

5. Grundgedanken der Omega-Analysis und ihrer Anwendung auf die Bestimmung reeller Grenzwerte

Mathematisch Physikalische Semesterberichte 15 (1968), 102-111

1. Einleitung

Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung wurde lange Zeit durch das Bemühen der Mathematiker bestimmt, mit unendlich kleinen bzw. unendlich großen Zahlen zu einer Lösung der Probleme zu gelangen. Mit dem Aufbau des reellen Zahlensystems nach K. WEIERSTRASS (um 1860), G. CANTOR (1872), R. DEDEKIND (1872) und P. BACHMANN (1892) wurden solche Überlegungen zunächst weitgehend hinfällig. Die Gültigkeit des Archimedes-Axioms schließt ja gerade solche Zahlen aus.

Von C. SCHMIEDEN und D. LAUGWITZ wurde 1958 eine erweiterte Analysis – die sogenannte Ω -Analysis – über einem Zahlenbereich mit unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen entwickelt, welche die reelle Analysis umfaßt (SCHMIEDEN, LAUGWITZ 1958). Es ist bemerkenswert, daß 1962 ein Beitrag zur Entwicklung eines ähnlichen Zahlenbereichs aus dem Nachlaß von B. BOLZANO veröffentlicht wurde. Kleine darin auftretende Fehler lassen sich leicht ausmerzen, wie von D. LAUGWITZ gezeigt wurde (LAUGWITZ 1965).

Die ersten Phasen der Entwicklung der Infinitesimalrechnung spiegeln sich bis zu einem gewissen Grade mit erheblicher Phasenverschiebung auch im Mathematikunterricht des Gymnasiums wider. Lange spielten Rechenregeln für „ ∞ “ eine Rolle. Inzwischen hat sich aber wohl überall die auf die reellen Zahlen gegründete Auffassung vom Grenzwertbegriff durchgesetzt. Wenigstens den Lehrer dürften jedoch auch die Betrachtungen der nichtarchimedischen Analysis interessieren, die inzwischen in mehreren Richtungen betrieben wird.

Wir wollen hier vereinfacht die Grundgedanken der Ω -Analysis entwickeln. Indem wir, einem Gedanken von D. LAUGWITZ folgend, die reellen Zahlen zugrunde legen, und, abweichend von C. SCHMIEDEN und D. LAUGWITZ, einen topologisch naheliegenden Grenzwertbegriff verwenden, erhalten wir eine

einheitliche und übersichtliche Darstellung, die unmittelbare Anwendungen auf die Analysis liefert. Sie ist so elementar, daß die Überlegungen vielleicht sogar einer Arbeitsgemeinschaft an der Schule zugänglich werden können.

2. Der Ring der Ω -Zahlen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen und mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Wir wollen einen Erweiterungsbereich von $\mathbb{R}$ konstruieren, in dem es unendlich große und unendlich kleine Zahlen gibt. Dazu betrachten wir reelle Zahlenfolgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Die Gleichheit liegt fest als komponentenweise Gleichheit. Verknüpfungen werden definiert durch ¹⁾

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} + (b_k)_{k \in \mathbb{N}} =_{\text{Def}} (a_k + b_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \cdot (b_k)_{k \in \mathbb{N}} =_{\text{Def}} (a_k \cdot b_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Entsprechend haben wir $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} - (b_k)_{k \in \mathbb{N}} = (a_k - b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} : (b_k)_{k \in \mathbb{N}} = (a_k : b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, falls $b_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Identifizieren wir nun $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a \in \mathbb{R}$, so erhalten wir einen Ring $\mathbb{R}_\Omega$, der den Körper der reellen Zahlen umfaßt. Die Elemente von $\mathbb{R}_\Omega$ nennen wir Ω -Zahlen, genauer Ω -reelle Zahlen, der den Körper der reellen Zahlen umfaßt.

Dieser Ring $\mathbb{R}_\Omega$ enthält Nullteiler, wie das Beispiel zeigt

$$(0, 1, 0, \dots)(1, 0, 1, \dots) = (0, 0, 0, \dots).$$

$\mathbb{R}_\Omega$ wird teilweise geordnet durch

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} > (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow_{\text{Def}} a_k > b_k \text{ für alle } k.$$

Entsprechend werden komponentenweise definiert „<“, „>“, „≤“²⁾, ebenso $|(a_k)_{k \in \mathbb{N}}| =_{\text{Def}} (|a_k|)_{k \in \mathbb{N}}$.

Die Ordnungsrelationen sind mit den Verknüpfungen verträglich; $\mathbb{R}_\Omega$ ist aber nur teilweise geordnet, denn es gibt unvergleichbare Elemente wie z.B. $(1, -1, 1, \dots)$ und $(-1, 1, -1, \dots)$.

$\mathbb{R}_\Omega$ besitzt unendlich große Zahlen. Die Zahl $\Omega = (k)_{k \in \mathbb{N}}$, die (als Folge) in der reellen Analysis divergiert, ist größer als 0 und hat die Eigenschaft, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $k > n$ für alle $k \geq k_0$, $k \in \mathbb{N}$.

Das benutzen wir zur Definition: Für $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \geq 0$ und $B = (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \geq 0$ heißt genau dann A *unendlich groß gegen* B , wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_k > nb_k$$

für alle $k \geq k_0$, $k \in \mathbb{N}$. Wir schreiben dann: $A \gg B$.

Das von uns gegebene Beispiel bedeutet also $\Omega \gg 1$. Entsprechend können wir nun definieren

$$B \ll A \Leftrightarrow_{\text{Def}} A \gg B.$$

B heißt dann unendlich klein gegen A . Z.B. ist die Zahl $\omega = \frac{1}{\Omega} = (k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$

unendlich klein gegen 1. Wie man leicht zeigt, sind die Relationen „ $\gg$ “ und „ $\ll$ “ transitiv.

Eine Ω -Zahl heißt *unendlich groß*, wenn sie unendlich groß gegen 1 ist. Sie heißt *unendlich klein*, wenn ihr Betrag (!) unendlich klein gegen 1 ist. Ω ist also unendlich groß, ω ist unendlich klein.

Gilt für $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $B = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, daß $|A - B| \ll 1$ ist, so ist das gleichbedeutend mit $\lim (a_n - b_n) = 0$ in der reellen Analysis. Das nehmen wir zum Anlaß für die Definition: A heißt *endlich gleich* B , wenn die Differenz von A und B unendlich klein ist, in Zeichen:

$$A \cong B \Leftrightarrow_{\text{Def}} |A - B| \ll 1.$$

Es gilt z.B. $\omega = (k^{-1})_{k \in \mathbb{N}} \cong 0$, $a = (a) \cong (a) = a$.

Allgemein folgt aus $A = B$ auch $A \cong B$. Das Umgekehrte gilt natürlich nicht.

Diese Relation gestattet es, Konvergenzbetrachtungen der reellen Analysis in

die Ω -Analysis zu übertragen und umgekehrt. Wir stellen im folgenden Beispiel die entsprechenden Formulierungen der Analysis und der Ω -Analysis einander gegenüber:

Für $\lim_n a_n = a$ und $\lim_n b_n = b$ gilt	Für $A \approx a \in \mathbb{R}$ und $B \approx b \in \mathbb{R}$
$\lim_n a_n \pm \lim_n b_n = a \pm b$	$A \pm B \approx a \pm b$
$\lim_n a_n \cdot \lim_n b_n = a \cdot b$	$A \cdot B \approx a \cdot b$
$\lim_n a_n : \lim_n b_n = a : b$	$A : B \approx a : b$
für $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$	für $b_k \neq 0$ für alle k und $b \neq 0$.

Damit erhalten wir nun z.B.

$$\frac{(\Omega+1)(2\Omega-1)}{(\Omega+2)(3\Omega-1)} = \frac{(1+\omega)(2-\omega)}{(1+2\omega)(3-\omega)} \approx \frac{(1+0)(2-0)}{(1+2 \cdot 0)(3-0)} = \frac{2}{3}.$$

Algebraisch gesehen wäre es natürlich schöner, wenn man einen nichtarchimedisch geordneten Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ konstruiert hätte. Das ist auch möglich, wie W. A. J. LUXEMBURG gezeigt hat (LUXEMBURG 1962). Er konstruiert ebenfalls zunächst $\mathbb{R}_\Omega$, definiert dann aber eine leider nicht mehr elementare Äquivalenzrelation. Der so erhaltene Restklassenring ist ein nichtarchimedisch geordneter Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$. Für die praktischen Untersuchungen arbeitet aber auch er meist mit den Repräsentanten. Der Einfachheit halber wollen wir hier auf diesen Weg nicht weiter eingehen.

3. Das Rechnen mit unendlich großen Zahlen

Auch in der reellen Analysis erweitert man gelegentlich $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme von $+\infty$ und $-\infty$. Man muß dann allerdings in Kauf nehmen, daß nur gewisse Verknüpfungen möglich sind, die durch entsprechende Regeln festgelegt sind. Diese Einschränkung ist in $\mathbb{R}_Q$ nicht nötig. Natürlich lassen sich aber auch besondere Regeln für unendlich große Zahlen herleiten, etwa die folgenden:

Sei $A \gg 1$ und $B \gg 1$, dann gilt

- (a) $A \pm a \gg 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$,
- (b) $A+B \gg 1$,
- (c) $A \cdot |a| \gg 1$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- (d) $A \cdot B \gg 1$,
- (e) $\frac{|a|}{A} \gg 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$, falls alle $a_k \neq 0$.

Ist nämlich $A \gg 1$, so existiert zu jedem n ein k_0 mit $A > n$ für alle $k \geq k_0$. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ läßt sich dann aber auch ein k_1 finden mit $a_k \pm a > n$ für alle $k \geq k_1$. Das bedeutet (a).

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es ein k_2 mit $a_k |a| > n$ für alle $k \geq k_2$. Daraus folgt (c).

Wenn sogar alle $a_k \neq 0$ sind, dann läßt sich ein k_3 finden mit $\frac{|a|}{a_k} < \frac{1}{n}$ für alle

$k \geq k_3$. Das ergibt (e).

Ist außerdem $B \gg 1$, so gibt es ein k_4 mit $b_k > n$ für alle $k \geq k_4$. Dann gibt es auch ein k_5 mit $a_k + b_k > n$ für alle $k \geq k_5$. Damit erhalten wir (b).

Schließlich gibt es ein k_6 mit der Eigenschaft $a_k b_k > n$ für alle $k \geq k_6$. Das ergibt (d).

Neben diesen Regeln kann man natürlich leicht noch andere aussprechen, wir wollen aber darauf verzichten, weil die typischen Formulierungen bereits an

den angegebenen Beispielen deutlich werden.

Formel (d) hat zur Folge, daß man mit Hilfe einer unendlich großen Zahl leicht eine weitere konstruieren kann, die unendlich groß gegen die vorhergehende ist. So gilt z.B. $1 \ll \Omega \ll \Omega_2 \ll \Omega_3 \ll \dots$. Es gibt also unendlich große Zahlen „verschiedener Stufe“.

Formel (e) zeigt, daß der Kehrwert einer unendlich großen Zahl, falls er existiert, unendlich klein ist. Bei Ω und ω haben wir ja schon mehrfach davon Gebrauch gemacht.

Natürlich kann man auch den Quotienten zweier unendlich großer Zahlen A und B bilden, falls alle Komponenten von B von 0 verschieden sind. Der Quotient ist dann eindeutig bestimmt. Man kann jedoch allgemein wenig über ihn aussagen. Er kann unendlich groß sein: $\Omega_2 : \Omega = \Omega$, er kann unendlich klein sein: $\Omega : \Omega_2 = \omega$, er kann aber auch reell sein: $\sqrt{2}\Omega : \Omega = \sqrt{2}$.

4. Folgen von Ω -Zahlen

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist als Folge reeller Zahlen eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Man kann leicht zu topologisch sinnvollen Folgen in der Ω -Analysis kommen, wenn man die Menge $\mathbb{N}_\Omega$ der Ω -natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ abbildet. $\mathbb{N}_\Omega$ besteht aus allen Zahlen $N = (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Menge $\mathbb{N}_\Omega$ ist als Definitionsbereich geeignet, denn sie ist vermöge „ $\leq$ “ eine *gerichtete* Menge, d.h. $N \leq N$ für alle $N \in \mathbb{N}_\Omega$ (Reflexivgesetz), aus $N_1 \leq N_2$ und $N_2 \leq N_3$ folgt $N_1 \leq N_3$ für $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}_\Omega$ (Transitivgesetz), zu $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_\Omega$ existiert $N_3 \in \mathbb{N}_\Omega$ mit $N_1 \leq N_3$ und $N_2 \leq N_3$.

Die Abbildung $N \rightarrow A_N$ von $\mathbb{N}_\Omega$ in $\mathbb{R}_\Omega$ ist also eine Moore-Smith-Folge (PIK-KERT 1960). Da $\mathbb{N}_\Omega$ überabzählbar ist, erhalten wir hiermit auf ganz natürliche Weise ein nicht triviales Beispiel für Moore-Smith-Folgen.

$(A_N)_{N \in \mathbb{N}_\Omega}$ bezeichne eine solche Moore-Smith-Folge von Ω -reellen Zahlen.

Weil wir nur solche Folgen in $\mathbb{R}_\Omega$ betrachten wollen, sprechen wir kurz von Folgen von Ω -reellen Zahlen.

$(A_N)_{N \in \mathbb{N}_\Omega}$ konvergiert genau dann gegen $A \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $E > 0$ aus $\mathbb{R}_\Omega$ ein N_0 aus $\mathbb{N}_\Omega$ gibt mit $|A_N - A| < E$ für alle $N \geq N_0$ aus $\mathbb{N}_\Omega$. Wir schreiben dann $\lim_N A_N = A$.

Auch in $\mathbb{R}_\Omega$ gilt (im erweiterten Sinne) das Cauchy-Konvergenzkriterium (Vollrath 1963). Wir wollen hier diese Betrachtungen, die weitgehend denen der reellen Analysis entsprechen, nicht weiter verfolgen, sondern statt dessen eine Beziehung zur reellen Analysis herzustellen versuchen.

Dazu betrachten wir zunächst spezielle Folgen Ω -reeller Zahlen, die sich unmittelbar aus reellen Folgen ergeben. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist als Folge reeller Zahlen eine Abbildung $n \mapsto a_n$ von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Betrachten wir die Abbildung $N \mapsto A_N = (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ für $N = (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so ist das eine Abbildung von $\mathbb{N}_\Omega$ in $\mathbb{R}_\Omega$ mit den Eigenschaften

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_\Omega, \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_\Omega, \quad A_n = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Das sind aber gerade die typischen Eigenschaften einer Fortsetzung. Wir nennen deshalb die Folge $(A_N)_{N \in \mathbb{N}_\Omega}$ mit $A_N = (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ *Fortsetzung* der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $(n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ hat z.B. $(N^{-1})_{N \in \mathbb{N}_\Omega}$ mit $A_N = N^{-1} = (n_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ als Fortsetzung.

Das Konvergenzverhalten der Fortsetzungen in der Ω -Analysis ist durch das der zugehörigen reellen Folgen in der reellen Analysis bestimmt und umgekehrt. Es gilt der grundlegende Satz:

Die Fortsetzung $(A_N)_{N \in \mathbb{N}_\Omega}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}_\Omega$, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\lim_N A_N = \lim_n a_n.$$

Beweis: Aus $\lim_N A_N = A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ folgt, daß zu jedem $E = (\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} > 0$ ein

$N_0 = (n_{0k})_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, so daß für alle $N = (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \geq N_0$ gilt

$$|A_N - A| < E.$$

Für die Komponenten der auftretenden Ω -Zahlen gilt dann

$$|a_{n_k} - a_k| < \varepsilon_k.$$

Das ergibt $\lim_n a_n = a_k = a \in \mathbb{R}$ für alle k .

Umgekehrt gibt es wegen $\lim_n a_n = a$ zu jedem $\varepsilon_k > 0$ ein n_{0k} , so daß für alle $n_k \geq n_{0k}$ gilt

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon_k.$$

Daraus folgt $\lim_n a_n = a$. Zugleich ergibt sich die behauptete Form des Grenzwerts im Falle der Konvergenz.

5. Bestimmung reeller Grenzwerte in der Ω -Analysis

Der methodische Reiz der Ω -Analysis liegt darin, Problemstellungen der reellen Analysis in die Sprache der Ω -Analysis zu übersetzen, dort mit Hilfe unendlich großer oder unendlich kleiner Zahlen zu lösen und dann das Ergebnis reell zu interpretieren. Wir wollen das am Beispiel der Grenzwertbestimmung zeigen. Grundlegend dafür ist der

Satz. Ist für die Fortsetzung $(A_N)_{N \in \mathbb{N}_Q}$ einer reellen Zahlenfolge

$\lim_N A_N = a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$A_N \cong a$$

für alle $N \gg 1$, $N \in \mathbb{N}_Q$ ³).

Beweis: Wegen $\lim_N A_N = a$ gilt für die zugehörige reelle Folge $\lim_n a_n = a$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein n_0 mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wegen $N \gg 1$ gibt es zu jedem n_0 ein k_0 mit $n_k > n_0$ für alle $k \geq k_0$. Für diese k gilt dann aber auch $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Daraus folgt

$$\lim_k a_{n_k} = a, \text{ also } A_N = (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \cong a.$$

Wenn also der Grenzwert einer reellen Zahlenfolge bestimmt werden soll, so kann man zunächst ihre Fortsetzung bilden, setzt dann eine beliebige unendlich große Q -natürliche Zahl ein und sucht die endlich gleiche reelle. Sie ist der gesuchte Grenzwert.

Beispiel:

Die Fortsetzung von $\left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\left(\frac{2N+1}{3N+1} \right)_{N \in \mathbb{N}_Q}$.

Es gilt

$$A_Q = \frac{2Q+1}{3Q+1} = \frac{2+\omega}{3+\omega} \cong \frac{2}{3} = \lim_N A_N = \lim_n a_n.$$

Natürlich entspricht dies Verfahren dem in der reellen Analysis üblichen. Man beachte aber, daß hier tatsächlich mit unendlich großen Zahlen gerechnet wird.

Wir wollen nun die Fortsetzung einer reellen unendlichen Reihe bilden.

Die Fortsetzung von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{ny=1}^n a_{ny}$ ist

$$(S_N)_{N \in \mathbb{N}_0} \text{ mit } S_N = (s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{ny=1}^{n_k} a_{ny} \right)_{k \in \mathbb{N}} = \sum_{ny=1}^N a_{ny}.$$

Beispiel:

$$\text{Zu } \sum_{ny=2}^{\infty} \frac{1}{ny^2-1} \text{ gehört } \left(\sum_{ny=2}^N \frac{1}{ny^2-1} \right)_{N \in \mathbb{N}_0}.$$

Der Grenzwert lässt sich in der Ω -Analysis berechnen durch

$$\begin{aligned} \sum_{ny=2}^{\Omega} \frac{1}{ny^2-1} &= \sum_{ny=2}^{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ny-1} - \frac{1}{ny+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{ny=2}^{\omega} \frac{1}{ny-1} - \sum_{ny=2}^{\omega} \frac{1}{ny+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{ny=3}^{\Omega-1} \frac{1}{ny} - \sum_{ny=3}^{\Omega-1} \frac{1}{ny} - \frac{1}{\Omega} - \frac{1}{\Omega+1} \right) \cong \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Man kann hier also mit Ausdrücken rechnen, die in der reellen Analysis divergieren. Natürlich kann man auch für Doppelfolgen die Fortsetzungen bilden und dann entsprechend Grenzwerte bestimmen. Das verläuft ganz entsprechend den Fortsetzungen von Folgen (SCHMIEDEN, LAUGWITZ 1958). Wir wollen deshalb nicht weiter darauf eingehen.

Eine weitere spezielle Folgensorte der Ω -Analysis ermöglicht aber ebenfalls eine Beziehung zu reellen Doppelfolgen. Auf sie wollen wir noch näher eingehen.

6. Normalfolgen

Ein Folge $(A_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ mit $A_N = (a_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$ für $N = (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *Normalfolge*.

Beispiele sind die Fortsetzungen, weniger trivial Folgen wie

$$(\Omega + N)_{N \in \mathbb{N}_0} \text{ mit } A_N = \Omega + N = (k + n_k)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Einer Normalfolge mit $A_N = (a_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$ kann man die reelle Doppelfolge $(a_{kn})_{k, n \in \mathbb{N}}$ zuordnen, die man ja als unendliche Matrix $(a_{kn})_{k, n \in \mathbb{N}}$ darstellen kann. Jedes Glied A_N der Normalfolge hat als k -te Komponente ein Element der k -ten Zeile.

A_Ω ist die Hauptdiagonale, A_n die n -te Spalte. Wir wollen sehen, welche Beziehungen zwischen dem Konvergenzverhalten von Normalfolge und zugehöriger Doppelfolge bestehen. Für die verschiedenen Konvergenzbegriffe bei Doppelfolgen, die wir hier betrachten, verweisen wir auf die Literatur (LONDON 1900, PRINGSHEIM 1897).

Zunächst untersuchen wir die Zeilenkonvergenz. Es gilt der

Satz. *Eine Normalfolge konvergiert genau dann, wenn in der zugehörigen Doppelfolge jede Zeile konvergiert. Im Falle der Konvergenz gilt*

$$\lim_N A_N = \left(\lim_n a_{nk} \right)_n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: $\lim_A A_N = A$ bedeutet, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_0 gibt, so daß für

alle $N \geq N_0$ gilt $|A_N - A| < \varepsilon$. Wenn wir die Komponenten der auftretenden Ω -Zahlen betrachten, so gilt genau dann für alle $k \in \mathbb{N}$: Zu $\varepsilon_k > 0$ aus $\mathbb{R}$ gibt es ein n_{0k} aus $\mathbb{N}$, so daß $|a_{kn_k} - a_k| < \varepsilon_k$ für alle $n_k \geq n_{0k}$ aus $\mathbb{N}$. Das bedeutet aber gerade die Konvergenz jeder Zeile. Außerdem ergibt sich im Falle der Konvergenz der Grenzwert auf obige Weise.

Es folgt aus diesem Satz, daß $\lim_N A_N \cong a \in \mathbb{R}$ genau dann gilt, wenn der iterierte Zeilenlimes der zugehörigen Doppelfolge gleich a ist. Damit kann man leider noch nichts aussagen über das Konvergenzverhalten der Doppelfolge im Sinne von PRINGSHEIM. Das ist durch folgende Sätze möglich:

Satz. Falls für die Normalfolge $\lim_N A_N \cong a \in \mathbb{R}$ und für die zugehörige Doppelfolge $\lim_{k,n} a_{kn}$ existiert, so gilt $\lim_{k,n} a_{kn} = a$, und es folgt $A_N \cong a$ für alle $N \gg 1$ aus $\mathbb{N}_Q$.

Beweis: $\lim_N A_N \cong a \in \mathbb{R}$ bedeutet, daß der iterierte Zeilenlimes gleich a ist.

Wenn dann die Doppelfolge konvergiert, so ist der Grenzwert (im Sinne von PRINGSHEIM) der Doppelfolge gleich dem iterierten Zeilenlimes. Dann konvergiert aber auch jede wesentliche Teilfolge gegen a . Jedes A_N mit $N \gg 1$ und $N \in \mathbb{N}_Q$ ist aber eine wesentliche Teilfolge von $(a_{kn})_{k,n \in \mathbb{N}}$. Also folgt $A_N \cong a$.

Umgekehrt gilt:

Satz. Konvergiert die Normalfolge $(A_N)_{N \in \mathbb{N}_Q}$ gegen $A \in \mathbb{R}_Q$ und die zugehörige Doppelfolge $(a_{kn})_{k,n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$, so gilt $A \cong a$.

Beweis: Wegen $\lim_{k,n} a_{kn} = a$ ist auch der iterierte Zeilenlimes gleich a . Das bedeutet aber $\lim_N A_N \cong a$.

Ist der Grenzwert einer Normalfolge $A \cong a \in \mathbb{R}$, so kann man ihn immer durch Verwendung unendlich großer Zahlen berechnen.

Satz. Gilt für eine Normalfolge $\lim_A A_N \cong a \in \mathbb{R}$, so gibt es ein A_M mit $M \gg 1$

aus $\mathbb{N}_\Omega$, so daß für alle $N \geq M$ aus $\mathbb{N}_\Omega$ gilt $A_N \approx a$.

Beweis: Wegen $\lim_A A_N \approx a$ ist der iterierte Zeilenlimes in der zugehörigen

Doppelfolge gleich a . Diese ist dann aber horizontalkonvergent. Das bedeutet aber gerade die Existenz des behaupteten A_M .

Umgekehrt erhält man:

Satz. Gilt für eine Normalfolge $\lim_A A_N = A \in \mathbb{R}_\Omega$ und gibt es ein A_M mit

$M \gg 1$ aus $\mathbb{N}_\Omega$ und $A_N \approx a$ für alle $N \geq M$ aus $\mathbb{N}_\Omega$, so gilt $A \approx a$.

Beweis: Wegen $\lim_A A_N = A \in \mathbb{R}_\Omega$ konvergieren alle Zeilen der zugehörigen

Doppelfolge. Da wegen der Existenz von A_M mit $M \gg 1$ und $A_N \approx a \in \mathbb{R}$ für alle $N \geq M$ die Folge horizontalkonvergent gegen a ist, ist auch der iterierte Zeilenlimes gleich a . Das bedeutet aber $A \approx a$.

Neben diesen Betrachtungen, die darauf abzielen, die Begriffsbildungen und Methoden der Ω -Analysis auf die reelle Analysis zu beziehen, sind aber auch Betrachtungen möglich, die über die reelle Analysis hinausführen. Dazu sei auf die Arbeiten von LAUGWITZ (1959, 1961a, 1961b) hingewiesen.

Schließlich spielen Ω -Zahlenbereiche eine Rolle in Grundlagenfragen als Non-Standard-Modelle (Robinson 1963).

Literatur

Laugwitz, D., Eine Einführung der Ω -Funktionen, Sitz. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. 1959, 41-59.

Laugwitz, D., Anwendungen unendlich kleiner Zahlen, J. f. reine u. angew. Math. 207 (1961a) 53-60.

Laugwitz, D., Anwendungen unendlich kleiner Zahlen, J. f. reine u. angew. Math. 208 (1961b) 22-34.

Laugwitz, D., Bemerkungen zu Bolzanos Größenlehre, Arch. f. Hist. of Exact Sc., Vol. 2,5 (1965), 398-409.

- London, F., Über Doppelfolgen und Doppelreihen, Math. Ann. 53 (1900), 322-370.
- Luxemburg, W. A. J., Non- Standard Analysis, Pasadena 1962.
- Pickert, G., Folgen und Filter in der Infinitesimalrechnung, MNU 13,4 (1960) 150-153.
- Pringsheim, A., Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-phys. Kl. 27 (1897), 101-152.
- Robinson, A., Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra, Amsterdam 1963.
- Schmieden, C., und D. Laugwitz, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung, Math. Zeitschr. 69 (1958) 1-39.
- Vollrath, H. -J., Grundzüge einer Theorie der Ω -metrischen Räume, Darmstadt 1963.

Anmerkungen

¹⁾ Wir halten uns im wesentlichen an die von LAUGWITZ verwendeten Definitionen, er arbeitet jedoch häufig mit einer Äquivalenzrelation für reelle Zahlenfolgen, die von der von uns verwendeten Gleichheit abweicht. Die Äquivalenzklassen haben aber entsprechende Eigenschaften. Man muß natürlich zwischen Repräsentanten und Klassen unterscheiden.

²⁾ $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \geq (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist nicht gleichbedeutend mit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} > (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ oder $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

³⁾ Dieser Satz entspricht dem Hauptsatz über reelle Zahlenklassen in (SCHMIEDEN, LAUGWITZ 1958). Auch die Grenzwertberechnung erfolgt entsprechend dem dortigen Verfahren. Es wird dort allerdings der Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω -Zahlen als „Grenzwert um $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ für $N \gg 1$ aus $\mathbb{N}_\Omega$ “ die Ω -

Zahl $(a_{k_n})_{k \in \mathbb{N}}$ zugeordnet. Das ordnet sich unserem Konvergenzbegriff unter.