaften ablesen.

(1) $f_o \subset f$.

(2) Aus $(rE, kp) \in f$ und $(kE, lp) \in f$ folgt $(rE, lp) \in f$, $k, l \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_o^+$, (3) Aus $(kE, lp) \in f$ und $(lE, kp) \in f$ folgt $k = l$.

Man erkennt am Graphen die Analogie zur $\leq$-Relation in $\mathbb{R}_o^+$.

7. Das Briefporto-Modell

Das Briefporto bei Inlandsbriefen mit einem beliebigen Format ist abhängig vom Gewicht. Zu bestimmten linksoffenen Gewichtsintervallen

$$(O; a_1], (a_1; a_2],...,(a_{n-1}; a_n] \text{ mit } a_0 = 0 < a_1 <...< a_n$$

werden Preise $p_1,...,p_n$ festgesetzt. Es gilt:

$$p_i < p_{i+1} \text{ für } i = 1,..., n–1.$$

Die Gewicht-Preis-Relation ist mit $a_o = 0$ g definiert durch

(7.1) $f(x)=p_{i+1}$ für $a_i < x \leq a_{i+1}$, $i = 0,..., n - 1$.

Es handelt sich um eine Treppenfunktion.

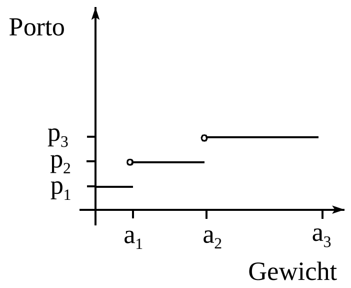

Abb. 6

Die einschränkende Bedingung (7.1) reicht für die Praxis im allgemeinen nicht aus. Denn danach wäre es möglich, daß es preiswerter ist, einen Brief mit einem Gewicht zwischen a_i und a_{i+1} in zwei Briefe zu zerlegen. Um derartige Einsparungen seitens des Postkunden zu vermeiden, muß man also zusätzlich fordern:

(7.2) $p_k + p_m \geq p_i$ für $k,m < i$, $i \geq 2$.

Gleichheit ist zugelassen, denn dann lohnt sich der Aufwand für den Kunden nicht.

Die Forderung (7.2) läßt sich ersetzen durch

(7.3) $p_i \leq 2p_1$ für $i=1, ..., n$.

Denn zusammen mit (7.1) erhält man aus (7.3) die Forderung (7.2), da für $m \geq 1$ gilt

$$p_k + p_m \geq 2p_1 \geq p_i$$

Für $k = m = 1$ ergibt sich $p_i = 2p_1$ für $i = 2$ aus (7.2).

Also sind unter der Voraussetzung (7.1) die Forderungen (7.2) und (7.3) äquivalent.

Die Tabelle für das Briefporto (Stand 1. Juli 1972) im Inland (nicht Standardbriefe) zeigt, daß (7.2) verletzt ist, z. B.

$$p_1 + p_m = 0{,}60 \text{ DM} + 0{,}60 \text{ DM} = 1{,}20 \text{ DM} < 1{,}40 \text{ DM} = p_4$$

(0 g, 50 g]	(50 g, 100 g]	(110 g, 250 g]	(250 g, 500 g]	(500 g, 10 kg]
0.60 DM	0,80 DM	1,10 DM	1,40 DM	1,70 DM

Im Paketdienst (Beispiel: 1. Zone, Inland) ist (7.2) bis zu einem Gewicht von 9 kg erfüllt. Von da ab sind Einsparungen durch Zerlegung möglich und wohl auch erwünscht.

(0 kg, 5 kg]	(5 kg, 6 kg]	(6 kg, 7 kg]	(7 kg, 8 kg]	(8 kg, 9 kg]	(9 kg, 10kg]
2,20 DM	2,60 DM	3,10 DM	3,60 DM	4,10 DM	4,60 DM

Z.B. beträgt für ein Paket von 9,5 kg das Porto 4,60 DM. 2 Pakete mit je 4,75 kg kosten je 2,20 DM, also zusammen 4,40 DM.

Bei den Gebühren für telegraphische Postanweisungen ist jedoch (7.2) stets erfüllt:

(0 DM, 50 DM]	(50 DM, 100DM]	(100DM, 500 DM]	(500 DM, 1000 DM]
5 DM	6 DM	7 DM	8 DM

Obwohl beim Briefporto (7.2) nicht erfüllt ist, ist bei Briefen eine Einsparung durch Zerlegung nicht möglich. Das liegt daran, daß für die Gewichtsgrenzen gilt:

(7.4) $\quad a_{i+1} \geq 2a_i,\ i=1, \ldots, n-2.$

Genau dann ist bei (7.4) Einsparung durch Aufteilung vermieden, wenn gilt:

(7.5) $p_{i+1} \leq p_1 + p_i = 1,..., n-1.$

Für $x \in (a_i, a_{i+1}]$ ist wegen (7.4) nur einer der beiden Zerlegungstypen möglich:

(1) $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in (a_i, a_{i+1}]$ und $x_2 \in (a_k, a_{k+1}]$,

$k \leq i, k \in \mathbb{N}_0$.

(2) $x = x_1 + x_2$ mit $x \in (a_{i-1}, a_i]$, $x_2 \in (a_k, a_{k+1}]$

$k \leq i-1, k \in \mathbb{N}_0$.

Fall (1) führt in keinem Fall zu einer Ersparnis, denn

$p_{i+1}+p_{k+1} \geq p_{i+1}$ für $k \leq i, k \in \mathbb{N}_0$, i=1,..., n – 1.

Fall (2) ergibt genau dann keine Ersparnis, wenn

(7.6) $p_i+p_{k+1} \geq p_{i+1}$ für $k \leq i-1, k \in \mathbb{N}_0$, i=1,..., n – 1.

Für $k = 0$ ergibt sich (7.5). Umgekehrt folgt aus (7.5)

$p_i + p_{k+1} \geq p_i + p_1 \geq p_{i+1}$.

Bei den Auslandsbriefen ist zwar (7.4) gegeben, (7.5) ist jedoch verletzt.

(0g, 50g]	(50g, 100g]	(100g, 250g]	(250g, 500g]	(500g, 1000g]	(1000g, 2000g]
1,30 DM	1,60 DM	2,90 DM	5,50 DM	9,10 DM	14,60 DM

Das führt zu Einsparungsmöglichkeiten:

Ein Brief mit dem Gewicht von 270 g kostet 5,50 DM; dagegen kosten ein Brief mit 20 g und ein Brief mit 250 g zusammen nur 4,20 DM.

Nach dem Portomodell wird deutlich, daß die didaktische Bedeutung dieses Modell vorwiegend in der mathematischen Behandlung von Zerlegungsproblemen liegt. Die von der Schlußrechnung gewohnten Grundaufgaben lassen sich mit Hilfe der Tabellen mühelos lösen.

8. Das Packungs-Modell

In zunehmendem Maße werden im Handel von irgendwelchen Waren nur abgepackte Mengen verkauft, z.B. nur Mengen von 50g, 100g, 200g, 500g, 1000 g. Will man eine Zwischenmenge kaufen, so muß man die nächst größere Pakkung oder Kombinationen von kleineren Packungen kaufen. Für 340 g kann man z.B. kaufen 500g, 2·200g, 200g + 100g + 50g usw. Welche Möglichkeit am günstigsten ist, hängt von der Art der Ware und der Preisgestaltung ab.

Es kann sein, daß Kombinationen in jedem Fall teuerer sind als die nächst größere Packung. Das entspricht dem Fall beim Portomodell, bei dem jede Zerlegung teurer ist. Also haben wir auch hier die einschränkenden Bedingungen

$$p_i \leq 2p_1,\ i = 1,...,\ n$$

bzw.

$$p_{i+1} \leq p_1 + p_i,\ i = 1,...,\ n-1 \text{ falls}$$

$$a_{i+1} \geq 2a, \text{ für } i = 1,...,\ n-2 \text{ ist.}$$

In diesem Fall geht man vom Gewicht x zur nächst größeren Packung mit dem Gewicht x^* über.

Als Ware-Preis-Relation ergibt sich die Funktion mit

$$f(x) = f(x^*) = p_i \text{ für } x^* = a_i,\ i = 1,\ ...,\ n.$$

In der Regel wird es jedoch in den Warenmengen-Intervallen jeweils Punkte geben, oberhalb derer die nächste Packung preiswerter ist als irgendeine Kombination und bis zu denen Kombinationen preiswerter sind als die nächste Packung.

Seien also die Packungen gegeben mit

$$a_o = 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Für die zugehörigen Preise p_i gelten wieder

$$p_i < p_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Packungskombinationen sind gegeben durch:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i \ , \quad k_i \in NY_o \ .$$

Ihr Preis beträgt

$$\sum_{i=1}^{n} k_i p_i \ , \quad k_i \in NY_o .$$

Die Menge der möglichen Packungskombinationen sei G.

In unserem Beispiel ist

G = {50 g, 100 g, 150 g, 200 g, 250 g, 300 g, 350 g, . . .}.

Für ein Element dieser Menge gibt es unter Umständen mehrere Kombinationsmöglichkeiten, z.B.

$$\begin{aligned} 350\ \text{g} &= 7 \cdot 50\ \text{g} \\ &= 5 \cdot 50\ \text{g} + 1 \cdot 100\ \text{g} \\ &= 3 \cdot 50\ \text{g} + 1 \cdot 200\ \text{g} \\ &= 1 \cdot 200\ \text{g} + 1 \cdot 100\ \text{g} + 1 \cdot 50\ \text{g} \end{aligned}$$

usw.

Die zuletzt aufgeführte Kombination verwendet jeweils größtmögliche Verpackungseinheiten. Sie bestimmt sich analog der Systemdarstellung natürlicher Zahlen in der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} l_i a_i, \quad 0 \le l_i < r_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \ l_i \in NY_o.$$

Diese Darstellung soll *Normalform* von $x \in G$ heißen. Sie ist sicher dann die preiswerteste Kombination von x, wenn gilt

$$\frac{p_i}{a_i} \geq \frac{p_{i+1}}{a_{i+1}} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \qquad (8.2)$$

Mit

a_i	50 g	100 g	200 g	500 g	1000 g
p_i	0,70 DM	1,30 DM	2,40 DM	5,00 DM	8,00 DM

ist das erfüllt.

Zum Beweis haben wir uns die beiden Fälle zu überlegen:

(1) $a_i = g\, a_k,\ k < i,\ i = 2, \ldots, n,\ g \in \mathbb{N}$.

(2) $a_i = g\, a_k + h\, a_m$ mit $k < m < i,\ i = 3, \ldots, n,\ g, h \in \mathbb{N}$.

Für (1) gilt

$$\frac{p_k}{a_k} \geq \frac{p_i}{a_i} = \frac{p_i}{g\, a_k}.$$

Daraus folgt

$$gp_k = \frac{p_k}{a_k}\, g\, a_k \geq p_i.$$

Für (2) gilt

$$\frac{p_k}{a_k} \geq \frac{p_m}{a_m} \geq \frac{p_i}{a_i}.$$

Aus $\frac{p_k}{a_k} \geq \frac{p_m}{a_m}$ folgt $\frac{ga_k p_m}{a_m} \leq \frac{ga_k p_m}{a_m} + g\ p_k$.

Aus $\frac{p_i}{a_i} = \frac{p_i}{ga_k + ha_m} \leq \frac{p_m}{a_m}$ folgt $p_i \leq \frac{g\ a_k p_m}{a_m} + hp_m$.

Das ergibt

$$p_i \leq g\, p_k + h\, p_m.$$

Damit ist jede Packung preiswerter als eine entsprechende Kombination kleinerer Packungen. In der Normalform ist jeweils die größtmögliche Anzahl größtmöglicher Packungen enthalten. Also ist sie unter allen Kombinationen die preiswerteste.

Will man eine Warenmenge *x* haben, so betrachtet man die zwei Wahlmöglichkeiten:

(1) Man kauft die nächst größere Packung *x** oder

(2) man kauft die nächst größere Kombination *x*' als Normalform.

Bei unseren Überlegungen sollen nur (8.1) und (8.2) Voraussetzung sein.

Für die Normalform $x' = \sum_{i=1}^{n} l_i a$

erhält man als Preis

$$f_{nor}(x') = \sum_{i=1}^{n} l_i p_i$$

Die Tabelle stellt die zugehörigen Preise dar.

x'	g	50	100	150	200	250	300	350	400
$f_{nor}(x')$	DM	0,70	1,30	2,00	2,40	3,10	3,70	4,40	4,80

x'	g	450	500	600	650	700	750	800
$f_{nor}(x')$	DM	5,00	5,70	6,30	7,00	7,40	8,10	8,70

x'	g	850	900	950	1000
$f_{nor}(x')$	DM	9,40	9,80	10,50	8,00

Will man möglichst wenig Überschuß haben, so wird man *x*' wählen.

Will man dagegen möglichst wenig Geld ausgeben, dann kann es sein, daß x^* günstiger ist.

Die Tabelle zeigt:

In (0 g, 50 g] ist für alle x: $f_{nor}(x') = f_{nor}(x^*)$.

In (50 g, 100 g] und (100 g, 200 g] ist für alle x: $f_{nor}(x') \leq f_{nor}(x^*)$.

In (200 g, 500 g] ist für $x \leq$ 400 g: $f_{nor}(x') < f_{nor}(x^*)$,

für x > 400 g: $f_{nor}(x^*) \leq f_{nor}(x')$.

In (500 g, 1000 g] ist für $x \leq$ 700 g: $f_{nor}(x') < f_{nor}(x^*)$,

für x > 700 g: $f_{nor}(x^*) \leq f_{nor}(x')$.

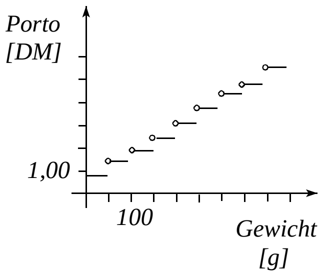

Abb. 7

Damit gewinnen wir unter der Voraussetzung (8.1), (8.2) als günstigste Einkaufsfunktion

$f_{0pt}(x) = \min (f_{nor}(x'), f_{nor}(x^*))$.

Hier ergibt sich eine gute Möglichkeit zur Einführung der wichtigen min-Funktion. Die Skizze veranschaulicht die optimale Ware-Preis-Relation. Es handelt sich wieder um eine Treppenfunktion.

9. Das Heizöl-Modell

Beim Einkauf von Heizöl z.B. kann man die Menge x zum Preis p_0x nach einer Proportionalität kaufen. Im allgemeinen ist es üblich, von einer bestimmten Menge a_i ab einen Rabatt von r_i% zu bekommen. (Wir beziehen hier den Rabatt r_{i+1} jeweils auf den Preis p_i). Für $x \geq a_i$ kauft man günstiger nach

$$p_i x - \frac{r_{i+1}}{100} p_i \;=\; p_i\left(1 - \frac{r_{i+1}}{100}\right) x \;=\; p_{i+1}\, x \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N}_o.$$

Zunächst wird vorausgesetzt: $a_0 = 0,\ a_{i+1} > a_i,\ i \in \mathbb{N}_0$.

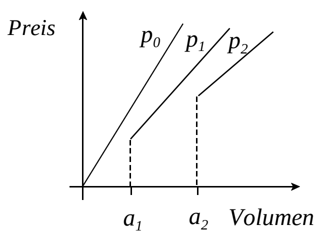

Abb. 8

Die Ware-Preis-Relation ist

$$f = \{(x; p_k\, x) \mid a_i \le x < a_{i+1},\ k = 0, ..., i,\ i \in \mathrm{N}_0\},$$

wenn man alle möglichen Volumen-Preis-Paare berücksichtigt.

Nimmt man jedoch die Rabatte in Anspruch, so kauft man besser ein nach der Relation

$$f_r = \{(x, p_i x) \mid a_i \le x < a_{i+1},\ k = 0, ..., i,\ i \in \mathrm{N}_0\},$$

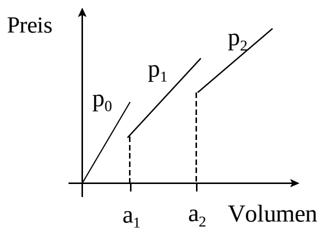

Abb. 9

Diese Relation ist rechtseindeutig, an ihrem Graphen erkennt man, daß es sich um eine Sprungunktion handelt, die stückweise proportional ist.

Es gilt also

$$f_r(x) = p_i x \text{ für } a_i \le x < a_{i+1},\ i \in \mathbb{N}_0.$$

Um die Funktionswerte zu bestimmen, muß man die p_i kennen. Kennt man und die r_j für $j \in \mathbb{N}$, so kann man berechnen

$$p_k = p_{k-1}\left(1 - \frac{r_k}{100}\right) = p_{k-2}\left(1 - \frac{r_k}{100}\right)\left(1 - \frac{r_{k-1}}{100}\right) =$$

$$= ... = p_0\left(1 - \frac{r_1}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{r_2}{100}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{r_k}{100}\right) =$$

$$= p_0 \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{r_j}{100}\right) \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit ergibt sich

$$f_r(x) = \begin{cases} p_o\, x & \text{für } a_o < x < a_1 \\ p_o \prod_{j=o}^{k} (1 - \frac{r_j}{100}) & \text{für } a_k \leq x < a_{k+1},\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Das ist jedoch noch nicht die optimale Funktion.

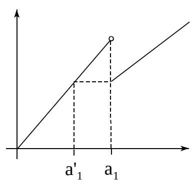

Abb. 10

Abb. 10 zeigt, daß es unzweckmäßig ist, im Bereich (a_1', a_1) die wirklich gekaufte Ware zu bezahlen. Es ist besser, die Menge a_1 zu kaufen und, falls man nur $x \in (a_1', a_1)$ abnehmen kann, weil vielleicht der Tank zu klein ist, den Rest $a_1 - x$ dem Händler zu schenken.

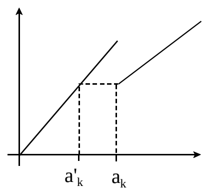

Abb. 11

Wir wollen allgemein die a'_k für $k \in \mathbb{N}$ bestimmen. Es gilt

$$p_k\, a_k = a'_k\, p_{k-1}.$$

Das ergibt:

$$a_k' = \frac{p_k}{p_{k-1}}\, a_k.$$

Durch ähnliche Überlegungen kann man auch gewinnen:

$$a_k' = \left(1 - \frac{r_k}{100}\right) a_k.$$

Die optimale Ware-Preis-Relation ist also die Funktion

$$f_{opt}(x) = \begin{cases} p_o(x) & \text{für } 0 < x \le a_1' \\ p_1 a_1 & \text{für } a_1' < x < a_1 \\ p_{kx} & \text{für } a_k \le x \le a_{k+1}' \\ p_{k+1} a_{k+1} & \text{für } a_{k+1}' < x < a_{k+1} \end{cases}$$

Als Beispiel betrachten wir folgendes Angebot (1973):

$a_1 = 800$ l, $a_2 = 1200$ l, $a_3 = 2000$ l, $a_4 = 3000$ l,

$p_0 = 0{,}20$ DM/l, $p_1 = 0{,}19$ DM/l, $p_2 = 0{,}18$ DM/l, $p_3 = 0{,}17$ DM/l

p_4 = 0,16 DM/l.

Daraus bestimmen sich:

$$a_1' = 760\text{ l},\ a_2' = 1136\text{ l},\ a_3' = 1889\text{ l},\ a_4' = 2824\text{ l}.$$

Damit erhält man die Funktion

$$f_{opt}(x) = \begin{cases} 0{,}20x\ \text{DM/l} & \text{für } 0\text{ l} < x \leq 760\text{ l} \\ 152\ \text{DM} & \text{für } 760\text{ l} < x < 800 \\ 0{,}19x\ \text{DM/l} & \text{für } 800\text{ l} \leq x \leq 1136\text{ l} \\ 216\ \text{DM} & \text{für } 1136\text{ l} < x < 1200\text{ l} \\ 0{,}18x\ \text{DM/l} & \text{für } 1200\text{ l} \leq x \leq 1889\text{ l} \\ 340\ \text{DM} & \text{für } 1889\text{ l} < x < 2000\text{ l} \\ 0{,}17x\ \text{DM/l} & \text{für } 2000\text{ l} \leq x \leq 2824\text{ l} \\ 480\ \text{DM} & \text{für } 2824\text{ l} < x < 3000\text{ l} \end{cases}$$

Man erhält als Graphen Abb. 12.

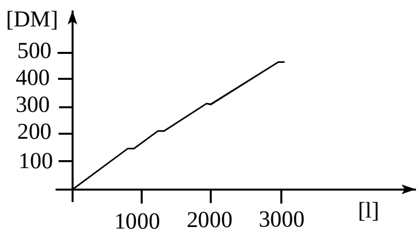

Abb. 12

Auch bei diesem Funktionstyp ergibt sich die Frage, ob man $f(x)$ als Term schreiben kann, Funktionen dieser Art kann man durch Addition von linearen Funktionen und Betragsfunktionen gewinnen. Dazu verwendet man drei Funktionstypen mit Graphen der Art, wie sie Abb. 13 zeigt.

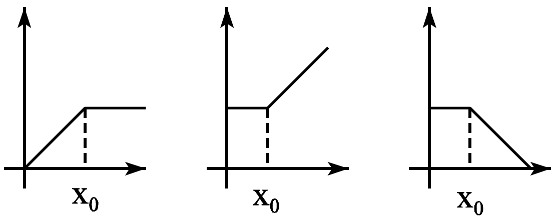

Abb. 13

Zu ihnen gehören Terme

$\alpha(-|x-x_o|+(x-x_o))+\beta$, $\alpha(|x-x_o|+(x-x_o))+\beta$,

$\alpha(|x-x_o|+(x-x_o))+\beta$.

Zunächst betrachten wir den Sonderfall mit dem Graphen von Abb. 14. Wir setzen an:

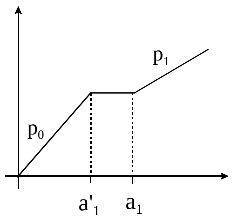

Abb. 14

$$f_{\mathrm{opt}}(x) = \alpha_1\,(-\;|x-a_1'| + (x-a_1')) + \alpha_2\,(|x-a_1| + (x-a_1')) + \beta.$$

Für $x > a_1$ erhält man $f_{\text{opt}}(x) = p_1\, x$, andererseits erhält man aus dem Ansatz für diesen Fall:

$$f_{\text{opt}}(x) = 2\alpha_2\,(x - a_1) + \beta = 2\alpha_2\, x + \beta - 2\alpha_2 a_1.$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\alpha_2 = \frac{p_1}{2} \quad \text{und} \quad \beta = p_1 a_1.$$

Für $x = 0$ erhält man:

$$f_{\text{opt}}(0) = 2\, a_1'\alpha_1 + \beta = -2\,\frac{p_1}{2}\, a_1\alpha_1 + p_1 a_1, \quad \text{also} \quad \alpha_1 = \frac{p_o}{2}.$$

Das ergibt

$$f_{opt}(x) = \frac{p_o}{2}(-|x - a_1'| + (x - a_1')) + \frac{p_1}{2}\,(|x - a_1|) + p_1 a_1.$$

In der Oberstufe des Gymnasiums kann man das Problem allgemein angehen. Dabei setzen wir voraus, daß bei a_n ein letzter Rabatt gegeben wird. Dann ergibt Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} f_{opt}(x) = {} & \frac{p_o}{2}(-|x - a_1'| + (x - a_1')) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{2}(|x - a_i| + (x - a_i)) \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i}{2}(|x - a_{i+1}'| + (x - a_{i+1}')) + p_1 a_1. \end{aligned}$$

Diese Überlegungen können motiviert werden vom Programmieren eines Rechners her. Da Fallunterscheidungen ziemlichen programmieraufwand erzeugen, während die Betragsfunktion meist fest verdrahtet ist, läßt sich der letzte Term mit wesentlich geringerem Aufwand programmieren. Darüber hinaus ist es erstrebenswert, die Schüler mit dem Zusammensetzen von Funktionen vertraut zu machen. Dazu sollten nicht nur die üblichen algebraischen Funktionen verwendet werden, sondern auch Typen wie die Betragsfunktion und die Ganzteilfunktion.

10. Zusammenfassung

Unter den zahlreichen in der Praxis auftretenden Ware-Preis-Relationen habe ich einige Grundtypen hervorgehoben, die mathematisch leicht zugänglich sind. Der Verlust einfacher Funktionsgleichungen gegenüber den Proportionalitäten wird aufgewogen durch die Fülle wirtschaftlich reizvoller Fragestellungen, die mathematisch elementar behandelt werden können. In allen Fällen kann die Betrachtung zu einer Vertiefung des Funktionsbegriffs führen. Die Beschreibungsebene läßt sich dem Vermögen der Schüler weitgehend anpassen, so daß anhand dieses Gegenstandes sinnvolle Differenzierungen in der Klasse vorgenommen werden können.

In den vorliegenden Überlegungen wurde außer acht gelassen, durch welche Kalkulationen die Preise zustande kommen, wie besondere Eigenschaften der Graphen (z.B. Sprünge, waagerechte Stücke, Abnahme der Steigung) wirtschaftlich zu behandeln sind. Als Operatoren für die Warenmenge werden meist positive rationale Zahlen verwendet. Das entspricht dem Vorgehen in der Schlußrechnung.

Wenn in den meisten Fällen durch Optimierungen die Betrachtung von Funktionen ermöglicht wurde, so erscheint es mir doch sinnvoll, die Modelle zunächst allgemeiner unter dem Aspekt der Relation zu betrachten. Die Funktionen können dann als wirklich beachtenswerte Sonderfälle hervorgehoben werden, so daß deutlich werden kann, daß der Funktionsbegriff für die Mathematik fundamental ist.

Literatur

Kirsch, A., Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung, MPSB XVI (1969), 41-55

Ilse, D., Über funktionale Charakterisierungen der direkten Proportionalität *f(x) = cx*, MS 9 (1971), 16-37.

Vollrath, H.-J., Charakterisierungen der Ganzteilfunktion, PM 15 (1973), 33-35.

Winter-Ziegler, Neue Mathematik 7, Hannover 1971, S.49.