14. Zur algebraischen Behandlung von Widerstandsschaltungen

Mathematisch- physikalische Semesterberichte 19 (1972), 159-165

Bekanntlich ergibt sich für zwei Widerstände R_1 und R_2 als Gesamtwiderstand R_r bei Reihenschaltung und R_p bei Parallelschaltung

$$R_r = R_1 + R_2 \quad \text{und} \quad R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Für $\mathbb{Q}^+$ ist durch

$$a * b \underset{def}{=} \frac{ab}{a+b}$$

eine Verknüpfung * gegeben. Von der praktischen Anwendung her erscheint es sinnvoll, das Verknüpfungsgebilde ($\mathbb{Q}^+$, +, *, >) zu betrachten und Parallelen zur Schaltalgebra zu suchen. Dem Term $a+b$ wollen wir die Reihenschaltung und dem Term $a*b$ die Parallelschaltung der Widerstände a und b zuordnen. Für die Terme wollen wir zur Klammersparung vereinbaren, daß * stärker binden soll als +.

Es ergibt sich sofort, daß ($\mathbb{Q}^+$, +, <) und ($\mathbb{Q}^+$, *, >) *Größenbereiche* (natürlich angeordnete Halbmoduln) (KIRSCH 1970) sind, zwischen denen es einen Isomorphismus f gibt, der definiert ist durch $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{Q}^+$.

Wir wollen nun in ($\mathbb{Q}^+$, +, *, >) die Vielfachenbildung bezüglich beider Verknüpfungen betrachten. Man definiert rekursiv

$$1a = a \quad \text{und} \quad 1_* a = a,$$

$$(n + 1)a = (na) + a \text{ und } (n + 1)_* a = (n_* a) * a$$

Zur Ersparnis von Klammern sei wieder vereinbart, daß die Vervielfachung stärker binden soll als die Verknüpfungen + und *. Für die unmittelbar möglichen Folgerungen über die Vielfachen verweisen wir auf (KIRSCH 1970).

Bekanntlich hat $(\mathbb{Q}^+, +, <)$ die *Teilbarkeitseigenschaft* (KIRSCH 1970). Es gibt also eine eindeutig bestimmte Zahl x mit $nx = a$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}^+$, für die man schreibt $x = \frac{1}{n} a$.

Für die *-Vielfachen gilt nun

$$n(n_* a) = a.$$

Demnach haben wir

$$\text{(T)} \qquad n_* a = \frac{1}{n} a \ .$$

Wir können im folgenden stets $n_* a$ durch $\frac{1}{n} a$ ersetzen.

Die Verknüpfung * ist in $\mathbb{Q}^+$ durch die Assoziativität und durch (T) bereits eindeutig bestimmt. Ist nämlich $\diamond$ eine assoziative Verknüpfung von $\mathbb{Q}^+$ mit der (T) entsprechenden Eigenschaft $n_\diamond a = \frac{1}{n} a$, wobei $n_\diamond a$ rekursiv definiert ist durch

$$1_\diamond a = a \text{ und } (n + 1)_\diamond a = (n_\diamond a) \diamond a,$$

dann folgt aus dem Assoziativgesetz

$$(m + n)_\diamond a = (m_\diamond a) \diamond (n_\diamond a)$$

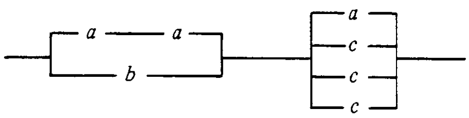
und daraus für $p, q, r, s \in \mathbb{N}$

$$\frac{p}{q} \Diamond \frac{r}{s} = \frac{pr}{qr} \Diamond \frac{pr}{ps} = (\frac{1}{qr}(pr)) \Diamond (\frac{1}{ps}(pr)) = ((qr) \diamond (pr)) \Diamond (ps) \diamond (pr))$$
$$= (qr+ps) \diamond (pr) = \frac{1}{qr+ps}(pr) = \frac{pr}{qr+ps} = \frac{p}{q} * \frac{r}{s}$$

In Analogie zur Schaltalgebra kann man nun jedem Term, der mit Hilfe von Variablen, den Verknüpfungszeichen + und * sowie + - und * - Vielfachen zusammengesetzt ist, eine Widerstandsschaltung zuordnen. Zu

$$2a*b + a*3_* c$$

z.B. gehört



Zwei Schaltungen sollen äquivalent heißen, wenn ihre Gesamtwiderstände gleich sind.

Ein grundlegendes Problem in der Schaltalgebra ist die Herstellung äquivalenter Schaltungen, die mit weniger Schaltern auskommen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dort das Distributivgesetz. Das gilt hier nicht, vielmehr haben wir

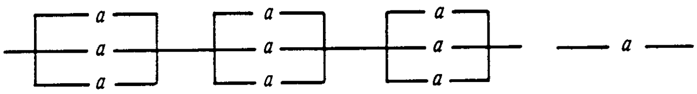
$$a * (b+ c) < a*b + a*c$$

und

$$a + b * c > (a+b) * (a+c).$$

Wir nennen sie *Subdistributivgesetze.*

Ist ein Term lediglich mit Hilfe der Variablen a und + und * und Vielfachen aufgebaut, so wollen wir ihn a-*Term* nennen. Bei a-Termen kann eine Vereinfachung möglich sein, die zu einer Reduktion der Widerstandszahl führt. Zu $n(n_* a)$ gehört eine Schaltung mit n^2 Widerständen a. Es gilt aber $n(n_* a) = a$. Zum a-Term a gehört eine Schaltung aus nur einem Widerstand a. Wir veranschaulichen den Sachverhalt für $n = 3$:



Jeder a-Term läßt sich in die Form bringen

$$k(m_* a) \text{ bzw. } m_*(ka).$$

Sie sind gleich wegen

$$k(m_* a) = k(\frac{1}{m}a) = \frac{k}{m}a = \frac{1}{m}(ka) = m_*(ka).$$

Wir brauchen also nur die beiden Fälle zu betrachten

$$\frac{k}{m}a + \frac{r}{s}a \text{ und } \frac{k}{m}a * \frac{r}{s}a\ .$$

Es gilt

$$\frac{k}{m}a + \frac{r}{s}a = (\frac{k}{m} + \frac{r}{s})a = \frac{ks + rm}{ms}s$$

und

$$\frac{k}{m}a * \frac{r}{s}a = (\frac{k}{m} * \frac{r}{s})a = \frac{kr}{mr + ks}a \ .$$

Für den *a*-Term T_a gelte

$$T_a = k(m_* a),$$

also gilt auch

$$T_a = m_* (ka).$$

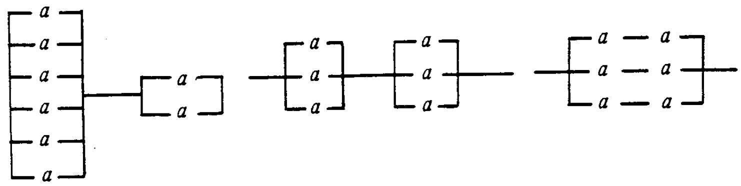
Wir wollen $k(m_* a)$ als + - *Normalform* und $m_*(ka)$ als *-Normalform von T_a bezeichnen. Wegen

$$\frac{k}{m}a = \frac{kn}{mn}a$$

gibt es zu jedem a-Term beliebig viele + -Normalformen und damit auch beliebig viele * - Normalformen. Unter ihnen gibt es jeweils eine, deren zugehörige Schaltung von kleinstmöglicher Widerstandszahl ist. Es sind diejenigen Normalformen *$k(m_* a)$* und $m_* (ka)$, für die k und m teilerfremd sind. Wir wollen sie die *reduzierten* Normalformen nennen. Beispielsweise können wir umformen

$$6_* a + 2_* a = \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a + \frac{3}{6}a = \frac{4}{6}a = \frac{2}{3}a = 2(3_* a) = 3_*(2a).$$

Das führt von einer Schaltung mit 8 Widerständen *a* zu zwei Schaltungen mit 6 Widerständen *a*.



Häufig läßt sich die Widerstandszahl jedoch noch weiter reduzieren, indem man mit Hilfe des euklidischen Algorithmus für k und m zu k den zugehörigen Kettenbruch entwickelt. Sei etwa für $k \geq m$

$k = q_1 m + r_1,\ \ 0 < r_1 < m,$

$m = q_2 r_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1,$

$r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2,$

.

.

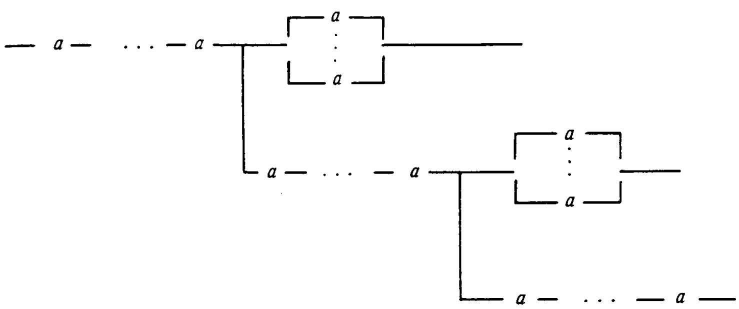
$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n,\ \ 0 < r_n < r_{n-1},$

$r_{n-1} = q_{n+1} r_n.$

Dann ergibt sich für $k \geq m$ (für $k < m$ mit $r_1 = k$ ohne q_1 bzw. $q_1 a$):

$$\begin{aligned}
\frac{k}{m}a &= (q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots \cfrac{1}{q_{n+1}}}})a \\
&= (q_1 + \frac{1}{q_2} * (q_3 + \frac{1}{q_4} * (\ldots)))a \\
&= q_1 a + \frac{1}{q_2} a * (q_3 a + \frac{1}{q_4} a * (\ldots)) \\
&= q_1 a + q_{2*} a * (q_3 a + q_{4*} a * (\ldots)).
\end{aligned}$$

Jeden a-Term kann man offensichtlich in diese Form bringen, wir nennen sie die *Kettenform.*



Die Anzahl der Glieder in der zum a-Term $k(m_* \mathrm{a})$ gehörigen Schaltung beträgt km, die der Schaltung, die zur Kettenform gehört beträgt

$$q_1 + q_2 + ... + q_n + q_{n+l}.$$

Es gilt

$$km \geq q_1 + q_2 + ... + q_n + q_n + 1,$$

denn

$$m^2 \geq 1 \Rightarrow q_1 m^2 \geq q_1 \Rightarrow mk = q_1 m^2 + r_1 m \geq q_1 + r_1 m$$

$$r_1^2 \geq 1 \Rightarrow q_2 r_1^2 \geq q_2 \Rightarrow r_1 m = q_2 r_1^2 + r_2 r_1 \geq q_2 + r_2 r_1$$

$$r_2^2 \geq 1 \Rightarrow q_3 r_2^2 \geq q_3 \Rightarrow r_2 r_1 = q_3 r_2^2 + r_3 r_2 \geq q_3 + r_3 r_2$$

...

Das ergibt die Behauptung. Für $k \geq m$ ergibt sich Gleichheit nur im Fall $m = 1$. Die Kettenform führt also im allgemeinen zu einer Verkleinerung der Widerstandszahl.

Die Kettenform eines a-Terms liefert aber nicht unbedingt die Schaltung mit der kleinsten Zahl von Widerständen a. Für $\frac{5}{6}$ a ist die zugehörige Kettenform

$a*5_* a$, die zugehörige Schaltung hat 6 Widerstände a. Es ist aber die Darstellung möglich $\frac{5}{6}a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a$. Dazu gehört eine Schaltung mit nur 5 Widerständen a.

Für die Verknüpfung * läßt sich ein Rechenstab entwickeln, wenn man mit Reziprokenskalen arbeitet. Ein solcher Stab kann als Zwischenstufe verwendet werden zwischen einem Additionsstab und dem normalen Rechenstab. Man verwendet dabei die Beziehung

$$\frac{1}{a * b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Neben dem von uns verwendeten anwendungsorientierten Zugang zur Verknüpfung * ist vielleicht noch folgende Analogiebetrachtung reizvoll:

In $\mathbb{N}$ gilt bekanntlich

$$(\text{kgV}\ (a, b))\cdot(\text{ggT}(a, b) = a \cdot b.$$

Mit Hilfe der kanonischen Zerlegungen gekürzter Brüche kann man das auch in $\mathbb{Q}^+$ erhalten, wenn man definiert:

Sei $\quad a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}\ ,\ \ b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$

mit Primzahlen $p_1 < p_2 < \ \dots\ < p_n$, α_i, $\beta_i \in \mathbb{N}$; dann definieren wir

$$a \sqcap b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\mathrm{Min}(\alpha_i, \beta_i)} ,$$

$$a \sqcup b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\mathrm{Max}(\alpha_i, \beta_i)} .$$

Damit erhält man

$$(a \sqcap b) \cdot (a \sqcup b) = a \cdot b.$$

Wir hatten oben *f* als Isomorphismus von ($\mathbb{Q}^+$, +) auf ($\mathbb{Q}^+$,*) erkannt; *f* ist auch Isomorphismus von ($\mathbb{Q}^+$, $\sqcap$) auf ($\mathbb{Q}^+$, $\sqcup$). Für + und * gilt:

$$(a + b)\,(a * b) = ab.$$

Wir haben also Analogien zwischen ($\mathbb{Q}^+$, +, *) und ($\mathbb{Q}^+$, $\sqcap$, $\sqcup$), Man kann diese Betrachtung noch fortführen[1]. Es gilt

$$ab = (a+b)\left(f\left(\frac{1}{a}\right) * f\left(\frac{1}{b}\right)\right) = (a+b)\, f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$= (a+b)\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Entsprechend erhält man für $\circ \in \{+, *, \sqcap, \sqcup\}$

$$ab = \frac{a \circ b}{\frac{1}{a} \circ \frac{1}{b}} \,.$$

Diese Funktionalgleichung gilt übrigens auch, wenn für $\circ$ die Bildung des arithmetischen, kontraharmonischen, geometrischen oder quadratischen Mittels (jeweils bei geeignetem Definitionsbereich) eingesetzt wird.

Schließlich sei noch auf den Zugang zur Bruchrechnung hingewiesen, der sich mit Hilfe eines Verknüpfungsgebildes (M, +, *, <) ergibt, wenn man fordert, daß (M, +, <) und (M, *, <) Größenbereiche mit der Eigenschaft (T) sind. Dann erhält man die natürlichen Zahlen als Operatoren bei der Vervielfachung bezüglich + und die Stammbrüche als Operatoren bei der Vervielfachung bezüglich *. Dieser Zugang ist insoweit didaktisch interessant, als sich die Verknüpfungen + und * gleichartig modellieren lassen.

Insgesamt ist es also leicht möglich, eine größere Anzahl von Aussagen über ($\mathbb{Q}^+$, +, *, <) zu gewinnen, es sind Anwendungs- und Veranschaulichungsmöglichkeiten gegeben, so daß eine gesonderte Betrachtung dieser Verknüpfung im Zusammenhang mit Strukturbetrachtungen (STEINER 1965) sinnvoll ist.

Literatur

Kirsch, A., Elementare Zahlen- und Größenbereiche, Göttingen 1970.

Steiner, H.-G., Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie, MU 11 (1965), 20-39.

1) Auf diesen Sachverhalt hat mich freundlicherweise Herr G. PICKERT aufmerksam gemacht.