6. Aufbau des Zahlensystems

In: G. Wolff (Hrsg.), Handbuch der Schulmathematik Band 7, Hannover o.J., 146-172

1.1 Aufbaumethoden

1.11 Einführung

Unser Zahlensystem ist historisch von den natürlichen Zahlen aus aufgebaut worden. Die Menge der natürlichen Zahlen wurde nach und nach durch die gebrochenen, irrationalen, negativen und komplexen Zahlen erweitert. Das geschah, um algebraische oder geometrische Aufgaben lösen zu können, die bis dahin unlösbar waren. Es wurde mit jeder neuen Zahlenart lange gerechnet, ehe sie begründet war. Anerkannt wurde sie meist erst dann, wenn man sie geometrisch deuten konnte. Noch C. F. GAUß (1831) mußte seine komplexen Zahlen mit ihrer Darstellung in der Zahlenebene verteidigen Erst im 19. Jahrhundert suchte man einen rein arithmetischen Aufbau des Zahlensystems. Ein solcher Versuch stammt von M. OHM (1822), seine Methode wurde von H. GRAßMANN (1861) und anderen weiterentwickelt. Eine erste Begründung der komplexen Zahlen mit Hilfe von Zahlenpaaren gab W. R. HAMILTON (1837). H. HANKEL (1867) hob als erster die Analogie der Konstruktion von ganzen und rationalen Zahlen hervor. Der schwerste Schritt bestand in der Begründung der reellen Zahlen. Diese Aufgabe lösten K. WEIERSTRAß (um 1860) durch **konvergente Aggregate,** G. CANTOR (1872) durch **Fundamentalfolgen,** R. DEDEKIND (1872) durch **Schnitte,** P. BACHMANN (1892) durch **Intervallschachtelungen,** A. CAPELLI (1897) durch aneinanderstoßende Mengen (BACHMANN 1939). Der Aufbau des Zahlensystems von E. LANDAU (1930) stellt wegen der abgerundeten Darstellung einen gewissen Abschluß dieser Bemühungen dar.

Diese Entwicklungen finden ihren Niederschlag auch im Mathematikunterricht der Schule. Hier lernt der Schüler schrittweise das Zahlensystem kennen. Wie sich das in der Unter- und Mittelstufe des Gymnasiums verwirklichen läßt, wurde bereits entwickelt [Bd. 1, I]. Die Methode kann nicht streng wissenschaftlich sein, da der Schüler damit überfordert wäre. Überdies zeigt die Erfahrung, daß die bis zur Oberstufe erworbenen Kenntnisse durchaus zur Bewältigung der in der Schule üblichen Analysis und analytischen Geometrie ausreichen. Andererseits ist es unbefriedigend, wenn die Schüler über die elementaren Grundlagen nur verschwommene Kenntnisse besitzen. Da schließlich der Aufbau des Zahlensystems wesentliche mathematische Denkweisen und Arbeitsmethoden verwendet, erscheint es wünschenswert, zu Beginn der Oberstufe oder am Ende in einem Rückblick eine mathematisch korrekte Darstellung dieses Aufbaus zu geben.

1.12 Die genetische Methode

Die **genetische Methode** geht von den natürlichen Zahlen aus. Da die Rechenmöglichkeiten mit ihnen begrenzt sind, versucht man, neue Zahlenbereiche zu konstruieren, die diese Grenzen sprengen. Da andererseits aber die natürlichen Zahlen für viele Zwecke das **geeignete** Werkzeug darstellen, sucht man sie zu erhalten. Wenn man also aus einem alten Zahlenbereich zu einem neuen kommen will, so wird man folgende Forderungen stellen.

a) Der alte Zahlenbereich ist Teilmenge des neuen.

b) Der alte Zahlenbereich ist Unterstruktur des neuen.

Die Relationen und Verknüpfungen werden im neuen Bereich so definiert, daß sie für die Elemente des alten als Sonderfall die ursprünglichen Relationen und Verknüpfungen liefern.

c) Das neue System genügt einem umfassenderen System von Strukturaxiomen als das alte.

Im neuen Bereich sind also Aufgaben lösbar, die im alten nicht oder nur beschränkt lösbar waren.

d) Das neue System ist die kleinste Oberstruktur mit diesen Eigenschaften und bis auf Isomorphie eindeutig durch das alte bestimmt.

Dadurch wird also die Vollständigkeit gewährleistet (ALEXANDROFF-MARKUSCHEWITSCH-CHINTSCHIN 1965). Diese Forderungen umfassen das Permanenzprinzip nach H. HANKEL [Bd. 1, I, 1.7]. Das bedeutet jedoch nicht, daß dadurch bereits gesichert ist, daß ein Erweiterungsprozeß mit diesen Eigenschaften Oberhaupt möglich ist. Andererseits geben sie der Methode ihre Richtung.

Bausteine für die Konstruktion von Erweiterungsbereichen können **Sehreibfiguren, Paare, n-Tupel, Folgen** oder ähnliche Objekte sein, die aus den Elementen des alten Bereichs gebildet werden. Schreibfiguren wurden historisch fast immer zuerst verwendet, um eine neue Zahlenart einzuführen. Sie haben den Vorteil, daß bei ihnen die Gleichheit noch nicht festliegt und daß sie leicht der Problemstellung angepaßt werden können, die man mit der Erweiterung bewältigen will. Für ihre Verwendung in der Schule spricht ihre Anschaulichkeit. In der „modernen" Mathematik werden sie häufig abgelehnt oder nur geduldet. Es ist aber nicht so, daß z.B. ganze Zahlen als Mengen von Paaren natürlicher Zahlen aufgefaßt werden müßten, wie häufig argumentiert wird. Schreibfiguren haben dieselbe Berechtigung (PICKERT-GÖRKE 1958, S. 109). Für welche Methode man sich entscheidet, ist eine pädagogische Frage oder eine Frage der Zweckmäßigkeit. In der Schule sollte man also nicht einfach die fast durchweg verwendeten Schreibfiguren aufgeben, nur um zu „modernisieren", vielmehr sollte man den bisher verwendeten Aufbau auf seine Richtigkeit überprüfen.

1.13 Die axiomatische Methode

Die axiomatische Methode hat gegenüber dem genetischen Verfahren den Vorteil der Kürze. Man definiert eine Zahlenmenge durch ein bestimmtes Axiomensystem. Welche Forderungen an ein solches Axiomensystem zu stellen sind, wurde bereits betrachtet [I, 5.52]. Zweckmäßigerweise definiert man zunächst den umfassendsten Zahlbereich, der einen interessiert, und zeichnet dann die anderen Bereiche als Unterstrukturen aus. Untersuchungen, die auf den Axiomen aufbauen, liefern dann die Arithmetik.

So überzeugend das Verfahren auf den ersten Blick wegen seiner Klarheit und Kürze erscheint, birgt es doch für den Aufbau des Zahlensystems Schwierigkeiten. Zunächst ergibt sich das Problem der Charakterisierung. Das wurde schon behandelt [I, 4.8]. Dann stellt sich die Frage nach dem Modell. Zu einem vollständigen axiomatischen Aufbau gehört auch die Angabe eines Modells. Um ein solches für eine Arithmetik zu liefern, muß man aber im wesentlichen die Schritte des genetischen Verfahrens vollziehen.

1.14 Arithmetik und Geometrie

Arithmetik und Geometrie scheinen eng miteinander verbunden zu sein, denn man kann die Arithmetik geometrisch und die Geometrie arithmetisch betrachten. Das darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß es verschiedene Gebiete sind. Freilich ist häufig die Verzahnung so eng, daß sie sich gegenseitig zu bedingen scheinen. Am einschneidendsten zeigt sich das am Cantor-Dedekind-Axiom:

> Liegt auf einer Geraden eine unendliche Folge von Strecken derart, daß jede Strecke ihre Endpunkte innerhalb der vorhergehenden Strecke hat und daß die Längen dieser Strecken gegen null konvergieren, dann gibt es genau einen Punkt, der innerhalb aller dieser Strecken liegt [Bd. 5, II, 1.36].

Um die Sachverhalte klar zu trennen, haben deshalb bereits CANTOR und DEDEKIND jeweils einen von der Geometrie unabhängigen Aufbau der Arithmetik entwickelt. Allerdings sind sie so vorgegangen, daß eine Verbindung mit der Geometrie möglich ist. Sie wählten die Definitionen so, daß schließlich eine geometrische Deutung vorgenommen werden konnte, ohne daß geometrische Eigenschaften in den Aufbau hineingenommen wurden. Damit ist die

Arithmetik in eine bestimmte Richtung gebracht worden, die möglicherweise den Blick für andere sinnvolle Wege verschlossen hat (LAUGWITZ 1965).

Die verschiedenen Aufbaumethoden des Zahlensystems lassen unterschiedliche geometrische Deutungen zu. Wir betrachten eine Zuordnung zwischen den reellen Zahlen und Punkten einer Geraden. Bei der genetischen Methode belegt man nach und nach die Gerade mit immer mehr Zahlen, „bis schließlich alle Punkte besetzt sind“. Bei der axiomatischen Methode betrachtet man dagegen die fertige Zahlengerade. Zahlen lassen sich aber nicht nur als Punkte der Zahlengeraden deuten, sondern auch als Vektoren, Abbildungen und ähnliche Objekte der Geometrie. Sie alle können zur Veranschaulichung von Zahlen dienen oder zur Konstruktion von Zahlen verwendet werden.

1.15 Die pädagogische Aufgabe

Zu Beginn der Oberstufe können die Schüler normalerweise mit den reellen Zahlen praktisch arbeiten. Von der Theorie des Zahlensystems vermittelt der Unterricht bis dahin allenfalls die Grundgedanken. Die Kenntnisse der Schüler werden also im allgemeinen etwas verschwommen sein, ohne daß sie sich dessen bewußt sind. Zunächst muß ihnen durch geeignete Fragen die Notwendigkeit eines nochmaligen, nunmehr gründlich durchdachten Aufbaus des Zahlensystems einleuchten. Es lassen sich leicht Fragen finden, durch die man die Schüler zum Nachdenken über den Zahlbegriff bringen kann.

Beispiele:

a) Welche der Zahlen 1; $\frac{1}{2}$; –1; + 2; 2,3; $3{,}2\overline{57}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{4}$; π; e; $\log_a(a^2)$; lg 2; $\lg\sqrt{2}$; lg 10 sind natürlich, ganz, rational, irrational oder reell?

b) Warum ist das Produkt negativer Zahlen positiv?

e) Häufig hört man: Eine irrationale Zahl ist eine Zahl, die sich nicht als Quotient ganzer Zahlen darstellen läßt. Ist diese Aussage richtig ?

d) Für welche Zahlen hat der Begriff „benachbarte Zahlen“ einen Sinn?
e) Was ist die kleinste positive rationale Zahl?

Wenn sich die Schüler mit solchen Fragen auseinandersetzen, können sie sowohl zum genetischen als auch zum axiomatischen Aufbau des Zahlensystems gelangen. Für welches Verfahren sollte sich der Lehrer entscheiden? Zunächst ist das genetische Verfahren an den historischen Prozeß angelehnt, der durch schrittweise Erweiterungen zu den reellen und komplexen Zahlen führte. Bei diesen Konstruktionen können die Schüler jeweils tatsächlich berechnen, was das Ergebnis einer bestimmten Addition oder Multiplikation ist. Bei dem axiomatischen Verfahren werden die Gesetze angegeben, nach denen zu verfahren ist. Es kann also höchstens dann in der Schule verwendet werden, wenn bereits Kenntnisse für das konkrete Rechnen im Zahlensystem vorliegen. Da es außerdem große Anforderungen an das Abstraktionsvermögen der Schüler stellt, ist es frühestens in der Oberstufe sinnvoll. Dort kann man sich unter Umständen mit praktischen Kenntnissen von früher begnügen. Es bietet sich dann die Möglichkeit, die Schüler in das Wesen der Axiomatisierung und in das Denken in Strukturbegriffen einzuführen. Eine axiomatische Betrachtung sollte auch nicht fehlen, denn beide Betrachtungsweisen gehören zu einem vollständigen Aufbau des Zahlensystems. Führt nämlich die axiomatische Methode bei der Frage nach dem Modell auf die genetische [1.13], so ergibt sich umgekehrt aus der genetischen Methode die Axiomatik, wenn man nämlich untersucht, ob die verschiedenen Konstruktionsverfahren für eine neue Zahlenart (z.B. Dezimalzahlen, Intervallschachtelungen) gleichwertig sind.

Das geistesgeschichtlich natürliche Vorgehen ist also ein genetischer Aufbau, an den sich eine Axiomatik anschließt. Damit ist der Weg in der Schule gewiesen. Das genetische Verfahren wird in der Unter- und Mittelstufe verwendet. Wenn man das als ausreichendes Fundament betrachtet, können auf der Oberstufe axiomatische Betrachtungen einsetzen. Angesichts der üblichen Darstellungen erscheint das, zumindest was den Übergang von rationalen zu reellen Zahlen anbetrifft, problematisch. Mit Hilfe von geometrischen Modellen kann man die Zahlen veranschaulichen und Rechenregeln finden. Von daher könnte man sogar die reellen Zahlen als gegeben ansehen. Der Unterricht hätte dann die Aufgabe, die etwa auf der Zahlengeraden gegebenen reellen Zahlen auf ihre Eigenschaften hin zu untersuchen und den Umgang mit ihnen zu lehren. Am Ende stände dann eine rein axiomatische Betrachtung. Es würde sich hierbei vorwiegend um das Aufspüren vorgegebener Sachverhalte handeln. Beim arithmetischen Aufbau ist aber gerade die Freiheit der eigenen Definitionen und Konstruktionen, die lediglich durch gewisse Zweckmäßigkeitsforderungen begrenzt wird, ein wesentliches Kennzeichen. Ein solcher rein arithmetischer Aufbau, bei dem die geometrischen Modelle nur der Veranschaulichung, allenfalls der Heuristik dienen, wäre auch für die Schule reizvoll. Dem stehen allerdings ziemliche begriffliche und formale Schwierigleiten entgegen, zumindest was die Unter- und Mittelstufe betrifft. So wird es wohl vorerst bei einem Kompromiß bleiben, bei dem sich Arithmetik und Geometrie in der Methode ergänzen. Erst auf der Oberstufe dürfte eine begriffliche Trennung möglich sein, ohne daß man darauf verzichtet, Gemeinsamkeiten hervorzuheben. Gerade die modernen strukturellen Betrachtungen sind dazu ja besonders geeignet. In der Unter- und Mittelstufe wird man daher die Behandlung des Zahlensystems an der Genese des Zahlbegriffs orientieren, wobei aus psychologischen Gründen bewußt zunächst gegenständliche Bezüge und anschauliche Einsichten angestrebt werden. Nach wie vor sollte ein sicherer Umgang mit den reellen Zahlen angestrebt werden.

In der Oberstufe ist die historische Genese des Zahlbegriffs von kulturgeschichtlichem Interesse, pädagogisch wirksam wird sie als Problemgeschichte. Daneben ergibt sich aber auch die eigentlich mathematische Aufgabe, den Zahlbegriff in das System der Mathematik einzuordnen. Dabei sollte man immer vor Augen haben, daß diese Denkweisen jeden geistig Interessierten angehen. Die Fragen der mathematischen Existenz, der mathematischen Wahrheit, der Zweckmäßigkeit und des Sinns mathematischer Definitionen und Vereinbarungen sind letztlich philosophische Fragen, die auf die Stellung der Mathematik in den Wissenschaften hinzielen.

Die geometrischen Modelle sind bereits an anderer Stelle [Bd. 1, I] ausführlich behandelt worden, was die philosophischen Fragen angeht, sei auf [Bd. 5, III] verwiesen.

1.2 Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen

1.21 Struktur und Axiomatik natürlicher Zahlen

Eine Theorie der natürlichen Zahlen hat ihre bekannten arithmetischen Eigenschaften zu begründen. Axiomatisch geschieht das, indem man eine Anzahl richtiger arithmetischer Sätze angibt, aus denen man alle anderen ableiten kann. Es haben sich die Axiomensysteme von G. PEANO und E. SCHMIDT eingebürgert.

a) Die Peano-Axiome.

Die Menge der natürlichen Zahlen hat die Eigenschaften [I, 5.52]:

(1) 1 ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl a hat einen bestimmten Nachfolger a' in dieser Menge.

(3) Es ist stets $a' \neq 1$.

(4) Aus $a' = b'$ folgt $a = b$.

(5) Jede Menge von natürlichen Zahlen, welche die Zahl 1 und welche zu jeder Zahl a, die sie enthält auch deren Nachfolger a' enthält, enthält alle natürlichen Zahlen [Bd. 1, I, 1.13].

b) Die Schmidt-Axiome.

Die geordnete Menge der natürlichen Zahlen hat die Eigenschaften:

(1) Die Menge ist wohlgeordnet.

(2) Bis auf das erste Element hat jedes Element einen Vorgänger.

(3) Die Menge hat kein letztes Element [Bd. 1, I, 1.13].

Bei beiden fällt auf, daß in ihnen die Rechenoperationen nicht erwähnt werden. Sie werden vielmehr erst durch rekursive Definitionen eingeführt [Bd. 1, I, 1.72]. Unter Verwendung der Axiome ergeben sich dann die bekannten Eigenschaften der natürlichen Zahlen.

Es ist nicht schwer, den Schülern diese Axiome plausibel zu machen. Die Schwierigkeit liegt vielmehr im Übergang von ihnen zu den Rechenregeln. In der Schule wird man darauf verzichten müssen. Man wird sich damit begnügen, die natürlichen Zahlen mit ihren Verknüpfungen als bekannt vorauszusetzen und gewisse Rechenregeln als Grundregeln zu formulieren. Vom strukturellen Gesichtspunkt werden solche interessieren, die bei den Erweiterungen des Zahlensystems im wesentlichen erhalten bleiben. Auf Unabhängigkeit und Vollständigkeit legen wir hier keinen Wert.

Bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, a, b, c, d seien beliebige Elemente von $\mathbb{N}$, dann betrachten wir folgende Grundregeln:

Existenzgesetze:

(Exa) $a+b \in \mathbb{N}$.

(Exm) $a \cdot b \in \mathbb{N}$.

Eindeutigkeitsgesetze:

(Ea) $a = c \wedge b = d \Rightarrow a + b = c + d$.

(Em) $a = c \wedge b = d \Rightarrow a \cdot b = c \cdot d$.

Assoziativgesetze:

(Aa) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(Am) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Kommutativgesetze:

(Ka) $a + b = b + a$.

(Km) $a \cdot b = b \cdot a$.

Kürzungsregeln:

(Küa) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

(Küm) $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$.

Distributivgesetz:

(D) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Man könnte auch noch die Ordnung der natürlichen Zahlen in das System der Grundregeln aufnehmen. Andererseits läßt sie sich leicht aus den Axiomen gewinnen. Man braucht nur zu definieren

$$a < b \Leftrightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} a + n = b.$$

Man beweist dann sofort die

Monotoniegesetze:

(Ma) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.

(Mm) $a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

$\mathbb{N}$ erweist sich damit als regulärer kommutativer Halbring, der sich anordnen läßt [I, 3.24]. Man erhält hier die Möglichkeit, eine reizvolle, einfach zu überschauende Theorie zu entwickeln, die zahlreiche Querverbindungen gestattet.

Man sollte es nicht versäumen, im Unterricht nachweisen zu lassen, daß sich die üblichen Umformungsaufgaben der Mittelstufenalgebra mit diesen Regeln bewältigen lassen.

Übungen: Man beweise jeweils unter Angabe der verwendeten Regeln
a) $(a + b) + c = (c + a) + b$,
b) $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a(b + c) \in \mathbb{N}$,
c) $a(b + c)$ ist für $a, b, c \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt.
d) $a(b + c) = ba+ca$,
e)$a(b+c) =a(b+d) \Rightarrow c = d$.
f)$a < a+b$,
g) Gilt $a<ab$?
h) $a < b \Rightarrow a+c < b+c$,
i) $a < b \Leftrightarrow ac < bc$,
j) $a < b \Rightarrow a < b +c$,
k) $a < b \wedge c < d \Rightarrow a +c < b +d$,
l) $a < b \Rightarrow a \neq b$,
m) $a < b < c \Rightarrow ac < bc \wedge ab< ac \wedge ab< bc$.
n) Erläutere den Unterschied zwischen Grundregeln und abgeleiteten Regeln.
o) Deute Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen geometriseh (Strecke, Vektor, Rechteck-Fläche) und veranschauliche die Rechenregeln.

1.22 Differenzen

Wir suchen zunächst eine Erweiterung von $\mathbb{N}$, in der

(l.22α) $a + x = b$

ausnahmslos lösbar ist. Wir orientieren uns an den Forderungen a) bis d) [1.12]. Um b) zu befriedigen, untersuchen wir zunächst das Rechnen in $\mathbb{N}$, das für unsere Aufgabe wichtig ist. In gewissen Fällen existiert ja eine Lösung von (1.22α). Nach 1.21 ist das genau dann der Fall, wenn $a < b$. In diesem Fall ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Seien nämlich d und d' aus $\mathbb{N}$ Lösungen von (1.22α), dann folgt

$$a +d =b \wedge a +d' = b \Rightarrow a +d = a +d' \Rightarrow d = d'.$$

Man schreibt für die eindeutig bestimmte Lösung $d =_{\text{Def}} b - a$. d heißt **Differenz** von b und a.

Wir untersuchen nun das Rechnen mit Differenzen. Seien also $d_1 = b_1 - a_1$ und

$d_2 = b_2 - a_2$ Differenzen natürlicher Zahlen.

a) Gleichheit:

(1.22β) $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 \Leftrightarrow b_l + a_2 = b_2 + a_1$

Beweis: $d_1 = b_1 - a_1 \Rightarrow a_l + d_1 = b_l \quad \Rightarrow \quad b_1 + b_2 = (a_l + d_l) + b_2$

$d_2 = b_2 - a_2 \Rightarrow a_2 + d_2 = b_2 \quad \Rightarrow \quad b_l + b_2 = b_l + (a_2 + d_2)$

$\Rightarrow b_l + (a_1 + d_2) = (a_1 + d_l) + b_2 \Rightarrow (b_1 + a_2) + d_2 = (b_2 + a_1) + d_1$

Aus dieser Beziehung liest man ab:

$b_l + a_2 = b_2 + a_l \Rightarrow d_1 = d_2, \qquad d_1 = d_2 \Rightarrow b_l + a_2 = b_2 + a_l$

b) Summe:

(1.22γ) $(b_l - a_l) + (b_2 - a_2) = (b_l + b_2) - (a_l + a_2)$

Beweis: $d_l = b_1 - a_l \Rightarrow a_l + d_1 = b_l$

$d_2 = b_2 - a_2 \Rightarrow a_2 + d_2 = b_2$

$\Rightarrow (a_l + d_1) + (a_2 + d_2) = b_l + b_2$

$\Rightarrow (a_l + a_2) + (d_1 + d_2) = b_l + b2$

$\Rightarrow d_l + d_2 = (b_1 + b_2) - (a_l + a_2)$

e) Produkt:

(1.22δ) $(b_l - a_l)(b_2 - a_2) = (b_l b_2 + a_1 a_2) - (b_l a_2 + a_l b_2)$

Beweis: $d_1 = b_l - a_1 \Rightarrow a_l + d_1 = b_l$

$d_2 = b_2 - a_2 \Rightarrow a_2 + d_2 = b_2$

$\Rightarrow (a_1 + d_1)(a_2 + d_2) = b_l b_2$

$$\Rightarrow \quad (a_1a_2 + d_1a_2) + (a_ld_2 + d_1d_2) = b_1b_2$$

$$\Rightarrow \quad (a_1a_2 + d_1a_2) + (a_la_2 + a_l\, d_2) + d_1d_2 = b_lb_2 + a_l\, a_2$$

$$\Rightarrow \quad (a_l + d_l)a_2 + a_l\,(a_2 + d_2) + d_1d_2 = b_l\, b_2 + a_1\, a_2$$

$$\Rightarrow \quad (b_1a_2 + a_lb_2) + d_1d_2 = b_1b_2 + a_la_2$$

$$\Rightarrow \quad d_1d_2 = (b_l - a_l)(b_2 - a_2) = (b_lb_2 + a_la_2) - (b_la_2 + a_1b_2)$$

1.23 Konstruktion ganzer Zahlen

Erstes Verfahren: Die Aussagen (1.22β bis δ) haben nur dann einen Sinn, wenn die Differenzen existieren. Um nun die Gleichung a + x = b **immer** lösen zu können, bilden wir Schreibfiguren b – a aus beliebigen natürlichen Zahlen, wir nennen sie **ganze Zahlen** und bezeichnen die Menge der ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z}$. Dabei ist zu beachten, daß sie bisher noch keinen Sinn haben. Insbesondere ist noch nicht gesagt, ob sie im Sonderfall die Bedeutung von Differenzen haben. Das ändert sich, wenn wir Gleichheit, Addition und Multiplikation definieren. Wir können hoffen, ein sinnvolles Ergebnis zu erhalten, wenn wir die Definitionen gemäß den Eigenschaften von Differenzen formulieren. Wir definieren also

(1.23α) $b_1 - a_l = b_2 - a_2 \Leftrightarrow_{Def} b_l + a_2 = b_2 + a_l$,

(1.23β) $(b_l - a_l) + (b_2 - a_2) =_{Def} (b_l + b_2) - (a_l + a_2)$

(1.23γ) $(b_l - a_l)(b_2 - a_2) =_{Def} (b_1b_2 + a_1a_2) - (b_1a_2 + a_1b_2)$.

Wir müssen jetzt prüfen, ob diese Definitionen vernünftig sind.

Durch (1.23α) ist eine Relation mit den typischen Eigenschaften einer Gleichheit definiert.

Reflexivität: b + a = b + a ⇒ b – a = b – a.

Symmetrie: $b_l - a_1 = b_2 - a_2 \Rightarrow b_l + a_2 = b_2 + a_l$

$$\Rightarrow \quad b_2 + a_l = b_l + a_2 \Rightarrow b_2 - a_2 = b_l - a_l\ .$$

Transitivität: $b_l - a_l = b_2 - a_2 \wedge b_2 - a_2 = b_3 - a_3$.

$$\Rightarrow b_1 + a_2 = b_2 + a_l \wedge b_2 + a_3 = b_3 + a_2$$

$$\Rightarrow (b_l + a_2) + (b_2 + a_3) = (b_2 + a_l) + (b_3 + a_2)$$

$$\Rightarrow (b_l + a_3) + (a_2 + b_2) = (b_3 + a_1) + (a_2 + b_2)$$

$$\Rightarrow b_l + a_3 = b_3 + a_1 \Rightarrow b_1 - a_l = b_3 - a_3.$$

(6.23β) definiert eine Verknüpfung, denn die Summe zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl. Sie ist eindeutig bestimmt.

Beweis der Eindeutigkeit:

$$b_1 - a_1 = b_2 - a_2 \wedge d_1 - c_l = d_2 - c_2$$

$$\Rightarrow \quad b_l + a_2 = b_2 + a_l \wedge d_l + c_2 = d_2 + c_1$$

$$\Rightarrow \quad (b_l + a_2) + (d_l + c_2) = (b_2 + a_l) + (d_2 + c_1)$$

$$\Rightarrow \quad (b_l + d_1) + (a_2 + c_2) = (b_2 + d_2) + (a_l + c_1)$$

$$\Rightarrow \quad (b_l + d_1) - (a_1 + c_l) = (b_2 + d_2) - (a_2 + c_2)$$

$$\Rightarrow \quad (b_1 - a_1) + (d_1 - c_l) = (b_2 - a_2) + (d_2 - c_2)$$

Für die Addition gelten also auch in $\mathbb{Z}$ die Gesetze der Existenz und Eindeutigkeit. Sie sind ebenfalls für die Multiplikation erfüllt.

Beweis der Eindeutigkeit:

$$b_1 - a_1 = b_2 - a_2 \wedge d_1 - c_l = d_2 - c_2$$

$$\Rightarrow \quad b_l + a_2 = b_2 + a_l \wedge d_l + c_2 = d_2 + c_1$$

$$\Rightarrow \quad (b_1 + a_2)\, d_l + (b_2 + a_1)c_1 = (b_2 + a_1)d_1 + (b_l + a_2)c_l$$

$$\wedge \qquad (d_1 + c_2)b_2 + (d_2 + c_1)a_2 = (d_2 + c_1)b_2 + (d_1 + c_2)a_2$$

$$\Rightarrow \qquad b_1 d_1 + a_2d_1 + b_2c_1 + a_1c_1 = b_2d_1 + a_1d_1 + b_1c_1 + a_2c_1$$

$$\wedge \qquad d_1b_2 + c_2b_2 + d_2a_2 + c_1a_2 = d_2b_2 + c_1b_2 + d_1a_2 + c_2a_2$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1d_1 + a_1c_1) + (b_2c_2 + a_2d_2) + (a_2d_1 + b_2d_1 + a_2c_1)$$

$$= (b_2d_2 + a_2c_2) + (b_1c_1 + a_1d_1) + (a_2d_1 + b_2d_1 + a_2c_1 + b_2c_1)$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1d_1 + a_1c_1) + (b_2c_2 + a_2d_2) = (b_2d_2 + a_2c_2) + (b_1c_1 + a_1d_1)$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1d_1 + a_1c_1) - (b_1c_1 + a_1d_1) = (b_2d_2 + a_2c_2) - (b_2c_2 + a_2d_2)$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1 - a_1)(d_1 - c_1) = (b_2 - a_2)(d_2 - c_2)$$

Auch die Assoziativgesetze, die Kommutativgesetze und das Distributivgesetz gelten in $\mathbb{Z}$. Damit $\mathbb{Z}$ Erweiterungsbereich von $\mathbb{N}$ wird, muß man es noch so einrichten, daß gewisse ganze Zahlen mit natürlichen Zahlen identifiziert werden.

Die bisherigen Definitionen legen es nahe, der ganzen Zahl $b - a$ den alten Sinn als Differenz d zu geben, falls $a + d = b$ für $a, b, d \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $b - a = (a + d) - a$ wird man $(a + d) - a$ mit d identifizieren. Damit ist Forderung a) [1.2] erfüllt. Durch die Definitionen [1.23 α bis γ] ist es ferner so eingerichtet, daß Forderung b) [l.12] erfüllt ist.

Die ganzen Zahlen leisten auch mehr als die natürlichen. Für beliebige ganze Zahlen $g_1 = b_1 - a_1$ und $g_2 = b_2 - a_2$ ist nämlich die Gleichung $g_1 + x = g_2$ lösbar.

Beweis: Nehmen wir dazu an, es existiere eine ganzzahlige Lösung $x = x_2 - x_1$, so folgt

$$(b_1 - a_1) + (x_2 - x_1) = b_2 - a_2$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1 + x_2) - (a_1 + x_2) = b_2 - a_2$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1 + x_2) + a_2 = b_2 + (a_1 + x_2)$$

$\Rightarrow \qquad (b_1 + a_2) + x_2 = (b_2 + a_1) + x_1$

$\Rightarrow x_2 - x_1 = (b_2 + a_l) - (b_1 + a_2).$

$x = (b_2 + a_l) - (b_1 + a_2)$ ist aber auch eine Lösung, denn

$$(b_l - a_1) + ((b_2 + a_1) - (b_l + a_2)) = (b_1 + (b_2 + a_l)) - (a_1 + (b_1 + a_2))$$

$$= (b_2 + (b_1 + a_2)) - (a_2 + (b_1 + a_1)) = b_2 - a_1.$$

Damit ist auch Forderung c) [l.12] erfüllt.

$\mathbb{Z}$ stellt einen kommutativen Ring dar, der $\mathbb{N}$ als Halbring umfaßt [I, 3.24]. Jeder Unterring von $\mathbb{Z}$, der $\mathbb{N}$ umfaßt, muß alle Differenzen aus natürlichen Zahlen enthalten. Nun läßt sich aber jedes Element von $\mathbb{Z}$ als Differenz natürlicher Zahlen schreiben, denn im Sonderfall $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$, erhalten wir die Lösung $x = b - a$. $\mathbb{Z}$ besitzt also keinen echten Unterring, der $\mathbb{N}$ als Halbring umfaßt, Forderung d) [1.12] ist demnach ebenfalls erfüllt.

Doch nicht alle Rechenregeln von $\mathbb{N}$ gelten auch in $\mathbb{Z}$. Für die Multiplikation folgt aus $gk = hk$ für $g, h, k \in \mathbb{Z}$ nicht notwendig $g = h$. Das Nullelement

$$0 =_{\text{Def}} a - a$$

hat nämlich die Eigenschaft $0 \cdot g = 0$ für alle $g \in \mathbb{Z}$, so daß nur für $k \neq 0$ aus $gk = hk$ folgt $g = h$. Die Kürzungsregel muß also für die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ eingeschränkt werden.

Schon oben hatten wir $(a + d) - a = d$ für $a, d \in \mathbb{N}$ geschrieben. Wir ergänzen:

$$a - (a + d) =_{\text{Def}} - d.$$

Die natürliche Zahl d schreibt man häufig auch als spezielle ganze Zahl in der Form $+ d$. Zahlen der Art von $+ d$ nennt man **positive** Zahlen der Art von $- d$ nennt man negative ganze Zahlen. $\mathbb{Z}$ besteht also aus den positiven ganzen Zahlen, den negativen ganzen Zahlen und der Zahl null (Abb. 1.23 a).

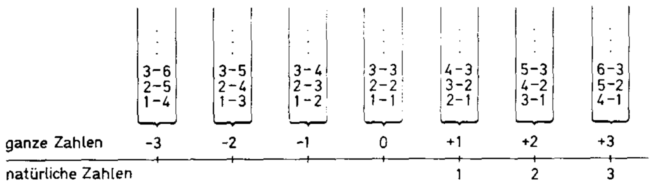


Abb. 1.23a Ganze Zahlen

Die positiven ganzen Zahlen sind nach unserer Konstruktion mit den natürlichen identisch. Man kann darüber jedoch auch anderer Ansicht sein (Russell o.J.).

Die natürlichen Zahlen haben als positive ganze Zahlen die Eigenschaften:

$$0 \notin \mathbb{N},$$

$$a \in \mathbb{Z} \wedge 0 \neq a \notin \mathbb{N} \Rightarrow -a \in \mathbb{N},$$

$$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N},$$

$$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

$\mathbb{N}$ ist also **Positivbereich** von $\mathbb{Z}$ (PICKERT-GÖRKE 1958). (Er ist übrigens der einzige.) In $\mathbb{Z}$ ist eine Anordnung möglich, man braucht nur zu definieren

(1.23 δ) $$a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N} (a, b \in \mathbb{Z}).$$

Diese Anordnung stimmt für natürliche Zahlen mit der alten überein.

Übungen:

a) $g + 0 = g$ für alle $g \in \mathbb{Z}$.

b) $g \cdot 0 = 0$ für alle $g \in \mathbb{Z}$.

c) $g \cdot h = 0 \Rightarrow g = 0 \vee h = 0,\ g \in \mathbb{Z}$.

d) $(b - a) + (a - b) = 0$ für $a, b \in \mathbb{N}$.

e) $(+n)(-m) = -nm$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

f) $(-n)(-m) = +nm$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

g) $0 < g \Rightarrow -g < 0$.

h) $g \neq 0 \Rightarrow 0 < g^2$.

i) $g < h \wedge c < 0 \Rightarrow hc < gc$.

j) Mit welchen Nachteilen müssen die Vorteile des Rechnens in $\mathbb{Z}$ gegenüber dem Rechnen in $\mathbb{N}$ erkauft werden?

k) Weshalb sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig, obwohl $\mathbb{N}$ echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist?

l) Vergleiche 0 bezüglich der Addition mit 1 bezüglich der Multiplikation (neutrales Element).

1.24 *Andere Konstruktionen*

Zweites Verfahren: Man kann die am Schluß von [1.23] eingeführte Schreibweise für ganze Zahlen auch zum Ausgang der Konstruktion wählen. Dazu schreibt man zunächst für die natürliche Zahl $n =_{\text{Def}} +n$. Man führt nun neue Schreibfiguren 0 und $-n$ ein. So erhält man eine Menge, die aus 0, mit + versehenen natürlichen Zahlen und mit – versehenen natürlichen Zahlen besteht. Für die Gleichheit definieren wir

$$0 = 0, \ \ +n = +m \Leftrightarrow n = m, \ \ -n = -m \Leftrightarrow n = m.$$

Es wird eine Addition definiert durch

$$0 + 0 = 0, (+n) + 0 = 0 + (+n) = +n, (-n) + 0 = 0 + (-n) = -n,$$

$$(+n) + (+n) = (m + n), \ \ (-m) + (-n) = -(m + n),$$

$$(+m) + (-n) = (-n) + (+m) = \begin{cases} +(m-n), & \text{falls} \quad m - n \in N \\ 0, & \text{falls} \quad m = n \\ -(n-m), & \text{falls} \quad n - m \in N \end{cases}$$

Die Multiplikation wird definiert durch

$$0 \cdot 0=0,\ (+n) \cdot 0 = 0 \cdot (+n) = 0,\ (-n) \cdot 0 = 0 \cdot (-n) = 0,$$

$$(+m)\cdot(+n)= +mn,\ (-m)\cdot(-n) = +mn,\ (+m)\cdot(-n) = (-n)\cdot(+m) = -mn.$$

Dieser Weg ist wegen der nötigen Fallunterscheidungen bei den Beweisen der Rechenregeln recht mühsam. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß je nach dem verwendeten Konstruktionsverfahren z.B. $(+m)\cdot(-n) = -mn$ beweisbare Regel [1.23] oder Definition (s. oben) ist.

Drittes Verfahren: Läßt man bei den Konstruktionen nur Paare oder ähnliche Gebilde zu, so kann man $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bilden und in der Menge der geordneten Paare eine geeignete Äquivalenzrelation einfuhren. Man definiert etwa in Anlehnung an das erste Verfahren

$$(b_1, a_1) \sim (b_2, a_2) \Leftrightarrow_{Def} b_1 + a_2 = b_2 + a_1.$$

Diese Äquivalenzrelation bewirkt eine Klasseneinteilung in $\mathbb{N}x\mathbb{N}$. Für die Klassen $\overline{(b_1,a_1)}$, $\overline{(b_2,a_2)}$ definiert man

$$\overline{(b_1,a_1)} + \overline{(b_2,a_2)} =_{Def} \overline{(b_1+b_2, a_1+a_2)}$$
$$\overline{(b_1,a_1)} \cdot \overline{(b_2,a_2)} =_{Def} \overline{(b_1b_2+a_1a_2, b_1a_2+a_1b_2)}$$

Damit ergibt sich die Menge der Äquivalenzklassen als Ring, der eine zu (N,+,·) isomorphe Unterstruktur enthält. Durch isomorphe Einbettung von N erhält man dann den Ring der ganzen Zahlen.

Viertes Verfahren: Auch das zweite Verfahren läßt sich mit Hilfe des Paarbegriffs entwickeln. Man braucht nur die Zahlenpaare $(n + 1, 1)$ aus $\mathbb{N}x\{1,2\}$ mit den natürlichen Zahlen n und die Zahlenpaare $(n, 2)$ mit $-n$ zu identifizieren, für $(1, 1)$ schreibt man 0, so daß man wieder zu $\mathbb{Z}$ gelangt, wenn man die Verknüpfung analog definiert (LENZ 1961).

Neben diesen genannten Verfahren lassen sich beliebig viele gleichwertige entwickeln (ACKERMANN 1961/62).

Der Erweiterungsprozeß, der von ℕ zu ℤ führte, bedeutet – strukturell gesehen – die Konstruktion des kleinsten Integritätsbereichs [I, 3.24], der den regulären Halbring der natürlichen Zahlen umfaßt. Das Verfahren läßt sich verallgemeinern. Durch analoge Betrachtungen erhält man das Ergebnis:

Jeder Halbring läßt sich in einen Ring einbetten.

Der kleinste Ring, der einen gegebenen Halbring umfaßt, heißt **Differenzenring** (REDEI 1959). ℤ ist Differenzenring von ℕ.

1.25 *Struktur und Axiomatik der ganzen Zahlen*

Die verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten für ganze Zahlen führen auf die Frage, ob die Ergebnisse gleichwertig sind. Da die verwendeten Konstruktionselemente verschieden sind, wird man höchstens eine Übereinstimmung der erhaltenen Systeme im Sinne der Isomorphie erwarten können. Daß eine solche Isomorphie vorliegt, kann man in jedem einzelnen Fall durch Angabe des Isomorphismus nachweisen. Kennt man ein monomorphes Axiomensystem für die ganzen Zahlen, so braucht man bei dem jeweils gefundenen Zahlenbereich nur zu untersuchen, ob er ein Modell des Axiomensystems ist. Wir geben einige geeignete Axiomensysteme für ℤ an, die äquivalent und in der Sprache der Logik monomorph sind.

a) ℤ ist ein minimaler angeordneter Ring mit Einselement (ASSER 1955).

b) ℤ ist ein minimaler Ring, der die Menge der natürlichen Zahlen als Unterstruktur enthält (ALEXANDROFF-MARKUSCHEWITSCH-CHINTSCHIN 1965).

c) (PEANO)

$0 \in \mathbb{Z}$

Zu jedem $g \in \mathbb{Z}$ gibt es genau einen Nachfolger $g' \in \mathbb{Z}$.

Die Zahl 0 ist von allen ihren sukzessiven Nachfolgern verschieden.

Zu jeder ganzen Zahl gibt es genau einen Vorgänger.

Die Menge der ganzen Zahlen ist die kleinste Menge, die die Zahl 0 und mit einer ganzen Zahl ihren Nachfolger und ihren Vorgänger enthält (Asser 1955).

d) $\mathbb{Z}$ ist eine nicht leere geordnete Menge mit den Eigenschaften

$\mathbb{Z}$ hat kein letztes Element.

Jeder Abschnitt von $\mathbb{Z}$ ist wohlgeordnet.

Jedes Element von $\mathbb{Z}$ hat genau einen Vorgänger (MESCHKOWSKI 1964).

Die in diesen Axiomensystemen verwendeten Begriffe sind in der angegebenen Literatur erläutert.

1.26 Methodisches und Didaktisches

In der Unterstufe wird man, wenn überhaupt, die ganzen Zahlen durch mit Vorzeichen versehene natürliche Zahlen darstellen [Bd. 1, I, 8.1]. Man wird sich auf die Einführung beschränken, ohne schon die Verknüpfungen zu definieren.

In der Mittelstufe müssen dann die Rechenregeln entwickelt werden. Wesentlich ist, daß die Schüler erkennen, daß Gleichheit, Summe und Produkt definiert werden müssen. Um zu sinnvollen Definitionen zu gelangen, läßt man sich in heuristischen Überlegungen vom Permanenzprinzip leiten. Die Rechenregeln werden dann bewiesen. Zu geeigneten Definitionen kann man durch Rechenfolgen [Bd. 1, I, 8.22], Rechnen mit Differenzen oder geometrischen Modellen kommen. Dabei ist immer der heuristische Charakter dieser Überlegungen zu betonen. Eine schwerwiegende Entscheidung ist die Wahl der Darstellung ganzer Zahlen. Wir wollen die vier betrachteten Verfahren diskutieren. Für die Mittelstufe kommt das vierte Verfahren wegen der großen Abstraktheit und Willkür nicht in Frage. Auch das dritte Verfahren ist recht abstrakt und muß an das erste angelehnt werden, damit die Definitionen motiviert werden können. So bleiben die beiden ersten Methoden. Die erste knüpft an das Rechnen mit Gleichungen an, es lassen sich durch parallele Überlegungen die rationalen Zahlen konstruieren, zudem kann an entsprechende Überlegungen der Bruchrechnung angeknüpft werden. Nachteilig ist die unterschiedliche Bedeutung von b – a als Differenz und Schreibfigur. Doch ist das nur während der Konstruktion bedeutsam, beim praktischen Rechnen treten dann die Unterschiede nicht mehr in Erscheinung. Schließlich wird man in der Schule nicht alle Rechenregeln beweisen, da die Schüler damit überfordert wären. Man wird sich häufig mit Erläuterungen durch Beispiele begnügen müssen. Man sollte aber in einer Bilanz die geltenden Regeln übersichtlich zusammenstellen. die eine algebraische Charakterisierung der ganzen Zahlen gestatten. Ob dabei schon in der Mittelstufe die Strukturbegriffe genannt werden sollten, ist umstritten. Beim zweiten Verfahren ist die Darstellung etwas durchsichtiger, die Definitionen der Verknüpfungen sind wegen der vielen Fallunterscheidungen etwas aufwendig, sie reichen aber für das praktische Rechnen durch die vereinfachte Darstellung der Zahlen weiter. Die Beweise der Rechenregeln sind jedoch so umfangreich, daß sie auf diesem Wege in der Schule nicht gegeben werden können. Der Vorteil der übersichtlichen Schreibweise wird damit erkauft, daß + und – unterschiedlich als Vorzeichen und Rechenzeichen verwendet werden. Für die Schule ist vielleicht eine Kombination der Verfahren am zweckmäßigsten. Man untersucht zunächst Gleichheit, Summe und Produkt von Differenzen, definiert dann entsprechend Gleichheit, Summe und Produkt von Schreibfiguren b – a oder Paaren (b, a), formuliert und beweist anschließend die strukturell wichtigen Rechenregeln und fährt schließlich die bequeme Vorzeichenschreibweise ein, mit der beim praktischen Rechnen gearbeitet wird. Eine Zusammenstellung der „Vorzeichenregeln“ sollte dabei nicht fehlen.

In der Oberstufe wird man die Menge der ganzen Zahlen strukturell betrachten, sie kann als Modell oder zur Motivation der Begriffe **Gruppe, Modul, Ring** und **Integritätsbereich** dienen, wobei der letzte Begriff vom Wort her direkt an die ganzen Zahlen anknüpft. Auch bei einer lediglich axiomatischen Betrachtung der ganzen Zahlen sollte man auf die mathematisch wichtigen Schritte des Konstruktionsverfahrens hinweisen: Untersuchung des lösbaren Sonderfalls – Definition des Erweiterungsbereichs – Beweis der Rechengesetze – Wahl einer möglichst einfachen Darstellung [Bd. 1, I, 8.42]. Das setzt allerdings eine sachgerechte Behandlung auf der Mittelstufe voraus.

1.3 Von den ganzen zu den rationalen Zahlen

1.31 Quotienten

$\mathbb{Z}$ war als Erweiterungsbereich von $\mathbb{N}$ konstruiert worden, um die Gleichung $a + x = b$ immer lösen zu können. Die entsprechende Gleichung für die Multiplikation

(1.3lα) $$a \cdot x = b$$

ist aber auch in $\mathbb{Z}$ noch nicht immer lösbar. Wieder sucht man einen leistungsfähigen Erweiterungsbereich. Wegen der Ähnlichkeit der Aufgabenstellung wird man analog zur Konstruktion von $\mathbb{Z}$ vorgehen. Ist $a = 0$, so ist jedes Element von $\mathbb{Z}$ Lösung, falls gleichzeitig $b = 0$ ist, da für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $0 \cdot x = 0$. Für den Fall $a = 0$, $b \neq 0$ werden wir auf den Versuch einer Erweiterung verzichten, da wir mit 0 einheitlich rechnen wollen. Wir betrachten nun den Fall $a \neq 0$. Wenn dann eine Lösung von (1.31α) existiert, so ist sie eindeutig bestimmt.

Seien nämlich q und q' aus ℤ Lösungen von(1.3lα), dann folgt

$aq=b \wedge aq'=b \Rightarrow aq = aq' \Rightarrow q = q'$.

Wir schreiben für die eindeutig bestimmte Lösung $q =_{\text{Def}} \frac{b}{a}$, q heißt **Quotient** von b und a. Zunächst untersuchen wir das Rechnen mit Quotienten.

a) Gleichheit:

(1.31β) $$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Leftrightarrow b_1a_2 = b_2a_1$$

Beweis: $$q_1 = \frac{b_1}{a_1} \wedge q_2 = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow a_lq_1 = b_l \wedge a_2q_2 = b_2$$

$$\Rightarrow (a_lq_1) = b_l\, b_2 \wedge b_1(a_2q_{2)} = b_1b_2$$

$$\Rightarrow (b_2a_l)\, q_1 = (b_1a_2)q_2.$$

Daraus kann man ablesen:

$q_1 = q_2 \Leftrightarrow b_1a_2 = b_2a_l$, falls $q_1 \neq 0$ und $q_2 \neq 0$.

Anderenfalls $q_1 = q_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = b_la_2 = b_2a_l$.

b) Summe:

(1.31γ) $$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1a_2 + b_2a_1}{a_1a_2}$$

Beweis: $$q_1 = \frac{b_1}{a_1} \wedge q_2 = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow a_lq_1 = b_l \wedge a_2q_2 = b_2$$

$\Rightarrow \quad (a_1q_1)a_2 = b_1a_2 \wedge (a_2q_2)a_1 = b_2a_1$

$\Rightarrow \quad b_1a_2 + b_2a_1 = a_1a_2(q_1 + q_2)$

$\Rightarrow \quad q_1 + q_2 = \dfrac{b_1a_2 + b_2a_1}{a_1a_2}$.

c) Produkt:

(1.31δ) $\quad \dfrac{b_1}{a_1} \cdot \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_1b_2}{a_1a_2}$

Beweis: $\quad q_1 = \dfrac{b_1}{a_1} \wedge q_2 = \dfrac{b_2}{a_2} \Rightarrow a_1q_1 = b_1 \wedge a_2q_2 = b_2$

$\Rightarrow \quad (a_1q_1)(a_2q_2) = b_1b_2 \Rightarrow (a_1a_2)(q_1 q_2) = b_1b_2$

$\Rightarrow \quad q_1q_2 = \dfrac{b_1b_2}{a_1a_2}$,

1.32 Konstruktion rationaler Zahlen

Erstes Verfahren: Wir erhoffen nun wieder eine Lösung unserer Aufgabe, indem wir Schreibfiguren $\dfrac{b}{a}$ betrachten, die aus ganzen Zahlen $a \neq 0$ und b gebildet werden. Nach den Ergebnissen (1.31β bis δ) nehmen wir folgende Definitionen für Gleichheit, Summe und Produkt solcher Schreibfiguren.

(1.32α) $\quad \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} \Leftrightarrow_{\text{Def}} b_1a_2 = b_2a_1$

(1.32β) $$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2} =_{Def} \frac{b_1a_2+b_2a_1}{a_1a_2}$$

(1.32γ) $$\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2} =_{Def} \frac{b_1b_2}{a_1a_2}$$

Wir setzen dabei voraus, daß in den Schreibfiguren $\frac{b}{a}$ immer $a \neq 0$ ist. Wir werden nicht immer wieder darauf hinweisen. Diese Schreibfiguren nennen wir **rationale Zahlen**, die Menge der rationalen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}$. Wieder gilt es zu prüfen, ob die Definitionen sinnvoll sind, d.h. ob dadurch ein Erweiterungsbereich von $\mathbb{Z}$ konstruiert ist, der die Forderungen a) bis d) [1.12] erfüllt.

Durch (1.32α) ist eine Relation mit den typischen Eigenschaften einer Gleichheit definiert.

Reflexivität: $ba = ba \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{b}{a}$

Symmetrie: $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2} \Rightarrow b_1a_2 = b_2a_1 \Rightarrow b_2a_1 = b_1a_2 \Rightarrow \frac{b_2}{a_2}=\frac{b_1}{a_1}$

Transitivität: $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2} \wedge \frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3} \Rightarrow b_1a_2 = b_2a_l \wedge b_2a_3 = b_3a_2$

$\Rightarrow$ $(b_1a_2)a_3 = (b_2a_l)a_3 \wedge (b_2a_3)a_1 = (b_3a_2)a_1$

$\Rightarrow$ $(b_1a_3)a_2 = (b_2a_l)a_3 \wedge (b_2a_1)a_3 = (b_3a_1)a_2$

$$\Rightarrow \qquad (b_1a_3)a_2 = (b_3a_1)a_2 \Rightarrow b_1a_3 = b_3a_1 \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_3}{a_3}$$

Die **Gesetze der Existenz** sind für (1.31β) und (1.31γ) erfüllt, denn mit $a_l \neq 0$ und $a_2 \neq 0$ ist auch $a_1a_2 \neq 0$.

Die **Gesetze der Eindeutigkeit** gelten ebenfalls.

Beweis der Eindeutigkeit:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{d_1}{c_1} \wedge \frac{b_2}{a_2} = \frac{d_2}{c_2} \Rightarrow b_1c_1 = d_1a_1 \wedge b_2c_2 = d_2a_2$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1c_1)(a_2c_2) = (d_1a_1)(a_2c_2) \wedge (b_2c_2)(a_1c_1) = (d_2a_2)(a_1c_1)$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1a_2)(c_1c_2) = (d_1c_2)(a_1a_2) \wedge (b_2a_1)(c_1c_2) = (d_2c_1)(a_1a_2)$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1a_2 + b_2a_1)(c_1c_2) = (d_1c_2 + d_2c_1)(a_1a_2)$$

$$\frac{b_1a_2 + b_2a_1}{a_1a_2} = \frac{d_1c_2 + d_2c_1}{c_1c_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} = \frac{d_1}{c_2} + \frac{d_2}{c_2}$$

Damit ist das Gesetz der Eindeutigkeit für die Addition bewiesen. Für die Multiplikation gilt

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{d_1}{c_1} \wedge \frac{b_2}{a_2} = \frac{d_2}{c_2} \Rightarrow b_1c_1 = d_1a_1 \wedge b_2c_2 = d_2a_2$$

$$\Rightarrow (b_1c_1)(b_2c_2) = (d_1a_1)(d_2a_2) \Rightarrow (b_1b_2)(c_1c_2) = (d_1d_2)(a_1a_2)$$

$$\Rightarrow \frac{b_1b_2}{a_1a_2} = \frac{d_1d_2}{c_1c_2} \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{d_1}{c_1} \cdot \frac{d_2}{c_2}$$

Also gilt das Gesetz der Eindeutigkeit auch für die Multiplikation.

Die Assoziativgesetze, die Kommutativgesetze und das Distributivgesetz gelten ebenfalls in $\mathbb{Q}$. Die Gleichung a + x = b ist ausnahmslos lösbar, und für die Multiplikation gilt mit der schon in $\mathbb{Z}$ nötigen Einschränkung die Kürzungsregel. $\mathbb{Q}$ ist Integritätsbereich.

Identifizieren wir $\frac{b}{1}$ mit b, so erreichen wir, daß $\mathbb{Z}$ Unterstruktur von $\mathbb{Q}$ ist. $\mathbb{Q}$ leistet mehr als $\mathbb{Z}$, denn in $\mathbb{Q}$ ist für beliebige rationale Zahlen $q_1 = \frac{b_1}{a_1} \neq 0$ und $q_2 = \frac{b_2}{a_2}$ die Gleichung $q_1x = q_2$ lösbar.

Beweis: Nehmen wir an, es existiere eine rationale Zahl $x = \frac{x_2}{x_1}$ als Lösung, so folgt

$$\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{b_2}{a_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b_1 x_2}{a_1 x_1} = \frac{b_2}{a_2} \quad \Rightarrow (b_1x_2)a_2 = b_2(a_1x_1)$$

$$\Rightarrow \qquad (b_1a_2)x_2 = (b_2a_1)x_1 \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{b_2a_1}{b_1a_2} \quad (q_1 \neq 0 \Rightarrow b_1 \neq 0)$$

Umgekehrt ist $x = \frac{b_2a_1}{b_1a_2}$ Lösung, denn

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2a_1}{b_1a_2} = \frac{b_1(b_2a_1)}{a_1(b_1a_2)} = \frac{b_2(b_1a_1)}{a_2(b_1a_1)} = \frac{b_2}{a_2}$$

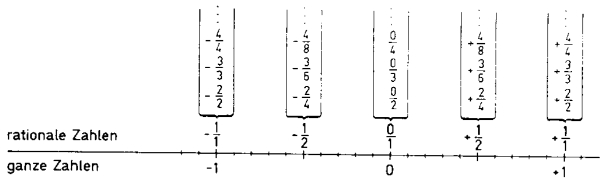


Abb. 1.32a Rationale Zahlen

$\mathbb{Q}$ ist also sogar ein Körper [I, 3.24]. Jeder Unterkörper, der $\mathbb{Z}$ als Unterstruktur umfaßt, muß alle Quotienten aus ganzen Zahlen enthalten. Nun läßt sich aber jede rationale Zahl als Quotient ganzer Zahlen schreiben, denn im Sonderfall $ax = b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, gilt für die Lösung $x = \frac{b}{a}$. $\mathbb{Q}$ besitzt demnach keinen echten Unterkörper, der $\mathbb{Z}$ als Unterstruktur umfaßt. ($\mathbb{Q}$ erfüllt damit die Forderungen a) bis d) [1.12].

Anordnung: In $\mathbb{Q}$ läßt sich eine Anordnung definieren, die für ganze rationale Zahlen mit der von Z übereinstimmt. Die Menge $\mathbb{Q}^+$ der Quotienten natürlicher Zahlen ist nämlich Positivbereich von $\mathbb{Q}$. Für $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ definiert dann

$$q_1 < q_2 \Leftrightarrow q_2 - q_1 \in Q^+$$

eine Anordnung von $\mathbb{Q}$. Diese ist archimedisch, d.h. zu $q \in Q$ existiert stets eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $n > q$. $\mathbb{Q}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper [Bd. 2,III,1.44].

$\mathbb{Q}$ besteht also aus Zahlen $+\frac{m}{n}$, 0, $-\frac{m}{n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ (Abb. 1. 32 a).

Übungen:

Beweise für a, b, c $\in \mathbb{Z}$

a) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0$

b) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

c) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

d) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b^n} < \frac{1}{a^n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (vollständige Induktion).

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ für $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

f) Zu $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^+$ existiert stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q_1 < nq_2$ (Archimedes-Gesetz).

g) Zu $q \in \mathbb{Q}^+$ existiert stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n < q$.

h) $0 < q < n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat $q = 0$ zur Folge (Archimedes- Gesetz).

i) Erläutere die Rechenmöglichkeiten in $\mathbb{Q}$.

j) Vergleiche die mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen belegten Zahlengeraden.

k) Vergleiche die Eigenschaften der Relationen „a ist kleiner als b“ und „a ist Teiler von b“ für ganze Zahlen.

l) Gibt es unendlich große und unendlich kleine rationale Zahlen?

1.33 Andere Konstruktionen.

Zweites Verfahren: Man beginnt von $\mathbb{N}$ aus, durch Quotientenbildung und Hinzufügen der 0 die Menge der (nicht negativen) Brüche zu konstruieren. Es schließt sich die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ durch Vorzeichengebung oder Differenzenbildung an (VOGEL 1952).

Drittes Verfahren: Analog dem ersten Verfahren [1.32] kann man die Konstruktion durch Paarbildung durchführen. In $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ definiert man

$$(b_1, a_1) \sim (b_2,a_2) \Leftrightarrow_{\text{Def}} b_1a_2 = b_2a_1 \quad [1, 2.33b].$$

Das ist eine Äquivalenzrelation; für die Äquivalenzklassen

$$\overline{(b_1,a_1)} \text{ und } \overline{(b_2,a_2)}$$

werden Verknüpfungen definiert:

$$\overline{(b_1,a_1)} + \overline{(b_2,a_2)} =_{\text{Def}} \overline{(b_1a_2 + b_2a_1, a_1a_2)}$$

$$\overline{(b_1,a_1)} \cdot \overline{(b_2,a_2)} =_{\text{Def}} \overline{(b_1b_2, a_1a_2)}$$

Man erhält einen Körper, in den sich $\mathbb{Z}$ isomorph einbetten läßt. Die Verfahren, die von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ führen, laufen strukturell auf die Konstruktion des kleinsten Körpers hinaus, der einen Integritätsbereich umfaßt. Allgemein gilt:

Jeder Integritätsbereich läßt sich in einen Körper einbetten.

Der kleinste Körper, der den Integritätsbereich umfaßt, ist sein **Quotientenkörper** (v.d.WAERDEN 1955).

1.34 *Struktur und Axiomatik der rationalen Zahlen*.

Auch hier führt die Frage, ob die auf verschiedenen Wegen gefundenen Erweiterungsbereiche von $\mathbb{Z}$ isomorph sind, auf die Frage nach einem monomorphen Axiomensystem für die rationalen Zahlen. Wir geben einige äquivalente Axiomensysteme.

a) $\mathbb{Q}$ ist der kleinste Körper, der $\mathbb{N}$ umfaßt (BACHMANN 1939).

b) ist der kleinste angeordnete Körper (BACHMANN 1939).

$\mathbb{Q}$ spielt in der Körpertheorie eine wichtige Rolle. Ein Schiefkörper, der keinen echten Unterkörper enthält, heißt **Primkörper.** Jeder Primkörper ist sogar Körper. In jedem Körper gibt es genau einen Primkörper. Es gilt: Der Primkörper eines Körpers ist entweder isomorph dem Körper der Restklassen nach einer Primzahl p oder dem Körper der rationalen Zahlen. Den Primkörper kennzeichnet man im ersten Fall durch die **Charakteristik** p, im zweiten Fall durch die Charakteristik 0 [Bd. 2, III, 1.43].

c) $\mathbb{Q}$ ist Primkörper der Charakteristik 0 (V. D. WAERDEN 1955).

1.35 Methodisches und Didaktisches.

Zunächst ergibt sich die Frage der Reihenfolge des Aufbaus. Für den Gang natürliche Zahlen – ganze Zahlen – rationale Zahlen spricht die strukturelle Betrachtung, bei der man zunächst einen Abschluß der Addition, dann den der Multiplikation sucht. Für die Reihenfolge natürliche Zahlen – Brüche – rationale Zahlen spricht der historische Entwicklungsprozeß, in dem das Bedürfnis nach Brüchen früher auftauchte als nach negativen Zahlen.

In der Unterstufe wird man sich an letztere Reihenfolge halten, denn auch in der Schule ist das Bedürfnis nach Brüchen elementarer als nach negativen Zahlen. In der Mittelstufe und erst recht in der Oberstufe hat man Freiheit, was die Reihenfolge der Einführung und die Verwendung der Konstruktionsmittel anbelangt.

Da die Mittelstufenalgebra mit Variablen arbeitet, ist sowieso ein Aufbau des Zahlensystems erforderlich. Hier kann man sich unter besonderer Betonung der strukturellen Gesichtspunkte durchaus für die Reihenfolge natürliche Zahlen – ganze Zahlen – rationale Zahlen entscheiden. Durch die Analogie der Verfahren kann der Schüler das Wesentliche eines Erweiterungsprozesses erkennen, durch beim ersten Erweiterungsschritt geführten Beweise hat er eine Anleitung zu selbständigem Beweisen beim zweiten Schritt.

Auf der Oberstufe sollte die Verbindung zu anderen Gebieten aufgezeigt werden. Die Frage, wann Quotienten ganzer Zahlen wieder ganze Zahlen sind, führt auf die Teilbarkeitstheorie. Lineare Gleichungen und Ungleichungen können in $\mathbb{Q}$ sinnvoll behandelt werden, das Rechnen mit Beträgen ergibt sich ebenfalls natürlich. Durch die Archimedes-Eigenschaft der rationalen Zahlen findet sich leicht ein Übergang zum Grenzwertbegriff mit der Frage nach unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen. Das führt schließlich zur Notwendigkeit der Konstruktion reeller Zahlen. Schließlich stellt die Beschäftigung mit $\mathbb{Q}$ einen geeigneten Zugang zu strukturellen und axiomatischen Betrachtungen dar. Man erhält mit $\mathbb{Q}$ ein Modell für die wichtigsten algebraischen Strukturen: $\mathbb{Q}$ ist ein Modul, $\mathbb{Q}^+$ ist eine Abel-Gruppe bezüglich der Multiplikation, $\mathbb{Q}$ ist ein Halbring, Ring, Integritätsbereich, Schiefkörper, Körper, angeordneter Körper, archimedisch angeordneter Körper. Diese strukturellen Betrachtungen gestatten es, den Erweiterungsprozeß zu analysieren und die einzelnen Schritte zu motivieren. Sie ermöglichen aber auch einen axiomatischen Aufbau, der in der Schule wohl frühestens bei $\mathbb{Q}$ sinnvoll und vollständig einsetzen kann.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß bei dem von uns gewählten Aufbau [1.32] Brüche auch dann gleich sind, wenn sie erst durch Kürzen auf gleiche Form gebracht werden können. Wir verwenden also Wertgleichheit, während bei der Konstruktion durch Paare [1.33] die Gleichheit von Brüchen Formgleichheit ist. Alle Brüche einer Äquivalenzklasse sind wertgleich. Erweitern bzw. Kürzen bedeutet dann den Übergang eines Bruches in einen wertgleichen innerhalb derselben Äquivalenzklasse. Bereits in der Unterstufe sollten die Begriffe Formgleichheit und Wertgleichheit geklärt werden.

1.4 Von den rationalen zu den reellen Zablen

1.41 Intervallschachtelungen.

Die Unvollkommenheit der rationalen Zahlen tritt in der Schule zunächst bei der Wurzelrechnung in Erscheinung. Die Gleichung $x^2 - a = 0$ ist selbst für $a \geq 0$ in $\mathbb{Q}$ nicht immer lösbar. In der Geometrie führen inkommensurable Strecken und die Quadratur des Kreises auf die Suche nach einem geeigneten Erweiterungsbereich von $\mathbb{Q}$. Besonders das Verfahren des Archimedes zur Bestimmung der Kreisfläche bietet einen möglichen Weg. Man kann jede rationale Zahl a approximieren durch zwei Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle A_n \rangle$ aus rationalen Zahlen mit den Eigenschaften

(1.41α) $\langle a_n \rangle$ ist monoton wachsend,

(1.41β) $\langle A_n \rangle$ ist monoton fallend,

(1.41γ) $\lim\limits_{n \to \infty} (A_n - a_n) = 0$.

Die Zahl a ist dabei bestimmt durch $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} A_n = a$.

Beispiel:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad A_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a = 1$$

Geometrisch läßt sich das Verfahren deuten mit Hilfe der Folge $\langle [a_n, A_n] \rangle$ ineinander geschachtelter Intervalle, die sich auf den Punkt a zusammenziehen, der in allen Intervallen enthalten ist. Wir bezeichnen das Paar $(\langle a_n \rangle, \langle A_n \rangle)$ als **Intervallschachtelung,** a nennen wir innersten Punkt, Grenzpunkt oder **Zentrum** der Intervallschachtelung. Wir schreiben $a =_{\text{Def}} \langle a_n | A_n \rangle$ [Bd. 1, I, 10.51]. In $\mathbb{Q}$ besitzt nicht jede Intervallschachtelung ein Zentrum.

Beispiele:

a) $(\langle a_n\rangle,\langle A_n\rangle)$ mit $a_{n+1} = \dfrac{2a_n+2}{a_n+2}$ und $A_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{2a_n}$ hat kein Zentrum in $\mathbb{Q}$ (in $\mathbb{R}$ ist es $\sqrt{2}$).

b) $\left(\left\langle\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\rangle,\left\langle\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\rangle\right)$ hat in $\mathbb{Q}$ kein Zentrum (in $\mathbb{R}$ ist es e).

Unser Ziel ist es, $\mathbb{Q}$ so zu erweitern, daß jede Intervallschachtelung ein Zentrum besitzt.

Dazu untersuchen wir zunächst das Rechnen mit rationalen Zentren. Seien

$a = \langle a_n | A_n\rangle$ und $b = \langle b_n | B_n\rangle$. Dann gilt

(1.41δ) $\langle a_n | A_n\rangle = \langle b_n | B_n\rangle$

ist gleichwertig mit jeder der Aussagen

(1.41ε) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$

(1.41ζ) $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n - B_n) = 0,$

(1.41η) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - B_n) = 0,$

(1.41ϑ) $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n - b_n) = 0,$

Wir zeigen die Gleichwertigkeit von (1.41δ) und (1.41ϵ).

$$a = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n\text{-}b_n) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} (A_n - a_n) = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} (B_n - b_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} bn.$$

Wir haben hier durchweg die Grenzwertsätze [Bd. 6, I, 1.25] angewendet. Für die Summe zweier Zentren gilt

(1.41ι) $$\langle a_n | A_n \rangle + \langle b_n | B_n \rangle = \langle a_n + b_n | A_n + B_n \rangle$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß mit $(\langle a_n | A_n \rangle)$ und $(\langle b_n | B_n \rangle)$ auch

$(\langle a_n + b_n | A_n + B_n \rangle)$ eine Intervallschachtelung ist.

$$a_n \le a_{n+1} \wedge b_n \le b_{n+1} \Rightarrow a_n + b_n \le a_{n+1} + b_{n+1}$$

$$A_n \ge A_{n+1} \wedge B_n \ge B_{n+1} \Rightarrow A_n + B_n \ge A_{n+1} + B_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (A_n - a_n) = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} (B_n - b_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} ((A_n + B_n) - (a_n + b_n)) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Damit ist (1.41ι) bewiesen.

Für das Produkt erhalten wir dann eine ebenso übersichtliche Darstellung, wenn alle Glieder der Folgen positiv sind. Dann gilt

(1.41κ) $\langle a_n | A_n \rangle \cdot \langle b_n | B_n \rangle = \langle a_n \cdot b_n | A_n \cdot B_n \rangle$

wie man analog zu (1.41ι) beweist. Natürlich haben diese Aussagen nur für Intervallschachtelungen mit rationalen Zentren einen Sinn.

1.42 Konstruktion reeller Zahlen.

Wir konstruieren den gewünschten Erweiterungsbereich von $\mathbb{Q}$, indem wir Schreibfiguren $\langle a_n | A_n \rangle$ betrachten, die mit Hilfe von Intervallschachtelungen $(\langle a_n \rangle, \langle A_n \rangle)$ gebildet werden. Wir definieren:

(1.42α) $\langle a_n | A_n \rangle = \langle b_n | B_n \rangle \Leftrightarrow_{\text{Def}} \lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0,$

(1.42β) $\langle a_n | A_n \rangle + \langle b_n | B_n \rangle =_{\text{Def}} \langle a_n + b_n | A_n + B_n \rangle,$

(1.42γ) $\langle a_n | A_n \rangle \cdot \langle b_n | B_n \rangle =_{\text{Def}} \langle a_n \cdot b_n | A_n \cdot B_n \rangle$, $a_n > 0$, $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(1.42γ) wird für die anderen Folgenarten sinngemäß abgeändert.

Durch (1.42α) ist eine Relation mit den üblichen Eigenschaften einer Gleichheit definiert.

Reflexivität: $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - a_n) = 0 \Rightarrow \langle a_n | A_n \rangle = \langle a_n | A_n \rangle$

Symmetrie: $\langle a_n | A_n \rangle = \langle b_n | B_n \rangle \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0 \Rightarrow \langle b_n | B_n \rangle = \langle a_n | A_n \rangle$$

Transitivität:

$$\langle a_n | A_n \rangle = \langle b_n | B_n \rangle \wedge \langle b_n | B_n \rangle = \langle c_n | C_n \rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \wedge \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (b_n - c_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} ((a_n - b_n) + (b_n - c_n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - c_n) = 0$$

$$\Rightarrow \langle a_n | A_n \rangle = \langle c_n | C_n \rangle.$$

Für die Addition gelten die Gesetze der Existenz und Eindeutigkeit.

Das Gesetz der Existenz ergibt sich daraus, daß mit $(\langle a_n\rangle,\langle A_n\rangle)$ und $(\langle b_n\rangle,\langle B_n\rangle)$ auch $(\langle a_n + b_n\rangle, \langle A_n+B_n\rangle)$ eine Intervallschachtelung ist [1.41]. Nun zeigen wir die Eindeutigkeit der Addition:

$$\langle a_n | A_n \rangle = \langle c_n | C_n \rangle \wedge \langle b_n | B_n \rangle = \langle d_n | D_n \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - c_n) = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} (b_n - d_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ((a_n + d_n) - (c_n + d_n)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle a_n + b_n | A_n + B_n \rangle = \langle c_n + d_n | C_n + D_n \rangle$$

Für den Sonderfall (1.42γ) der Multiplikation beweist man analog das Gesetz der Existenz und Eindeutigkeit. Die anderen Fälle behandelt man sinngemäß [Vogel]. So erhält man schließlich, daß die Schreibfiguren $\langle a_n | A_n \rangle$ einen Körper bilden. Existiert für $\langle a_n | A_n \rangle$ sogar $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so identifizieren wir $\langle a_n | A_n \rangle$ mit a.

Es ist dann so eingerichtet, daß die Menge der Schreibfiguren, die wir als **reelle Zahlen** (Abb. 1.42 a) bezeichnen, einen Körper bildet, der $\mathbb{Q}$ als Unterkörper besitzt. Wir bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$.

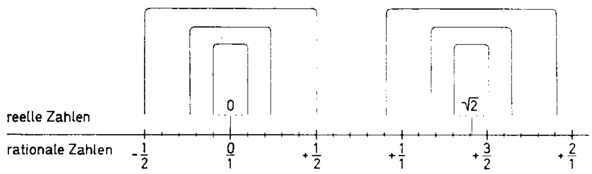


Abb. 1.42a Reelle Zahlen

Die Menge aller reellen Zahlen $\langle a_n | A_n \rangle$, für die es ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $a_m > 0$ gibt, ist Positivbereich von $\mathbb{R}$. Er gestattet die Definition einer Anordnung von $\mathbb{R}$, welche die von $\mathbb{Q}$ fortsetzt. Diese Anordnung ist archimedisch. $\mathbb{R}$ ist also ein archimedisch angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ umfaßt.

Auch in $\mathbb{R}$ lassen sich jetzt wieder Intervallschachtelungen definieren wie in [1.41]. In $\mathbb{R}$ besitzt jede Intervallschachtelung ein Zentrum. Man beweist dazu, daß zu jeder Intervallschachtelung $(\langle r_n \rangle, \langle R_n \rangle)$ reeller Zahlen eine Intervallschachtelung $(\langle a_n \rangle, \langle A_n \rangle)$ rationaler Zahlen existiert mit $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - r_n) = 0$. Dazu muß man natürlich zunächst in $\mathbb{R}$ Intervallschachtelungen definieren (VOGEL 1952).

Übungen:

a) Ist $(\langle a_n \rangle, \langle A_n \rangle)$ Intervallschachtelung, so folgt $a_n \le A_n$.
b) Ist $a_n \le B_n$ und $b_n \le A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\langle a_n | A_n \rangle = \langle b_n | B_n \rangle$.
c) $-\langle a_n | A_n \rangle = \langle -A_n | -a_n \rangle$.
d) $\left\langle 0 \middle| \frac{1}{2^n} \right\rangle$.

e) $= \left\langle \frac{3}{10}+\ldots+\frac{3}{10^n} \middle| \frac{3}{10}+\ldots+\frac{3}{10^{n-1}}+\frac{4}{10^n} \right\rangle = ?$

f) Bestimme eine Intervallschachtelung mit Zentrum $\sqrt{3}$.

g) Zeige an geometrischen Beispielen, weshalb die Einführung der reellen Zahlen sinnvoll ist (Diagonale im Quadrat, inkommensurable Strecken, Kreisumfang, Pyramidenvolumen).

h) Überdenke Versuche, $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme unendlich großer und unendlich kleiner Zahlen zu erweitern (z.B. $\frac{1}{0}=\infty$).

i) Erläutere das Verfahren des indirekten Beweises an einem Irrationalitätsbeweis.

j) Kennzeichne die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen mit Hilfe der Dezimaldarstellung als reelle Zahlen.

k) Vergleiche den Begriff der Intervallschachtelung in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

1.43 Andere Konstruktionen.

Auch die Intervallschachtelungen selbst als Folgenpaare kann man zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ verwenden. Die Gleichheit liegt dann bereits fest. Man definiert die Äquivalenzrelation

$$(\langle a_n \rangle, \langle A_n \rangle) \sim (\langle b_n \rangle, \langle B_n \rangle) \Leftrightarrow_{\text{Def}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (a_n \leq B_n \wedge b_n \leq A_n)$$

Für die Äquivalenzklassen $\overline{(\langle a_n \rangle, \langle A_n \rangle)}$ und $\overline{(\langle b_n \rangle, \langle B_n \rangle)}$ definiert man Verknüpfungen:

$$\overline{(\langle a_n \rangle, \langle A_n \rangle)} + \overline{(\langle b_n \rangle, \langle B_n \rangle)} =_{\text{Def}} \overline{(\langle a_n + b_n \rangle, \langle A_n + B_n \rangle)}$$

$$\overline{(\langle a_n \rangle, \langle A_n \rangle)} \cdot \overline{(\langle b_n \rangle, \langle B_n \rangle)} =_{\text{Def}} \overline{(\langle a_n \cdot b_n \rangle, \langle A_n \cdot B_n \rangle)}$$

mit $a_n > 0$ und $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für Intervallschachtelungen mit Folgen, die negative Glieder besitzen, muß man die Multiplikation sinngemäß abändern. Durch isomorphe Einbettung der rationalen Zahlen kommt man dann zu $\mathbb{R}$. Die Schwierigkeiten mit der Multiplikation lassen sich vermeiden, wenn man in der Reihenfolge natürliche Zahlen, positive rationale Zahlen, positive reelle Zahlen, reelle Zahlen vorgeht.

Statt mit Folgenpaaren zu arbeiten, kann man auch gewisse rationale Folgen verwenden. Die rationale Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heißt **Fundamentalfolge** (Cauchy-Folge), wenn zu jeder positiven rationalen Zahl ϵ eine natürliche Zahl n, so existiert, daß für alle natürlichen Zahlen k, m $\geq n_0$ gilt $|a_k - a_m| < \epsilon$. In der Menge der Fundamentalfolgen erklärt man eine Äquivalenzrelation durch

$$\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle \Leftrightarrow_{\text{Def}} \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Für die Äquivalenzklassen $\overline{\langle a_n \rangle}$, $\overline{\langle b_n \rangle}$ wird definiert

$$\overline{\langle a_n \rangle} + \overline{\langle b_n \rangle} =_{\text{Def}} \overline{\langle a_n + b_n \rangle}$$

$$\overline{\langle a_n \rangle} \cdot \overline{\langle b_n \rangle} =_{\text{Def}} \overline{\langle a_n \cdot b_n \rangle}$$

Man kann dies Verfahren etwas abwandeln, indem man jeder Fundamentalfolge $\langle a_n \rangle$ die Schreibfigur lim a_n, die man **Grenzwert** nennt, zuordnet. Für diese Grenzwerte definiert man Gleichheit und Verknüpfungen durch

$$\lim a_n = \lim b_n \Leftrightarrow_{\text{Def}} \lim (a_n - b_n) = 0,$$

$$\lim a_n + \lim b_n =_{\text{Def}} \lim (a_n + b_n),$$

$$\lim a_n \cdot \lim b_n =_{\text{Def}} \lim (a_n \cdot b_n).$$

Falls $\langle a_n \rangle$ einen rationalen Grenzwert besitzt, identifizieren wir lim a_n mit diesem Grenzwert. Damit erhalten wir im Sonderfall die alte Bedeutung, es ist also ein Erweiterungsbereich von $\mathbb{Q}$ konstruiert.

Spezielle Fundamentalfolgen sind die unendlichen **Dezimalzahlen.** Auch sie kann man zur Konstruktion verwenden. Allerdings sind die Definitionen der Verknüpfungen sehr umständlich. Wir wollen deshalb hier nicht näher darauf eingehen (PICKERT-GÖRKE 1958).

Schließlich kann man die reellen Zahlen auch durch **Schnitte** gewinnen. Ein Schnitt in $\mathbb{Q}$ ist ein Paar von nicht leeren Teilmengen X, Y von $\mathbb{Q}$, für die gilt

$$X \cap Y = \emptyset,$$

$$X \cup Y = \mathbb{Q},$$

$$x < y \text{ für alle } x \in X \text{ und } y \in Y.$$

Durch die Gleichheit von Paaren ist die Gleichheit von Schnitten definiert. Für Schnitte (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) gilt

$$(X_1, Y_1) = (X_2, Y_2) \Leftrightarrow X_1 = X_2 \wedge Y_1 = Y_2.$$

Als Summe dieser Schnitte wird ein Schnitt (X_3, Y_3) bezeichnet, bei dem X_3 aus allen Zahlen der Form $x_1 + x_2$ mit $x_1 \in X_1$, und $x_2 \in X_2$ besteht, während für Y_3 gilt $Y_3 = \mathbb{Q} \setminus X_3$. Ähnlich definiert man das Produkt zweier Schnitte (LANDAU 1930).

Neben den hier genannten Verfahren gibt es noch weitere (BACHMANN 1939).

Auch der Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ läßt sich unter einem allgemeineren Gesichtspunkt betrachten. Strukturell bedeutet es, daß zum archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ der kleinste angeordnete Körper konstruiert wird, in dem jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge eine obere Grenze besitzt. Ein solcher Körper wird als **vollständiger angeordneter Körper** bezeichnet. Allgemein gilt:

> **Jeder archimedisch angeordnete Körper läßt sich in einen vollständigen angeordneten Körper einbetten** (V. D. WAERDEN 1955).

$\mathbb{Q}$ läßt sich auch als **metrischer Raum** betrachten. $\mathbb{R}$ ist dann der kleinste umfassende vollständige metrische Raum, die **vollständige Hülle** [I, 3.43]. Es gilt:

Jeder metrische Raum besitzt eine vollständige Hülle [I, 3.43].

1.44 Struktur und Axiomatik der reellen Zahlen.

Alle Verfahren liefern einen angeordneten Körper, der den der rationalen Zahlen umfaßt. Daß dieser Körper mehr leistet, zeigt sich jeweils an der Abgeschlossenheit bezüglich der bei der Konstruktion verwendeten Operation. Die verschiedenen Konstruktionen liefern Modelle folgender äquivalenter Axiomensysteme.

a) $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper, in dem jede Intervallschachtelung ein Zentrum besitzt.

b) $\mathbb{R}$ ist ein **stetiger** Körper, d.h. er ist archimedisch angeordnet, und in ihm besitzt jede Fundamentalfolge einen Grenzwert (BACHMANN 1939).

c) $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, in dem jeder Schnitt eine Schnittzahl besitzt (BACHMANN 1939).

d) $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, in dem jede unendliche beschränkte Teilmenge mindestens einen Häufungspunkt besitzt (ALEXANDROFF-MARKUSCHEWITSCH-CHINTSCHIN 1965).

e) $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper, der keinen echten Oberkörper besitzt, welcher archimedisch angeordnet ist (ALEXANDROFF-MARKUSCHEWITSCH-CHINTSCHIN 1965).

Die Mengen der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen lassen sich als Unterstrukturen eines stetigen Körpers auszeichnen. Die natürlichen Zahlen erhält man als diejenigen Elemente, die sich durch sukzessive Addition des Einselements ergeben. Man kann der Ansicht sein, daß in der Formulierung „sukzessive Addition“ ein Anzahlbegriff enthalten ist. Das läßt sich umgehen, wenn man definiert: Ein Element eines stetigen Körpers heißt natürliche Zahl, wenn es in jeder Teilmenge enthalten ist, die 1 und mit x auch x + 1 enthält. Die ganzen Zahlen sind diejenigen Elemente, die sich als Differenzen natürlicher Zahlen darstellen lassen, während die rationalen Zahlen die Quotienten der ganzen Zahlen sind. Natürlich sind diese Zahlbereiche damit nur in der Sprache der Logik zweiter Stufe bis auf isomorphe Modelle festgelegt, in diesem Sinne charakterisiert. Wir erhalten also: In der Sprache der Logik zweiter Stufe ist jeder stetige Körper dem Körper der reellen Zahlen isomorph. Ähnlich müßte man bei der Axiomatik aller Zahlenbereiche einschränken (HERMES 1963, JUNG 1967).

1.45 Methodisches und Didaktisches.

Wenn man die Konstruktionsverfahren für $\mathbb{R}$ vergleicht, so wird man vom mathematischen Gesichtspunkt her zunächst untersuchen, inwieweit sie verallgemeinerungsfähig sind. Das Verfahren mit den Fundamentalfolgen benutzt im Grunde nur, daß $\mathbb{R}$ bezüglich des Absolutbetrages ein metrischer Raum ist [3.43]. Für die Schnitte verwendet man die Anordnung von $\mathbb{R}$. Beide Verfahren werden bei den Intervallschachtelungen kombiniert. Das Verfahren mit den Intervallschachtelungen ist also nicht ganz so verallgemeinerungsfähig. Methodisch gesehen unterscheiden sich die Verfahren in Anschaulichkeit der Darstellungen und Umfang und Schwierigkeit der Beweise. Betrachtet man lediglich die Konstruktionselemente, so nimmt die Anschaulichkeit etwa in der Reihenfolge Dezimalbrüche, Intervallschachtelungen, Grenzwerte, Fundamentalfolgen, Schnitte ab. Das ist freilich zum Teil subjektiv und hängt von den Vorbereitungen ab. In der praktischen Durchführung treten für die Schule bei jedem Weg Schwierigkeiten auf, die mit Schulmitteln wohl kaum vollständig zu bewältigen sind. Man wird deshalb häufig Aussagen nur veranschaulichen und auf ihre Beweisbedürftigkeit hinweisen. Der Aufbau ist immer dann etwas komplizierter, wenn man mit Äquivalenzklassen arbeiten muß. Wir wollen solche Verfahren für die Schule außer Betracht lassen. Auch Dezimalzahlen sind für einen vollständigen Aufbau nicht geeignet, weil es zu schwierig ist, für sie geeignete Verknüpfungen zu definieren. So bleiben Zentren von Intervallschachtelungen, Grenzwerte von Fundamentalfolgen und Schnitte als Konstruktionsmittel übrig. Unter ihnen wollen wir die Methode wählen, die auf allen Schulstufen verwendet werden kann. Nach den bisher gemachten Erfahrungen ist das am ehesten mit Intervallschachtelungszentren möglich.

In der **Unterstufe** kann man durch Intervallschachtelungen periodische Dezimalzahlen in gemeine Brüche verwandeln.

Beispiel: $\frac{1}{3}$ als Zentrum einer Intervallschachtelung.

$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4$$
$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34$$
$$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Man wird sich auf dieser Stufe natürlich nur mit einer rein sprachlichen Definition der Intervallschachtelung begnügen, etwa so:

> Eine Intervallschachtelung ist ein Folgenpaar, bei dem die Glieder der einen Folge immer größer werden, die der anderen werden immer kleiner. Der Unterschied zwischen den entsprechenden Gliedern der beiden Folgen wird beliebig klein.

In der **Mittelstufe** arbeitet man sowohl in der Algebra als auch in der Geometrie mit Intervallschachtelungen. Die Notwendigkeit ergibt sich dazu in der Algebra bei der Potenzrechnung.

Beispiele:

a) *Quadratwurzeln*: $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$ als Zentrum einer Intervallschachtelung.

$$2 \leq \sqrt{7} \leq 3$$

$$2{,}6 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}7$$

$$2{,}64 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}65$$

....

[Bd. 1, I, 10.41]

b) *Potenzen mit gebrochenen Exponenten:* $7^{\frac{2}{5}}$

$$2 \leq 7^{\frac{2}{5}} \leq 3, \text{ weil } 2^5 \leq 7^2 \leq 3^5;$$

$$2{,}1 \leq 7^{\frac{2}{5}} \leq 2{,}2, \text{ weil } 2{,}1^5 \leq 7^2 \leq 2{,}2^5;$$

$$2{,}17 \leq 7^{\frac{2}{5}} \leq 2{,}18, \text{ weil } 2{,}17^5 \leq 7^2 \leq 2{,}18^5$$

....

c) *Potenzen mit irrationalen Exponenten*: $10^{\sqrt{7}}$

$$10^2 \leq 10^{\sqrt{7}} \leq 10^3, \text{ weil } 2 \leq \sqrt{7} \leq 3$$

$$10^{2{,}6} \leq 10^{\sqrt{7}} \leq 10^{2{,}7}, \text{ weil } 2{,}6 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}7$$

$$10^{2,64} \leq 10^{\sqrt{7}} \leq 10^{2,65}\text{, weil } 2,64 \leq \sqrt{7} \leq 2,65$$

....

d) *Logarithmen:* lg 7

$$0 \leq \lg 7 \leq 1$$

$$0,8 \leq \lg 7 \leq 0,9$$

$$0,84 \leq \lg 7 \leq 0,85$$

....

[Bd. 1, I, 11.32.]

In der Geometrie braucht man Intervallschachtelungen beim Aufbau der Ähnlichkeitslehre und bei den Strahlensätzen im Fall inkommensurabler Strekken [Bd. 3, I, 9.31. Schließlich bei der Berechnung von Kreisfläche und Kreisumfang sowie Zylinder-, Pyramiden-, Kegel- und Kugelvolumen muß man im Prinzip Intervallschachtelungen heranziehen [Bd. 3, I, 10; Bd. 3, I, 13].

In der **Oberstufe** wird man Intervallschachtelungen exakt definieren [6.41] und das Rechnen mit Zentren wenigstens erläutern. Man wird dann in der Analysis so häufig wie möglich Existenzbeweise durch Intervallschachtelungen führen.

Beispiele:

a) $\left\langle \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \middle| \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\rangle = e,$

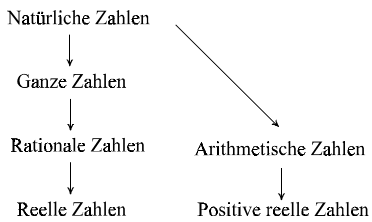
b) $\int_a^b f(x)\,dx$ als Zentrum der durch Unter- und Obersummenfolge gebildeten Intervallschachtelung [Bd. 6, I, 5.25; RWA, Bd. 3].

Wenn man so auf allen Unterrichtsstufen mit Intervallschachtelungen operiert, darf man hoffen, den Schülern das System der reellen Zahlen vertraut zu machen.

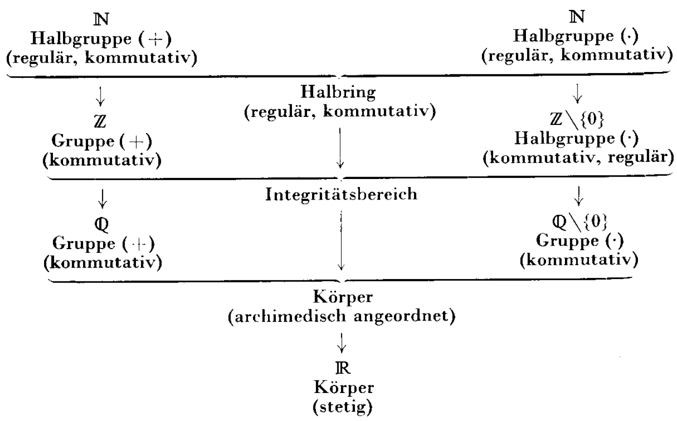
Die axiomatische Betrachtung des Systems der reellen Zahlen kann weitgehend die Schwierigkeiten des genetischen Aufbaus vermeiden. Man sollte sich aber nicht damit begnügen, nur ein Axiomensystem anzugeben. Es ist zunächst nötig, in induktivem Vorgehen die Axiome zu entwickeln. Man wird dabei an die beim genetischen Aufbau gewonnenen Kenntnisse anknüpfen. Die axiomatische Betrachtung stellt dann einen Rückblick auf das Tun der Mittelstufe dar. Zugleich bietet sich bei der Suche nach einem geeigneten Axiomensystem die Möglichkeit, schrittweise den Begriff der algebraischen Struktur zu entwickeln. Geeignet ist dazu das Axiomensystem a) [1.44]. Hat man es gewonnen, so sollte man sich nicht damit begnügen. Es ist vielmehr notwendig, die Leistungsfähigkeit eines solchen Systems wenigstens an einigen Beispielen zu zeigen. Man wird also etwa die Vorzeichenregeln, das Beweisverfahren der vollständigen Induktion, die Umformungsregeln für Gleichungen und Ungleichungen usw. aus den Axiomen herleiten. Es ergibt sich damit die Möglichkeit einfacher Beweisübungen für Behauptungen, die von der Mittelstufe her bekannt sind. Man sollte es auch nicht versäumen, das Axiomensystem selbst zu analysieren. Es werden so die Begriffe Unabhängigkeit, Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems entwickelt [RWA, Bd. 3].

1.46 Übersicht

a) Aufbau:



b) Struktur:



1.5 Sonstige Zahlenbereichserweiterungen

1.51 Algebraische Erweiterungen des Körpers der rationalen Zahlen.

Um die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ lösen zu können, braucht man nicht unbedingt den Körper der reellen Zahlen zu konstruieren. Im Fall von $x^2 - 4 = 0$ ist ja $\sqrt{4}$

eine Lösung. Entsprechend betrachten wir nun Schreibfiguren $a + b\sqrt{2}$ mit rationalen Zahlen a und b. Für diese Schreibfiguren definiert man dann Gleichheit, Summe und Produkt. Zu sinnvollen Definitionen gelangt man, wenn man sich etwa vom Rechnen mit Termen $a + b\sqrt{4}$ im Körper der rationalen Zahlen leiten läßt. Wenn man bereits $\mathbb{R}$ konstruiert hat, dann kennt man natürlich schon die dort geltenden Regeln für Terme $a + b\sqrt{2}$. Damit ist man dann bei der Definition schon festgelegt. Man wird also definieren:

(6.51α) $\quad a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2} \Leftrightarrow_{\text{Def}} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2,$

(6.51β) $\quad (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) =_{\text{Def}} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2},$

(6.51 γ) $\quad (a_1 + b_1\sqrt{2})\cdot(a_2 + b_2\sqrt{2}) =_{\text{Def}} (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}.$

Identifiziert man dann die Schreibfigur $a + 0\sqrt{2}$ mit a und $0+1\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$, so erhält man einen Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, der $\mathbb{Q}$ umfaßt und das Element $\sqrt{2}$ enthält, welches die Eigenschaft hat $\sqrt{2}^{\,2} = 2$. Denn

$$(0 + 1\cdot\sqrt{2})\cdot(0 + 1\cdot\sqrt{2}) = 2 + 0\cdot\sqrt{2}.$$

In $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist also $x^2 - 2 = 0$ lösbar, und es ist der kleinste Oberkörper von der diese Eigenschaft hat. Die Schreibweise $a + b\sqrt{2}$ ist unproblematisch, denn $a + b\sqrt{2}$ bedeutet in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ wirklich die Summe aus der rationalen Zahl a und der mit $\sqrt{2}$ multiplizierten rationalen Zahl b. Wir können nämlich schreiben:

$$a + b\sqrt{2} = (a + 0\cdot\sqrt{2}) + (b + 0\cdot\sqrt{2})\cdot(0 + 1\cdot\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}.$$

(Schreibfigur) (Summe)

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$ ist eine **einfache algebraische Körpererweiterung** von $\mathbb{Q}$. Sie entsteht durch **Adjunktion** des über $\mathbb{Q}$ algebraischen Elements $\sqrt{2}$ [Bd. 2, III, 1.44].

Dasselbe Ergebnis erhält man natürlich, wenn man statt mit Schreibfiguren mit (geordneten) Paaren von rationalen Zahlen arbeitet. Die Gleichheit liegt dann fest. Für Summe und Produkt definiert man

$$(a_l, b_l) + (a_2, b_2) =_{Def} (a_l + a_2, b_l + b_2)\ ,$$

$$(a_l, b_l)\cdot(a_2, b_2) =_{Def} (a_la_2 + 2b_l b_2, a_lb_2 + a_2 b_l).$$

Anschließend identifiziert man (a, 0) mit a und (0, 1) mit $\sqrt{2}$.

Bei der Gleichung $x^3 - 2 = 0$ arbeitet man mit Schreibfiguren $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}^{\,2}$ bzw. mit Tripeln rationaler Zahlen.

Mit wachsendem Grad werden die Definitionen aber immer aufwendiger. Es gibt in der Algebra ein einfacheres Verfahren, das diese Aufgabe löst. Man verwendet da Restklassen von Polynomen (V. D. WAERDEN 1955).

Reelle Zahlen, die Lösungen von Gleichungen der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + ... + a_l x + a_0 = 0$$

mit rationalen Zahlen $a_n, ..., a_0$ sind, heißen **algebraische Zahlen,** wenn wenigstens eins der a_k von Null verschieden ist (V. D. WAERDEN 1955; Bd. 1, I, 10.53].

Beispiele: 0; 1; ...;–1; –2; ... ; $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{3}$; ...; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$; ... sind algebraische Zahlen.

1.52 Der Körper der komplexen Zahlen.

Der Körper der komplexen Zahlen ergibt sich als $R(\sqrt{-1})$, in dem also $x^2 + 1 = 0$ lösbar ist. Die Konstruktion verläuft entsprechend [1.51]. Man betrachtet Schreibfiguren $a + b\sqrt{-1}$ mit reellen Zahlen a und b und definiert:

(1.52α) $a_1 + b_1\sqrt{-1} = a_2 + b_2\sqrt{-1} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$,

(1.52β) $(a_1 + b_1\sqrt{-1}) + (a_2 + b_2\sqrt{-1}) =_{Def} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-1}$,

(1.52γ) $(a_1 + b_1\sqrt{-1})\cdot(a_2 + b_2\sqrt{-1}) =_{Def} (a_1a_2 - b_1 b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-1}$.

Identifiziert man nun $a + 0\cdot\sqrt{-1}$ mit a und $0 + 1\cdot\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1} =_{Def} i$, so erhält man den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen.** Wegen

$$i^2 = (0 + 1\cdot\sqrt{-1})\,(0 + 1\cdot\sqrt{-1}) = (-1 + 0\sqrt{-1}) = -1$$

ist in ihm die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösbar.

Es zeigt sich sogar, daß in $\mathbb{C}$ jede Gleichung

$$a_nx_n + ... + a_1x + a_0 = 0 \text{ mit } a_n, ... ,a \in \mathbb{C}$$

wenigstens eine Lösung besitzt. Das ist der **Fundamentalsatz der Algebra** [Bd. 2, II, 2.25]. Man sagt, der Körper der komplexen Zahlen ist **algebraisch abgeschlossen.**

Gegenüber $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ jedoch die Möglichkeit der Anordnung, welche die Monotoniegesetze erfüllt, verlorengegangen.

Beweis:

In jedem angeordneten Körper gilt für alle Elemente a, die vom Nullelement verschieden sind, $0 < a^2$. Gäbe es also eine Anordnung von $\mathbb{C}$, dann wäre auch $0 < 1^2 = 1$ und $0 < i^2 = -1$. Daraus folgt aber $0 + 1 < -1 + 1$, also $1 < 0$, was nach dem oben Festgestellten nicht möglich ist.

Geometrisch lassen sich die komplexen Zahlen als Drehstreckungen in der Ebene mit ausgezeichnetem Zentrum gewinnen (STEINER 1964). Stellt man diese Abbildungen mit Hilfe von Matrizen dar, so ergibt sich eine weitere algebraische Konstruktion von $\mathbb{C}$ (PICKERT-STEINER 1958).

Natürlich läßt sich das Verfahren mit Schreibfiguren auch dadurch abwandeln, daß man mit Paaren reeller Zahlen arbeitet. Man hat dann Gleichheit definiert. Addition und Multiplikation werden definiert durch

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) =_{\text{Def}} (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) =_{\text{Def}} (a_1a_2 - b_1 b_2, a_1b_2 + a_2 b_1).$$

Man identifiziert $(a, 0)$ mit a und $(0, 1)$ mit $\sqrt{-1}$ und erhält so den kleinsten Oberkörper $\mathbb{C}$ von $\mathbb{R}$, in dem $x^2 + 1 = 0$ lösbar ist (STEINER 1964).

Für das praktische Rechnen mit komplexen Zahlen sei auf [Bd. 1, II,1] verwiesen.

1.53 Transzendente Erweiterungen von $\mathbb{Q}$.

Transzendente Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ erhält man, wenn man in einem Unterkörper von $\mathbb{R}$ Terme der Art von

$$a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + \ldots + a_1e + a_0$$

betrachtet. Wir wollen die Existenz von $\mathbb{R}$ noch nicht voraussetzen, sondern mit Elementen von Schreibfiguren

$$f = a_o + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

bilden, bei denen $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ rationale Zahlen sind, die von einem bestimmten Index n ab alle gleich 0 sind. f heißt **Polynom** über $\mathbb{Q}$, die a_k heißen **Koeffizienten,** x heißt **Unbestimmte.**

Wir wollen nun Gleichheit und Verknüpfungen so definieren, daß wir einen Erweiterungsbereich von $\mathbb{Q}$ erhalten. Lassen wir uns bei den Definitionen von den Rechenregeln für das Rechnen mit Termen der Art unseres Einführungsbeispiels leiten, so erhalten wir:

Seien

$$f = a_o + a_l\, x + ... + a_k\, x^k + ... \quad \text{und } g = b_o + b_l\, x + ... + b_k\, x^k + ...,$$

dann gelte

(1.53α) $\quad f{=}g \Leftrightarrow_{Def}\ a_k = b_k$ für alle $k = 0, 1, ...$

(1.53β) $\quad f + g = c_0 + c_1\, x + ... + c_k\, x^k + ...$ mit

$$c_k =_{Def} a_k + b_k \text{ für alle } k = 0,1,...,$$

(1.53γ) $\quad f{\cdot}g = d_0 + d_l x + ... + d_k x^k + ...$ mit

$$d_k =_{Def} \sum_{i+m=k} a_i b_m$$

Man kann zeigen, daß die Menge $\mathbb{Q}[x]$ der Polynome über $\mathbb{Q}$ einen Integritätsbereich bilden. Durch Identifikation der Polynome $a_0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^k + ...$ mit a_0, erreichen wir, daß $\mathbb{Q}[x]$ die Menge $\mathbb{Q}$ umfaßt. $\mathbb{Q}[x]$ ist **transzendente** Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Der Integritätsbereich $\mathbb{Q}[x]$ läßt sich in einen Körper einbetten [1.33]. Der kleinste Körper, der $\mathbb{Q}[x]$ umfaßt, ist der Quotientenkörper $\mathbb{Q}(x)$. Man erhält so eine **transzendente** Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

Das Verfahren läßt sich allgemein für einen beliebigen Körper K durchfuhren. K(x) ist dann die transzendente Erweiterung von K. Die Elemente von K(x) lassen sich darstellen in der Form $\frac{f}{g}$, wo f und g Polynome sind über K und g vom Nullpolynom verschieden ist. Ein Polynom $a_0 + a_1 x + ... + a_k\, x^k + ...$ ist genau dann Nullpolynom, wenn $a_0 = a_1 = ... = a_k = ... = 0$ ist. Die Erweiterung geht ganz entsprechend der Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Q}(x)$ vor sich (V.D. WAERDEN 1955).

Betrachten wir nun eine reelle Zahl r, die nicht algebraisch ist. Dann kann sie auch nicht Lösung einer Gleichung $a_0 + a_1x + ... + a^n x^n = 0$ mit $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ sein, wo wenigstens ein $a_k \neq 0$ ist [6.51]. Die Gleichung $a_0 + a_1r + ... + a^n r^n = 0$ hat dann $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$ zur Folge. Eine solche Zahl r heißt **transzendente Zahl.**

Beispiele: e und π sind transzendente Zahlen.

$\mathbb{R}$ besteht also aus algebraischen und transzendenten Zahlen. Statt mit Schreibfiguren zu arbeiten, kann man natürlich auch unendliche Zahlenfolgen verwenden, die von einem bestimmten Glied an lauter Nullen haben. Die Gleichheit ist dann bereits definiert als Gleichheit entsprechender Glieder. Für die Folgen $\langle a_k\rangle$ und $\langle b_k\rangle$ definiert man Summe und Produkt durch

$$\langle ak\rangle + \langle b_k\rangle =_{\text{Def}} \langle a_k + b_k\rangle ,$$

$$\langle a_k\rangle \cdot \langle b_k\rangle =_{\text{Def}} \langle \sum_{i+m=k} a_i b_m \rangle.$$

Man identifiziert dann $\langle a_0, 0, ...\rangle$ mit a_0, und $\langle 0, 1, 0, ...\rangle$ mit x. Es zeigt sich dann, daß man $\langle a_k\rangle = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k + ...$ schreiben kann. Diese Darstellung hatten wir ja aber oben verwendet.

1.54 Non-Standard-Erweiterungen.

Der Erweiterungsprozeß, der zu den reellen Zahlen führte, war durchaus nicht zwangsläufig, selbst wenn man die Analysis im Auge hatte. Das hätte an sich sogar nahegelegt, einen nichtarchimedisch angeordneten Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ zu konstruieren. Dann hätte man wirklich mit unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen rechnen können, wie ja ursprünglich angestrebt wurde.

In jedem nichtarchimedisch angeordneten Körper gibt es nämlich Elemente, die größer als jede natürliche Zahl sind, und solche, die größer als null, aber kleiner als 1 für jede natürliche Zahl n sind. 1957 wurde zunächst ein teilweise geordneter Ring mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen von SCHMIEDEN und LAUGWITZ entwickelt, der eine Analysis gestattet, die die übliche umfaßt (SCHMIEDEN-LAUGWITZ 1958). Da ist es z.B. möglich, unendliche Reihen wirklich aufzusummieren. 1962 konstruierte LUXEMBURG einen nichtarchimedisch angeordneten Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ der denselben Aufbau der Analysis ermöglichte. Auch diese Entwicklungen sind bereits im vorigen Jahrhundert angebahnt, jedoch nicht weiter beachtet worden. Erst 1962 wurde ein Beitrag zur Entwicklung eines solchen Zahlbereichs aus dem Nachlaß von BOLZANO veröffentlicht. Wie starr das Denken auf den bisher üblichen Weg festgelegt war, zeigt sich daran, daß die Arbeit von BOLZANO zunächst als unexakt abgetan wurde. Die wirklich aufgetretenen Fehler lassen sich aber leicht ausmerzen (LAUGWITZ 1965).

1.55 Methodisches und Didaktisches.

Komplexe Zahlen finden im heutigen Gymnasialunterricht im allgemeinen nicht mehr dasselbe Interesse wie früher. Das Problem der Stoffbeschränkung dürfte die Hauptursache dafür sein. Andererseits sind sie für die Gleichungslehre unentbehrlich, für physikalische Betrachtungen sehr zweckmäßig und zur Darstellung moderner mathematischer Denkweisen gut geeignet.

In der **Mittelstufe** lassen sie sich zunächst als Schreibfiguren betrachten, die es gestatten, alle quadratischen Gleichungen zu lösen. Gleichheit, Summe und Produkt lassen sich leicht definieren, wie es ja auch historisch geschehen ist. Ein geometrischer Zugang ist auf der Mittelstufe über die Drehstreckungen in der Ebene mit ausgezeichnetem Zentrum möglich. In der Oberstufe kann man daran anknüpfen und bei der algebraischen Betrachtung der Abbildungen zu ihnen über die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}$$

kommen. Der Nachteil dieses Verfahrens ist jedoch, daß hier Gleichheit und Verknüpfungen bereits, allerdings gerade zweckmäßig, festliegen. Es wird dann nicht mehr die grundsätzliche Freiheit der Wahl bei den Definitionen sichtbar.

Man kann das Komplexe auch ganz aus der Mittelstufe heraushalten [Steiner] und dann auf der Oberstufe einen rein algebraischen Zugang zu den komplexen Zahlen suchen. Man hat in der Oberstufe bereits $\mathbb{R}$ konstruiert. Nun betrachtet man einfache algebraische Erweiterungen der Art von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. An ihnen kann man in vertrautem Bereich alle wesentlichen Schritte der Körperadjunktion eines algebraischen Elements entwickeln. Man gewinnt so ein Vorbild für die Konstruktion von $\mathbb{R}(i)$. Das Verfahren hat den Vorteil, die Schüler an moderne Betrachtungsweisen heranzuführen, ohne daß sie durch fehlende Motivation oder zu starke Abstraktion überfordert zu werden brauchten (STEINER 1964). Man kann diese vollständig und exakt durchgeführte Konstruktion auch als exemplarisches Verfahren zur Entwicklung des Erweiterungsbereichs einer Struktur mit gewünschten Eigenschaften wählen. Von diesem Gesichtspunkt her wäre es durchaus zu verantworten, diese Erweiterung als einziges Beispiel für das genetische Verfahren auf der Oberstufe zu wählen und ansonsten den Zahlenbereich der reellen Zahlen axiomatisch zu betrachten. Das ganze Zahlensystem von den komplexen Zahlen her axiomatisch zu betrachten, dürfte die Schüler überfordern. Die Frage der Bausteine für die Konstruktion von C erscheint uns, entgegen anderen Ansichten (STEINER 1964), belanglos vom mathematischen Standpunkt her; dagegen treffen wir aus pädagogischen Erwägungen heraus die Wahl zugunsten der Schreibfiguren [1.12].

Transzendente Erweiterungen treten in der Schule höchstens in Form von Polynomen auf. Leider wird in der Schule heute immer noch nicht klar getrennt zwischen ganzen rationalen Funktionen und Polynomen über $\mathbb{R}$. Bereits STEINITZ (1910) hat klar diese beiden Begriffe unterschieden. Es wäre nicht schlimm, wenn in der Schule Polynome und ganze rationale Funktionen als Synonyme verwendet würden. Tatsächlich arbeitet man aber in der Schule häufig mit Polynomen bei der Bestimmung der Nullstellen ganzer rationaler Funktionen. Man kann jedoch auch ganz konsequent nur mit ganzen rationalen Funktionen arbeiten. Alle in der Schule auftretenden Probleme (Nullstellen usw.) lassen sich mit ihnen darstellen. Im allgemeinen wird man sich damit begnügen müssen, es sollte dann aber auch das Wort Polynom vermieden werden. In einer Arbeitsgemeinschaft kann man jedoch auch den Polynomring über $\mathbb{R}$ konstruieren und die Beziehung zwischen ganzen rationalen Funktionen und Polynomen über $\mathbb{R}$ erläutern (LENZ 1961). Non-Standard-Erweiterungen spielen für die Schule keine Rolle, wenn sie auch in einer Arbeitsgemeinschaft durchaus zugänglich wären.

1.6 Literatur

Ackermann, W., Von den natürlichen zu den reellen Zahlen, Inst. f. math. Logik u. Grundlagen d. Univ. Münster, WS 61/62;

Asser, G., Einführung in die Höhere Mathematik, 1955;

Bachmann, F., Aufbau des Zahlensystems, Enzyklopädie, 1939;

Alexandroff, P. S., Markuschewitsch, A.I.,Chintschin, A. J., Enzyklopädie der Elementarmath. Bd. 1, Arithmetik, 1965;

Fischer, B., Arithmetik, 1948;

Hermes, H., Einführung in die mathematische Logik, 1963;

Jung, W., Logische Aspekte der Schulmathematik, 1967;

Landau, E., Grundlagen der Analysis, 1930;

Laugwitz, D., Bemerkungen zu Bolzanos Größenlehre, Arch. f. Hist. of Exact Sc., Vol. 2, 5 (1965), p. 398-409;

Lenz, H., Grundlagen der Elementarmathematik, 1961;

v. Mangoldt, H., Knopp, K., Einführung in die Höhere Mathematik, 1, 11. Aufl. 1958;

Meschkowski, H., Einführung in die moderne Mathematik, 1964;

Pickert, G., Görke, L., Aufbau des Systems der reellen Zahlen, Grundzüge d. Math.,1, 1958;

Pickert, G., Steiner, H.-G., Komplexe Zahlen und Quaternionen, Grundzüge d. Math., 1, 1958;

Redei, L., Algebra, 1, 1959;

Remmert, R., Zahlen, Das Fischer Lexikon, Math. 1, 1964;

Russell, B., Einführung in die mathematische Philosophie, Darmstadt o.J.;

Schmieden, C., Laugwitz, D., Eine Erweitereung der Infinitesimal Rechnung, Math. Zeitschr., 69 (1958), S. 1-39;

Steiner, H.-G., Moderne begriffliche Methoden bei der Behandlung der komplexen Zahlen, MU, 10 Heft 2, (1964);

Vogel, A., Klassische Grundlagen der Analysis, 1952;

Vollrath, H.-J., Eine Bemerkung zur Definition der Intervallschachtelungen, Elemente d. Math., XVIII/6, 1963;

v. d. Waerden, B. L., Algebra 1, 4. Aufl., 1955.