Hans-Georg Weigand

Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe Evaluation eines einjährigen Schulversuchs[1]

Kurzfassung

Zum Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) im Mathematikunterricht gibt es eine breite didaktische Diskussion, zahlreiche Unterrichtsvorschläge und empirische Untersuchungen, es gibt aber kaum Ergebnisse von langfristigen Studien. Im Schuljahr 2003/04 wurde ein einjähriger Unterrichtsversuch zum CAS-Einsatz in der 10. Jahrgangsstufe an drei bayerischen Gymnasien durchgeführt. Die Evaluation dieses Modellversuchs sollte zeigen, welche Veränderungen hinsichtlich zentraler mathematischer Fähigkeiten (Termumformungen, Interpretieren von Graphen, Lösen von Gleichungen, Arbeiten mit Tabellen, Arbeiten mit Formeln) sich nach einem Jahr feststellen lassen. Weiterhin sollte herausgefunden werden, wie sich Prüfungsaufgaben aufgrund des CAS-Einsatzes ändern, wie Schülerinnen und Schüler den CAS-Einsatz einschätzen und wie sich die Unterrichtsmethodik durch den CAS-Einsatz ändert. Dieser Artikel gibt einen Überblick über die Ergebnisse dieses Projekts.

Summary

For some years the relevance of computer algebra systems (CAS) in mathematical education has been widely discussed. There has been a lot of suggestions for classroom activities and empirical investigations, but there are only a few long standing science based studies in this area. A one year project was started in autumn 2003 to test the use of scientific calculators in 10th grade of three grammar schools in Bavaria (Germany). The evaluation of the project was intended give answers to the following questions: if basic mathematical skills (algebraic transformations, solving equations, working with tables and formulas) changed; how the questions posed in examinations changed if the students were allowed to use a scientific calculator (with CAS); how the students evaluated the use of the new tool; and how teaching styles and methods changed in the mathematics lessons. This article presents the results of this project.

1 Werkzeugkompetenz

Die Diskussion um die Bedeutung von Computeralgebrasystemen (CAS) für den Mathematikunterricht lässt sich in verschiedene Phasen unterteilen. Die *erste Phase* beginnt 1988 mit der Einführung des auf „Personal Computern“ lauffähigen CAS „Derive“. Sofort wird die Frage „Mathematik im Umbruch?“ (HISCHER 1992) gestellt, da Schülerinnen und Schüler von ständig wiederkehrenden kalkülhaften Berechnungen entlastet werden und sich dadurch intensiver mit den – mathematisch anspruchsvolleren – Tätigkeiten des Modellierens und Interpretierens von Problemstellungen beschäftigen können. Wissen und Fertigkeiten können dadurch vom Kopf in die Technik „ausgelagert“ werden,

[1] Die an diesem Unterrichtsversuch beteiligten Personen sowie die Schulen finden sich am Ende des Artikels.

indem Formeln und Algorithmen auf Knopfdruck zur Verfügung stehen (vgl. DÖRFLER 1991, HEUGL u. a. 1996).[2] Dadurch werden beispielsweise das Durchführen von Polynomdivisionen, trigonometrische Berechnungen und (komplexere) Termumformungen „trivialisiert“ und müssen nicht mehr in gleicher Intensität wie bisher als Papier-und-Bleistift-Fertigkeit ausgebildet werden.[3] Es werden zahlreiche Unterrichtsvorschläge unterbreitet, aber nur wenige wissenschaftlich fundierte empirische Studien durchgeführt (vgl. WEIGAND 1999).

Die *zweite Phase* beginnt im Dezember 1995 mit der Einführung des ersten Taschencomputers (TC) mit einem CAS, dem TI-92. Von der Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler den Computer nun an ihrem Arbeitsplatz im Klassenzimmer jederzeit verfügbar haben und somit ein „Wandertag“ zum Computerraum entfällt, werden tiefgreifende inhaltliche und methodische Veränderungen des Unterrichts erwartet (WEIGAND u. WETH 2002). Insbesondere wird diskutiert, wie sich Inhalte und Prüfungen im Mathematikunterricht ändern müssen, wenn Schülerinnen und Schüler ein Gerät in der Hand haben, das gerade jene kalkülhaften Berechnungen auf Knopfdruck durchführen kann, die in der Unterrichtswirklichkeit zu den zentralen Elementen des Mathematikunterrichts und den Prüfungen zählen. Wiederum gibt es zahlreiche Unterrichtsvorschläge, aber jetzt auch verstärkt wissenschaftlich begleitete Unterrichtsversuche (etwa SCHNEIDER 2000a und 2000b). Die didaktischen Diskussionen drehen sich um den richtigen Zeitpunkt des Einsatzes eines TC, um die Frage, ob TC bei Prüfungen überhaupt, teilweise oder stets zugelassen werden sollen und schließlich darum, welche Bedeutung Handrechenfertigkeiten zukünftig noch besitzen werden (HERGET u. a. 2001).

Die *dritte Phase* zu Beginn des neuen Jahrtausends geht mit der Erkenntnis einher, dass sich TC im Mathematikunterricht in Deutschland nicht oder wenig und weltweit – im Gegensatz zu Graphik-Taschenrechnern, die mittlerweile in den meisten Ländern obligatorische Hilfsmittel geworden sind – nur partiell durchgesetzt haben.[4] Die Gründe sind vielfältig (vgl. hierzu TROUCHE 2005a). U. a. lassen sich hier anführen:

- *Konstruktion der Geräte*: umständliche Handhabung, ungenügende Auflösung der Graphikbildschirme, ausbleibende Entwicklung hin zu pädagogischen Werkzeugen, hoher Preis, unterschiedliche Modelle.
- *Einstellung der Lehrerinnen und Lehrer*: mangelnde eigene Vertrautheit mit dem Gerät, Sorge vor Verlust wichtiger Rechen- und Zeichenfertigkeiten bei Schülerinnen und Schülern, hohe Bedeutung der traditionellen Papier-und-Bleistift-Mathematik.
- *Lehrpläne und Curricula*: mangelnde Integration von TC in vorhandene Lehrpläne, mangelnde Veränderung von Lerninhalten im Hinblick auf den – möglichen – Einsatz von TC.
- *Institutionelle Vorgaben*: Problematik unterschiedlicher Modelle, schneller Versionenwechsel, hoher Preis und sozialer Ausgleich,

Insgesamt wurde sicherlich die Komplexität der Integration Neuer Technologien und vor allem von Computeralgebrasystemen in den „normalen“ Unterricht unterschätzt, welche

[2] Man spricht hier auch vom White-Box-Black-Box-Prinzip.

[3] Diese Ideen wurden gar zu einer „Gerüstdidaktik“ erweitert, die es ermöglicht, augenblicklich nicht verhandene Fähigkeiten durch ein „Gerüst“ zu überbrücken und dadurch zu übergeordneten Lerninhalten voranschreiten zu können (KUTZLER 1995).

[4] Einen Überblick gibt www.t3ww.org.

durch die wechselseitige Beziehung von Veränderungen auf verschiedenen Ebenen entsteht: der technischen, inhaltlichen und methodisch-didaktischen Ebene.

Genau an diesem Punkt setzen die Überlegungen zu einer „Theorie der instrumentellen Entwicklung" („instrumental genesis" oder „instrumental orchestration") an, wie sie in jüngster Zeit etwa DRIJVERS U. HERWAARDEN (2002), ARTIGUE (2002), DRIJVERS U. GRAVEMEIJER (2005) oder TROUCHE (2005b) aufbauend auf VÉRILLON U. RABARDEL (1995) entwickelt haben. Dabei wird die Frage untersucht, wie ein Taschencomputer zu einem für eine bestimmte Problemlösung hilfreichen *Instrument* oder *Werkzeug* wird. Dazu ist es – nach dieser Theorie – insbesondere notwendig, dass eine Wechselbeziehung zwischen Taschencomputer (dem Gerät oder Artefakt) und Benutzer entwickelt wird.

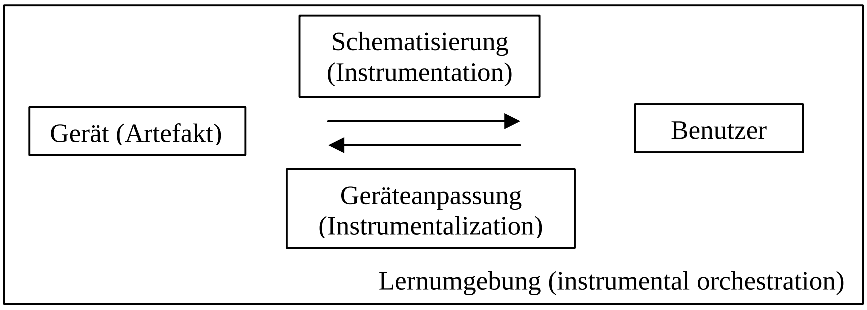


Abb. 1: Theorie der Instrumentellen Entwicklung (instrumental genesis)

Beim *Prozess der Schematisierung* (Instrumentation) werden beim Benutzer mentale Schemata oder Modelle über Möglichkeiten und Grenzen des Gerätes – in bestimmten Problemstellungen – entwickelt (z. B. über Menüstruktur, Syntax von Befehlen, Grenzen der internen Genauigkeit des Rechners oder Bildschirmauflösung). Beim *Prozess der Geräteanpassung* (Instrumentalization) wird das Gerät der Tätigkeit des Benutzers angepasst (durch Veränderung von Menüs, Einrichten von Makros, Programmieren oder Definieren von Befehlen). In der *Entwicklung dieser instrumentellen Wechselbeziehung* (instrumental genesis) wird ein Gerät zu einem *Instrument* oder *Werkzeug*, mit dem sowohl technisches Wissen oder Bedienungswissen als auch Wissen über seinen adäquaten Einsatz beim Benutzer einhergeht. Die zentrale Aufgabe besteht nun darin, die *Lernumgebung* oder die *instrumentelle Orchestrierung* zu entwickeln, in der diese Werkzeugentwicklung vor sich geht.

2 Empirische Untersuchungen zum CAS-Einsatz im Mathematikunterricht

Es gibt mittlerweile zahlreiche empirische Untersuchungen zum CAS-Einsatz im Mathematikunterricht. Prototypisch für deren Ziele, Durchführung und Ergebnisse sind sicherlich die österreichischen CAS-Projekte. Diese begannen mit dem Derive-Projekt zu Beginn der 1990er Jahre, als Österreich das erste Land der Welt war, in dem alle Gymnasien mit einer Generallizenz für ein CAS ausgestattet wurden, und bei dem erste Erfahrungen mit einem CAS-Einsatz in größerem Umfang gesammelt werden konnten.

Durch Schüler- und Lehrerbefragungen wollte man dabei vor allem die Einstellungen der Befragten und deren Einschätzung des neuen Werkzeugs erfgründen. Bei den folgenden TI-92-Projekten standen dann stärker die Erarbeitung geeigneter Unterrichtmaterialien, die Leistungsmessung und die Entwicklung von Kompetenzen wie eigenverantwortliches technologieunterstütztes Arbeiten im Vordergrund. Das neueste Projekt „CAS V" (ab 2004) versucht nun eine Einengung auf ein bestimmtes Werkzeug zu vermeiden und elektronische Medien in ihrer Wechselbeziehung zu Kompetenzen zu sehen, wie sie auch im Zusammenhang mit den „KMK-Standards" in Deutschland diskutiert werden.

Die zentralen Ergebnisse dieser Projekte haben sich mittlerweile auch in anderen Untersuchungen weltweit bestätigt. Beim CAS-Einsatz kommt dem Arbeiten mit Darstellungen eine größere Bedeutung zu, es wird verstärkt experimentell gearbeitet, indem Vermutungen durch (systematisches) Probieren erhalten werden, und es treten vermehrt selbsttätiges Arbeiten und kooperative Arbeitensformen auf. Viele empirische Untersuchungen in diesem Bereich beschränken sich allerdings auf einen Einsatz des Rechner über „lediglich" einige Wochen (etwa RASFELD 1999, WEIGAND 1999, BARZEL u. MÖLLER 2001, DRIJVERS 2003, PIERCE a. STACEY 2004, GUIN ET AL. 2005), wohingegen es noch an Erfahrungen mit dem langfristigen Einsatz mangelt.[5]

Gegenwärtig schreitet die Integration der Taschencomputer in den „normalen" Mathematikunterricht fort. In allen Bundesländern in Deutschland gibt es mittlerweile zumindest Pilotprojekte zum Einsatz von CAS (GRIEBEL 2005). Dabei geht es zum einen um die Frage nach der Praktikabilität des Einsatzes im Unterricht, zum anderen stehen aber Fragen im Vordergrund, wie der TC in Prüfungen eingesetzt werden kann und wie sich Prüfungsaufgaben und Leistungen der Schülerinnen und Schüler verändern.

Nun ist der Einsatz von CAS in schriftlichen Prüfungen mittlerweile schon vielfach untersucht worden. Weitgehend übereinstimmend sind die Ergebnisse dahingehend (etwa BROWN 2003), dass sich Struktur und Typen der Fragen gegenüber den früheren CAS-freien Prüfungen zwar nicht wesentlich verändern, dass durch den CAS-Einsatz aber Schülerinnen und Schülern eine größere Vielfalt an Lösungsstrategien ermöglicht wird und sie ihre Strategien dadurch individuell auswählen können. Dies bedeutet insbesondere für die Aufgabensteller, dass sie – auch im Hinblick auf die Bewertung – mit Aufgaben einhergehende mögliche Lösungsstrategien beim Erstellen der Aufgaben mitbedenken müssen. Gerade im Zusammenhang mit den gegenwärtigen Diskussionen um offene Aufgaben, um eine größere Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler, um produktive Aufgaben sowie einen aktiv-entdeckenden Unterricht gewinnen derartige Arbeitsweisen in Prüfungen als Katalysator für eine veränderte Unterrichtsgestaltung an Bedeutung.

Im Folgenden wird die Evaluation eines Unterrichtsversuchs zum CAS-Einsatz in der 10. Jahrgangsstufe dreier bayerischer Gymnasien dargestellt. Es werden Veränderungen bestimmter Kompetenzen durch einen Vor- und Nachtest erfasst, die Schülerinnen und Schüler werden nach ihrer Einschätzung des Unterrichts mit CAS gefragt, es wird die Art und Weise des CAS-Einsatzes – vor allem im Hinblick auf Veränderungen der Sozialformen – aufgrund von Stundenprotokollen der unterrichtenden Lehrer festgestellt und schließlich werden Veränderungen bei Prüfungsaufgaben analysiert.

---

5 Ein Beispiel für einen derartigen Einsatz ist die Untersuchung von KENDAL U. STACEY (2002), die Unterrichtsveränderungen von zwei Lehrerinnen beim CAS-Einsatz über zwei Jahre hinweg begleitet und untersucht haben.

3 Der Unterrichtsversuch

In sechs 10. Klassen (im Folgenden als CAS-Klassen bezeichnet) an drei bayerischen Gymnasien (insgesamt 137 Schülerinnen und Schüler) wurde über ein Jahr hinweg der TI Voyage 200 (im Folgenden als TC – Taschencomputer – bezeichnet) im Unterricht und in Prüfungen eingesetzt. Zwei Klassen gehörten dem neusprachlichen Zweig mit wöchentlich 3 Stunden Mathematik an, vier Klassen dem naturwissenschaftlichen Zweig, in dem wöchentlich eine zusätzliche Stunde im Rahmen des „Wahlpflichtgebietes Informatik" zur Verfügung stand. In dieser Zusatzstunde wurden mathematische Themen behandelt (p-Berechnungen, Folgen und Reihen, Heron-Algorithmus) und mit Hilfe der Programmiersprache des TC sowie des integrierten Tabellenkalkulationsprogramms dargestellt. Die Schülerinnen und Schüler dieser Klassen hatten keine Erfahrungen mit dem CAS-Einsatz. Als Kontrollklassen wurden vier 10. Klassen (121 Schülerinnen und Schüler – zwei Klassen neusprachlicher und zwei mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig) an drei bayerischen Gymnasien in den Test einbezogen.

Bei diesem Modellversuch müssen zwei Besonderheiten beachtet werden, die bei einer Übertragung der Ergebnisse auf den „normalen Unterricht" Vorsicht gebieten. Zum einen hatten die in den CAS-Klassen unterrichtenden Lehrer eine langjährige Erfahrung im Umgang mit Neuen Technologien und bildeten insbesondere 2000/01 den Arbeitskreis „Computeralgebrasysteme" des Instituts für Schulpädagogik und Bildungsforschung.[6] Im Modellversuch haben sich die Lehrer gegenseitig über ihren Unterricht informiert, ansonsten aber – im Rahmen des Lehrplans – nach ihrem eigenen Konzept unterrichtet. Zum Zweiten war Schülern und Lehrern bekannt, dass – auf Grund der Vorgaben des Bayerischen Kultusministeriums – die TC in der 11. Klasse nicht mehr verwendet werden durften. Folglich ist damit zu rechnen, dass sich einige Schülerinnen und Schülern nur insoweit mit dem Werkzeug auseinandersetzten, sich auf das Gerät „eingelassen haben", als es für das „Durchkommen" in dieser Jahrgangsstufe erforderlich war. Folgende Inhalte werden in der 10. Klasse unterrichtet:

- Rechnen mit Potenzen und Potenzgesetze;
- Potenzfunktionen;
- Folgen und Reihen;[7]
- Exponential- und Logarithmusfunktionen;
- Kreismessung;
- Trigonometrie;
- Volumen und Oberfläche von Zylinder, Kegel und Kugel.

Die durchgeführte Evaluation sollte Antworten auf folgende Fragen liefern:

1. Lassen sich hinsichtlich zentraler mathematischer Fähigkeiten (Termumformungen, Interpretieren von Graphen, Lösen von Gleichungen, Arbeiten mit Tabellen, Arbeiten mit Formeln) nach einem Jahr Unterschiede zwischen den CAS- und den Kontrollklassen feststellen?

---

[6] Siehe www.isb.bayern.de und nach „Arbeitskreis CAS" suchen.

[7] In den verschiedenen Klassen wurden Folgen und Reihen unterschiedliche Bedeutung beigemessen. In einer Klasse sind rekursiv definierte Folgen und Reihen sehr ausführlich behandelt worden. Im bayerischen Lehrplan sind dagegen nur *geometrische Folgen* explizit als verbindlicher Inhalt vorgegeben.

2. Lassen sich bei den Versuchsklassen unterschiedliche Auswirkungen des CAS-Einsatzes bei „guten“ und „schlechten“ Schülerinnen und Schülern[8] feststellen?
3. Wie verändern die unterrichtenden Lehrer die Prüfungsaufgaben in den CAS-Klassen?
4. Welche Einstellungen entwickeln die Schülerinnen und Schülern der Versuchsklassen zu dem neuen Werkzeug?
5. Welche Unterrichtsmethodik und Unterrichtsformen herrschen in den CAS-Klassen vor?

Die Untersuchungsfragen sind hier auf Veränderungen *in den Modellklassen* bezogen. Aufgrund der oben beschriebenen Besonderheiten oder Einschränkungen des Modellversuchs ist sicherlich Vorsicht beim Übertragen der Ergebnisse auf einen – zukünftigen – „normalen“ Unterricht mit CAS-Einsatz geboten. Das Ziel dieses Modellversuchs war es aber vor allem, die Möglichkeiten und Chancen, aber auch Probleme und Schwierigkeiten des CAS-Einsatzes an bayerischen Gymnasien zu zeigen und Planungshinweise für einen mehrjährigen Unterrichtsversuch in der gymnasialen Oberstufe zu geben.

Testinstrumente

Die Fragen 1 und 2 wurden durch eine klassische Vor- und Nachtestreihe in Experimental- und Kontrollklassen beantwortet. Dabei wurden beide Tests von allen Klassen mit „Papier und Bleistift“ geschrieben, die Benutzung des Rechners war hier nicht erlaubt. Zur Beantwortung der 3. Frage wurden die Prüfungsaufgaben nachträglich durch ein externes Expertenurteil eingeschätzt. Zu der 4. Frage wurde ein Fragebogen mit Antworten im Rahmen einer 5-stufigen Rating-Skala und Fragen mit offenen verbalen Antworten entwickelt. Zur Beantwortung der 5. Frage führten die Lehrer in den CAS-Klassen Stundenprotokolle, in denen Thema der Stunde, Unterrichtszeit mit CAS-Einsatz und Art des CAS-Einsatzes festgehalten wurden.

4 Ergebnisse

4.1 Der Vortest

Zu Beginn des Schuljahres 2003/2004 wurde von den CAS-Klassen und den Kontrollklassen ein Vortest geschrieben (siehe Anhang). Insgesamt wurden 258 ausgefüllte Testbögen (137 der CAS-Klassen, 121 der Kontrollklassen) ausgewertet.

Im Folgenden sind die Testergebnisse der Gesamtgruppe (CAS- und Kontrollklassen) dargestellt. Jede Aufgabe wurde mit max. 1 Punkt bewertet und Punktabzüge wurden in 0,25-Schritten vorgenommen. So wurden beispielsweise bei der 1. Aufgabe (Vereinfachen eines Terms) 0,25 Punkte abgezogen, wenn die binomische Formel richtig angewandt und „bis auf das x“ entsprechend gekürzt wurde, es wurden 0,5 Punkte abgezogen, wenn die binomischen Formel richtig angewandt, dann aber Fehler beim weiteren Kürzen auftraten, und es wurden 0,75 Punkte abgezogen, wenn nur „das x gekürzt“ wurde. Alle Aufgaben wurden von einer Person bewertet.

[8] Die verwendeten Leistungsbezeichnungen „gut“ und „schlecht“ beziehen sich dabei auf die Ergebnisse des Eingangstests.

Abb. 2 zeigt die Gegenüberstellung der Testergebnisse von CAS-Gruppe und Kontrollgruppe und lässt den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben erkennen.

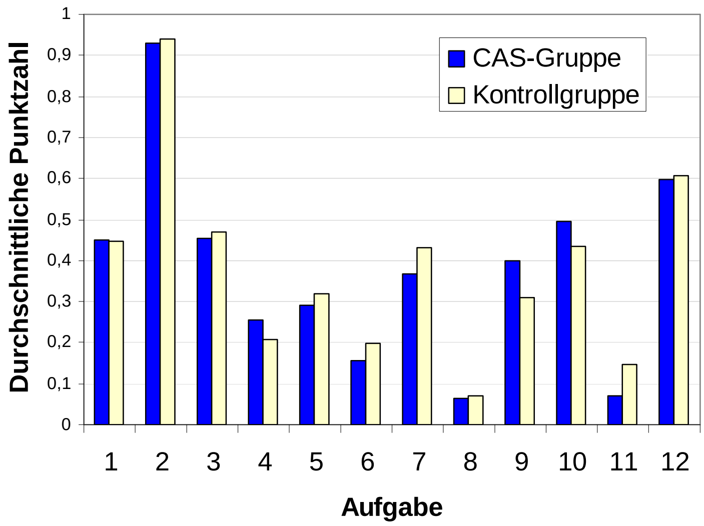


Abb. 2: Ergebnisse des Vortests

Über alle Aufgaben hinweg gibt es keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen ($t = 0,22$, $df = 128$). Bzgl. einzelner Aufgaben ergibt der t-Test nach Student einen signifikanten Unterschied (auf dem 5% Niveau) lediglich bei den Aufgaben 9 und 11. Dabei bearbeitete die CAS-Gruppe Aufgabe 9 erfolgreicher, die Kontrollgruppe hingegen Aufgabe 11. Hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit können beide Gruppen also als gleichwertig oder homogen angesehen werden.

Aufgabe 2, bei der es um das Erkennen äquivalenter Terme ging, wurde am besten bearbeitet. Die größten Schwierigkeiten bereiteten Aufgabe 8, bei der eine Funktionsvorschrift aus einer Wertetabelle entwickelt werden sollte, und Aufgabe 11, bei der es um das graphische Lösen einer quadratischen Gleichung ging.

4.2 Der Nachtest

Am Ende des Schuljahres 2003/2004 wurde ein Endtest geschrieben. Auch bei diesem Test war der Rechner *nicht* zugelassen. Die Aufgaben 4, 6, 8, 10, 11 wurden im Endtest leicht verändert, indem andere Funktionen bzw. Funktionstypen verwendet wurden.[9] Es wurden 246 Bögen ausgewertet (137 der CAS-Klassen, 109 der Kontrollklassen).

Abb. 3 zeigt die Ergebnisse der Gesamtgruppen von Vor- und Nachtest im Vergleich:

[9] Dadurch ist die unmittelbare Vergleichbarkeit entsprechender Aufgaben aus Vor- und Nachtest zumindest eingeschränkt.

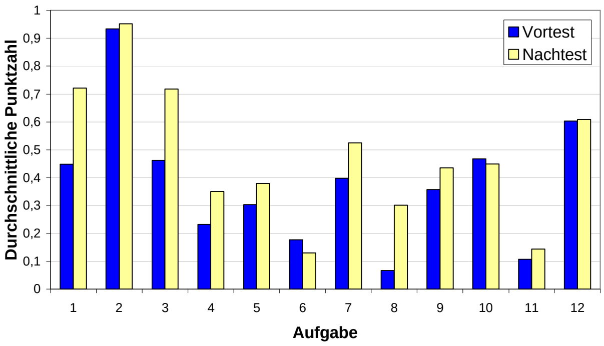


Abb. 3: Ergebnisse Vor- und Nachtest der Gesamtgruppe

Im Endtest waren die Ergebnisse i. A. besser, was natürlich einerseits zu erwarten war, da bei den Schülerinnen und Schülern ein Lernzuwachs während des Jahres stattgefunden hat. Andererseits waren die Aufgaben so ausgewählt, dass Grund- oder Basiswissen gefragt war, das nicht unmittelbar im Zentrum des Unterrichts der 10. Klasse steht. Die Aufgaben 6 und 10 des Nachtest wurden schlechter beantwortet als die entsprechenden Aufgaben des Vortests, was wohl auf die zu starke Abänderung der Aufgabenstellung beim Nachtest zurückzuführen ist.

Abb. 4 stellt die Ergebnisse des Nachtests von Experimental- und Kontrollgruppe gegenüber.

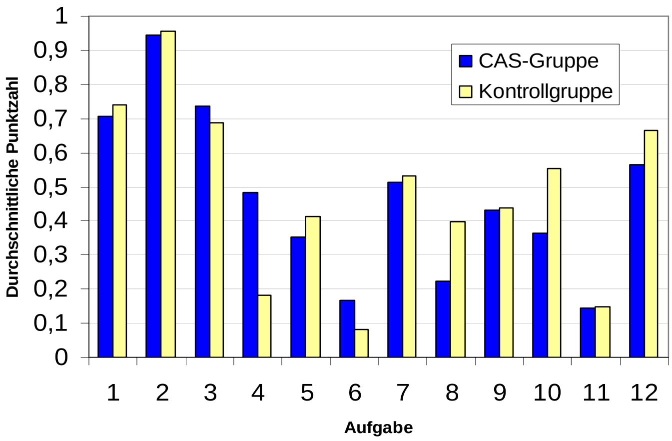


Abb. 4: Vergleich der Testergebnisse von CAS- und Kontrollgruppe

Die Auswertung mit dem *t-Test nach Student* ergab, dass bei etwa der Hälfte der Aufgaben (1, 2, 3, 5, 7, 9, 11) kein signifikanter Unterschied zwischen CAS- und Kontrollgruppe vorhanden ist. Die größten Differenzen zwischen den beiden Versuchsgruppen waren bei den Aufgaben 4, 6, 8, 10 und 12. Bei den Aufgaben 4 und 6 war ein Transfer zwischen Funktionsgleichung und -graph gefordert. Aufgabe 4 wurde höchst signifikant ($t = 6{,}18$, $df = 120$) und Aufgabe 6 sehr signifikant ($t = 2{,}68$, $df = 120$) von den CAS-Klassen erfolgreicher bearbeitet. Die Kontrollklassen hingegen bearbeiteten Aufgabe 8 höchst signifikant ($t = 3{,}05$, $df = 120$), Aufgabe 10 sehr signifikant ($t = 4{,}45$, $df = 120$) sowie Aufgabe 12 signifikant ($t = 2{,}12$, $df = 120$) besser als die Klassen, die mit dem TC gearbeitet hatten. Diese Aufgaben beinhalten die Bestimmung einer Funktionsvorschrift aus einer Wertetabelle sowie die von Lösungsmengen von Gleichungen. Aufgabe 12 ist eine raumgeometrische Berechnungsaufgabe.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler der CAS-Klassen auch beim traditionellen (d. h. mit Papier und Bleistift) Arbeiten mit Funktionsgraphen einen höheren Leistungszuwachs gegenüber den Kontrollklassen (ohne TC) erzielt haben.[10] Es lassen sich keine Unterschiede zwischen CAS- und Kontrollklassen beim Arbeiten (mit Papier und Bleistift) mit Variablen, Termen und Tabellen feststellen. Dies entkräftet ein immer wieder angeführtes Argument, dass algebraische Fertigkeiten beim Rechnereinsatz unterentwickelt bleiben. Es zeigt sich aber eine Verschlechterung der Leistungen der CAS-Klassen beim Lösen von Gleichungen. Der Grund für das schlechtere Lösen von (einfachen) Gleichungen der Art $x^2 + 5x = 0$ oder $\sin x = 0{,}5$ in den CAS-Klassen ist aus den vorliegenden Daten nicht zu ersehen.

4.3 Vergleich zwischen leistungsschwachen und -starken Schülerinnen und Schülern

Die Testergebnisse wurden zusätzlich auf die Verteilung der leistungsschwachen und leistungsstarken Schülergruppen und eventueller Verschiebungen zwischen Vor- und Nachtest untersucht. Hierbei wurden die Schülerinnen und Schüler anhand der beim Eingangstest erzielten Gesamtpunktzahl in drei Gruppen unterteilt: schwach, mittel und gut.[11] Im Ausgangstest wurde wiederum das Abschneiden dieser Leistungsgruppen ermittelt.

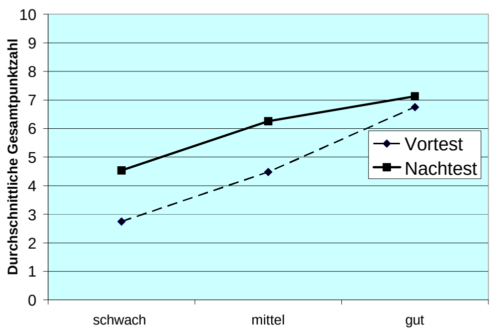


Abb. 5: Vergleich von Leistungsgruppen der CAS-Klassen bei Vor- und Nachtest

Es lässt sich feststellen, dass der „Schereneffekt“, dass nämlich die guten Schülerinnen und Schüler noch zusätzlich gefördert und die schwachen Schülerinnen und Schüler noch schwächer werden, hier nicht eingetreten ist. Vielmehr ist ein Leistungszuwachs vor allem bei den schwachen und mittleren Schülergruppen festzustellen, wohingegen die „guten“ Schülerinnen und Schüler sich nur wenig verbessern.

---

[10] Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass der Rechner bei Vor- und Nachtest *nicht* verwendet werden durfte.

[11] Die durchschnittliche Gesamtpunktzahl beim Vortest lag bei etwa 4,5 Punkten. Die Gruppe wurde nach folgenden Kriterien klassifiziert: leistungsschwach: Weniger als 3,5 Punkte (34 Schüler); mittelmäßig: Zwischen 3,5 und 5,5 Punkten (61 Schüler); leistungsstark: Mehr als 5,5 Punkte (30 Schüler).

Die entsprechende Auswertung der Aufgabenbearbeitung der Kontrollklasse zeigt, dass hier der Leistungszuwachs über alle Leistungsgruppen hinweg fast einheitlich war, dass insbesondere der Unterschied zwischen „guten“ und „schlechten“ Schülerinnen und Schülern gleich geblieben ist. Der Unterschied beträgt im Vortest 4,44 und im Nachtest 4,62.

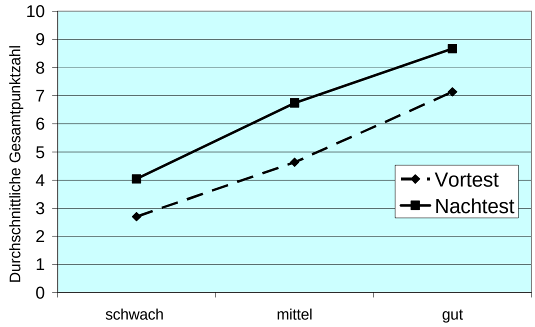


Abb. 6: Vergleich von Leistungsgruppen der Kontroll-Klassen bei Vor- und Nachtest

4.3 Schüler-Fragebogen

Von den CAS-Klassen wurde ein Fragebogen zur Einschätzung des Unterrichts mit dem TC ausgefüllt. Die Schülerinnen und Schüler sollten zunächst Aussagen zum TC-Einsatz in einer 5-stufigen Rating-Skala bewerten und anschließend noch drei Fragen mit offenen Antworten zum Einsatz des TC beantworten. Es wurden 131 Fragebögen ausgewertet. Die folgende Tabelle zeigt die Verteilungen in Prozent:[12]

		++ [13]	+	o	–	– –
1.	Der Unterricht mit dem Voyage 200 war interessanter als der frühere Unterricht.	16 %	40 %	22 %	11 %	10 %
2.	Der Unterricht wurde durch den Voyage 200 leichter.	10 %	36 %	22 %	19 %	13 %
3.	Der Unterricht war abwechslungsreicher.	21 %	47 %	14 %	9 %	8 %
4.	Ich habe in diesem Unterricht mehr gelernt als im sonstigen Unterricht.	2 %	15 %	44 %	17%	22 %
5.	Mathematik hat mir in diesem Unterricht mehr Freunde bereitet.	8 %	24 %	36 %	15 %	17 %
6.	Mit dem Voyage 200 habe ich eine ganz neue Seite der Mathematik kennen gelernt.	9 %	35 %	22 %	19 %	15 %
7.	Ich war aktiver als im sonstigen Unterricht.	4 %	11 %	42%	18 %	25 %
8.	Ich habe mich über Unterricht und Hausaufgaben hinaus eigenständig mit dem Voyage 200 beschäftigt.	8 %	32 %	11 %	25 %	24 %

[12] Werte auf ganze Zahlen gerundet.

[13] ++: trifft völlig zu, +: trifft zu; o: es war kein Unterschied; –: trifft nicht zu; – –: trifft überhaupt nicht zu.

9.	Ich würde gerne weiterhin im Mathematikunterricht mit dem Voyage 200 arbeiten.	32 %	21 %	8 %	11 %	27 %
10.	Ich würde meinen Schulfreunden aus der 9. Klasse empfehlen, unbedingt in eine Klasse zu gehen, in dem mit dem Voyage 200 gearbeitet wird.	14 %	31 %	9 %	24 %	21%
11.	Ich habe den Voyage 200 häufig zu den Hausaufgaben benutzt.	17 %	42 %	10 %	19 %	11 %
12.	Die Bedienung des Voyage 200 ist sehr einfach.	9 %	30 %	9 %	35 %	16 %
13.	Ich habe häufig lange nach bestimmten Befehlen auf dem Voyage 200 gesucht.	15 %	40 %	5 %	32 %	7 %

Abb. 7: Auswertung des Schüler-Fragebogens

Die Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

- Im Allgemeinen schätzen die Schülerinnen und Schüler den Unterricht mit dem TC interessanter (1) und abwechslungsreicher (3) ein. Der Einsatz des TC ermöglicht den Schülerinnen und Schülern eine neue Seite der Mathematik kennen zu lernen (6).
- Etwa die Hälfte der Schülerinnen und Schüler empfindet eine Erleichterung durch den Gebrauch des Taschencomputers gegenüber dem rechnerfreien Mathematikunterricht (2).
- Die Schülerinnen und Schüler sind nicht der Meinung, dass sie im Unterricht mit dem TC mehr gelernt haben (4) oder dass sie aktiver waren (7). Ebenso stimmen Sie mehrheitlich nicht der Meinung zu, dass ihnen Mathematik mehr Freude bereitet hat (5).
- Die Schülerinnen und Schüler nutzten den Rechner häufig für ihre Hausaufgaben (11)
- Hinsichtlich einer weitergehenden Beschäftigung mit dem Rechner lassen sich zwei Gruppen unterscheiden: Über ein Drittel der Schülerinnen und Schüler arbeitet über Unterricht und Hausaufgaben hinaus mit dem Gerät, wohingegen etwa die Hälfte diese Frage verneint (8).
- Diese Aufteilung in zwei Gruppen zeigt sich sowohl bei den Fragen nach dem Wunsch einer weiteren Benutzung des Gerätes (9, 10), als auch bei Fragen nach Schwierigkeiten mit der Bedienung des Gerätes (12, 13).

Die Antworten zu den Fragen 8 – 13 lassen eine deutliche Polarisierung in zwei Gruppen erkennen. Eine Gruppe, die gerne mit dem TC arbeitet, sich über den Unterricht hinaus mit dem Gerät beschäftigt, keine größeren Schwierigkeiten mit der Bedienung des Gerätes hat und den Rechner auch weiterhin benutzen möchte. Die Schülerinnen und Schüler der anderen Gruppe empfinden weniger Freude am Arbeiten mit dem Rechner, sie haben sich wenig über den Unterricht hinaus mit dem Gerät beschäftigt und haben Schwierigkeiten bei der Bedienung des Gerätes. Für diese Gruppe war es nach Aussage der Lehrer immer wieder ein – nach Meinung der Lehrer aber nur vorgeschobenes – Argument, dass man in der folgenden Klasse das Gerät nicht mehr verwenden dürfe und man sich deshalb nicht so intensiv damit auseinandersetzen müsse.

Im Folgenden sind die häufigsten Antworten auf die offenen Fragen zusammengestellt. Ähnliche Aussagen wurden – in Schlagworten – zusammengefasst (Zahl in Klammern gibt die Häufigkeit der Nennung an).

Ist Ihnen etwas ganz besonders positiv in Erinnerung geblieben, was sie mit dem Voyage 200 (im Unterricht oder zuhause) gesehen oder erlebt haben?

Antworten:

- Zeichnen von Graphen (17)
- Abwechslungsreicher und lebensnaher Unterricht
- Kontrollfunktion der Rechner sowohl bei Hausaufgaben als auch bei Schulaufgaben (15)
- Vereinfachung von Rechnungen (13)
- Tabellen erstellen (11)
- Programmieren (9)

Was hat Ihnen beim Umgang mit dem Voyage 200 die größten Schwierigkeiten bereitet?

Antworten:

- Komplizierter Aufbau und Bedienung (29)
- Zu viele Befehle/Programme – Schwierigkeiten beim Auffinden der richtigen Befehle/Tastenkombinationen (26)
- Unklare Fehlermeldungen (11)
- Umständliche/Zeitaufwendige Eingabe von Gleichungen/Termen (9)
- Zu kleine Tasten (4)
- Unkonventionelle Ausgabe von Ergebnissen (2)
- Englische Sprache (2)

Was sollte Ihr Lehrer beim Unterricht mit dem Voyage 200 ändern? Machen Sie Vorschläge!

Antworten:

- Konventionelle Methoden, z. B. händisches Rechnen, werden vernachlässigt (20)
- Öfter mit dem Voyage 200 arbeiten (13)
- Mehr auf Bedienung des Voyage 200 eingehen (11)
- Zusätzliche Stunden, um jeweilige Befehle für einzelne Themengebiete zu üben (7)
- Langsameres Vorgehen bzw. einfachere Aufgaben, um den Umgang mit dem Gerät zu erlernen (7)

Bei dieser Auflistung fällt insbesondere auf, dass bei den „positiven Erinnerungen“ überwiegend mathematikbezogene Aussagen auftreten: Graphen zeichnen, Kontrolle von Rechnungen, Tabellen erstellen. Bei den „negativen Erinnerungen“ fällt der fast ausschließliche Bezug zu den Bedienungselementen des Rechners auf. Dies zeigt, dass viele Schülerinnen und Schüler die inhaltlichen Möglichkeiten des Werkzeugs durchaus erkannt haben. Da der Fragebogen anonym bearbeitet wurde, ist leider keine Zuordnung zu „guten“ oder „schlechten“ Schülerinnen und Schülern möglich.

4.4 Stundenprotokolle

Die Lehrer der Modellklassen führten im Schuljahr 2003/2004 Protokoll über den Einsatz des TC im Mathematikunterricht, indem sie behandelte Themen, Zeitumfang, Unterrichtsform des CAS-Einsatzes und verwendete CAS-Fenster stundenweise in verschiedenen Unterrichtsphasen festhielten.

Unterrichtsinhalt, Aufgabe, Arbeitsblatt, ...	Unterrichtsform des CAS-Einsatzes	Überwiegend verwendete CAS-Fenster	Zeitumfang in Minuten: Etwa .....
	☐ Lehrerzentriert ☐ Individuelles Arb. ☐ Partnerarbeit ☐ Gruppenarbeit ☐ Projektarbeit ☐	☐ Algebra-Fenster ☐ Graphik-Fenster ☐ Tabellen-Fenster ☐ Geometrie-Fenster ☐ ………………….	

Abb. 8: Ausschnitt aus dem Lehrer-Stundenprotokoll

Die Einträge wurden von den Lehrern im Allgemeinen nach dem Unterricht vorgenommen und erlauben deshalb nur eine grobe Einschätzung des zeitlichen Umfangs des CAS-Einsatzes.

Die Auswertung der Stundenprotokolle ergab, dass in etwa der Hälfte der Mathematikstunden der TC genutzt wurde. In diesen Stunden stand wiederum etwa die Hälfte der Anteile der Unterrichtszeit in Beziehung zu diesem Gerät. Dies bedeutet nicht, dass während dieser Zeit ständig der Rechner benutzt wurde, sondern dass im Rahmen dieser Unterrichtsphase *auch* der Rechner benutzt wurde.[14]

Hinsichtlich der gewählten Unterrichtsformen beim TC-Einsatz lässt sich feststellen, dass in etwa 30 % der Stunden (u. a.) Partner- bzw. Gruppenarbeit und in ebenfalls etwa 30 % der Stunden individuelles Arbeiten oder ein Schülervortrag vorkamen. Auch wenn aufgrund dieser Daten keine gesicherte empirische Aussage möglich ist,[15] so lässt sich durch den Vergleich mit Aufzeichnungen des traditionellen (d. h. rechnerfreien) deutschsprachigen Mathematikunterrichts (NOCKER 1996, TIMSS-Video-Studie in Baumert u. a. 1997, S. 231f.) zumindest die Hypothese aufstellen, dass der Rechner ein Katalysator für Unterrichtsformen ist, die immer wieder – gerade in der TIMSS- und PISA-Diskussion – insbesondere für den deutschen Mathematikunterricht gefordert werden.

---

14 Dies kann eine Demonstration mit dem Display seitens des Lehrers oder eines Schüler, das gelegentliche Benutzen des Rechners bei einzelnen Schülern oder auch ein systematisches Arbeiten der ganze Klasse mit dem Rechner bedeuten.

15 Hierzu bedürfte es genauerer zeitlicher Aufzeichnungen der entsprechenden Sozialformen in Experimental- und Kontrollklassen.

Die hauptsächlich verwendeten Modi des TC waren das Graphik- (ca. 40 %) und das Algebra-(Home-)Fenster (ca. 30 %), wohingegen die Geometriekomponente nur selten (ca. 5 %) genutzt wurde. Dies bestätigt die schon häufig geäußerte Kritik, dass das Display für geometrische Betrachtungen schlichtweg zu klein ist. Die restlichen Anteile beanspruchten zu ca. 14 % das Tabellen-Fenster und zu ca. 10 % andere Fenster, wie etwa der „Programmeditor“.[16]

4.5 Der Einsatz in Klassenarbeiten

Eine Analyse der Klassenarbeiten zeigt, dass die überwiegende Mehrzahl der Aufgaben in gleicher Weise auch dann gestellt werden könnten,[17] wenn in den Prüfungen kein TC erlaubt gewesen wäre. Nun waren die Aufgaben aber bewusst so ausgewählt, dass die handwerklichen Fähigkeiten mit Papier und Bleistift nicht unterentwickelt blieben, da die Schülerinnen und Schüler in der 11. Klasse den Rechner ja nicht mehr verwenden durften. Darüber hinaus wurden aber auch bewusst Klassenarbeiten geschrieben, bei denen der Rechner nicht oder nur teilweise verwendet werden durfte, was durchaus sinnvoll ist, da viele der mit dem Rechner entwickelte Fähigkeiten – z. B. das Interpretieren von Funktionsgraphen – auch ohne Rechner zur Verfügung stehen sollen. Im Folgenden soll nun analysiert werden, welche Bedeutung dem Rechner in Klassenarbeiten zukommt.[18]

4.5.1 Neue Lösungsstrategien

Die beiden folgenden Beispiele zeigen mögliche inhaltliche Erweiterungen des Mathematikunterrichts der 10. Klasse, wenn ein TC zur Verfügung steht.

Beispiel: *Ein Quader besitzt die Länge 12 cm, die Breite 10 cm und die Höhe 18 cm. Die Länge wird um x verkürzt, die Breite um 5x verlängert und die Höhe um 3x verkürzt.*

a) *Erstelle den Term für das Volumen V(x) und zeichne den Verlauf des Graphs für die Funktion V(x).*
b) *Welches maximale Volumen (auf cm^3 genau) kann durch die Veränderung des Quaders erreicht werden? Für welchen Wert von x (auf Millimeter genau) ist dies der Fall?* [19]

Aufgabe a) zeigt, dass mathematische Grundlagenkenntnisse unabdingbar für das Arbeiten mit dem Rechner sind. Gibt man keinen geeigneten Zeichenbereich an, können höchst verwirrende Graphenausschnitte erhalten werden.

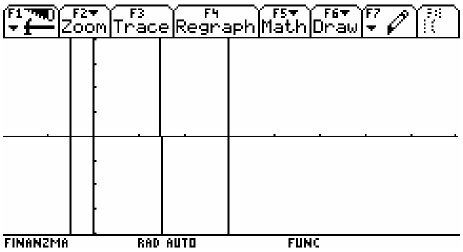
---

16 Die Programmierung des Rechners wurde etwa bei der Monte-Carlo-Methode zur Berechnung der Kreisfläche verwendet.

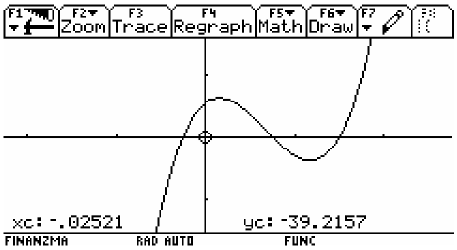
17 Einige der Aufgaben wurden von den Lehrern auch bereits in früheren Jahren in Klassenarbeiten gestellt.

18 Aufgrund der sehr begrenzten Ressurcen war es leider nicht möglich, auch Schülerlösungen zu analysieren.

19 Franz-Ludwig-Gymnasium Bamberg, Klasse 10 b, 3. Schulaufgabe (30. 04. 04), Aufgabe 1 b)



Ungeeigneter Zeichenbereich



Sinnvoller Zeichenbereich

Aufgabe b) ist ein typisches Beispiel für das näherungsweise Bestimmen der Lösung mit Hilfe des Graphen oder der Tabelle. Es zeigt, dass der Rechner zum symbolischen Rechnen alternative Lösungsstrategien erlaubt.

Beispiel: *Bestimme* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$. *Interpretiere die Anzeige des TI-Voyage 200!* [20]

Bei dieser Aufgabe geht es um das Beschreiben des Grenzwertes auf der intuitiven Ebene des Begriffsverständnisses.

4.5.2 Erweiterung der Lösungsstrategien

Beispiel: *Wo schneidet der Graph der Funktion* $f: x \to \frac{1}{2}\cdot(x-12)^4 - 5$ *die Koordinatenachsen? Beschreibe dein Vorgehen mit dem Rechner.*[21]

Die Lösungen dieser Aufgabe können unmittelbar am Graphen abgelesen, durch Knopfdruck („Zero-Befehl"), einen Menübefehl (solve(f(x)=0,x)) oder mit Hilfe einer Wertetabelle erhalten werden. Sie können auch mit Papier und Bleistift berechnet werden. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden dabei selbst, nach welcher Methode sie die Aufgabe lösen. Dieses Beispiel zeigt, dass der Einsatz des TC den Schülerinnen und Schülern ein erweitertes Spektrum an Lösungsstrategien zur Verfügung stellt. Im Unterricht wurden bei derartigen Aufgaben immer wieder „möglichst viele verschiedene Lösungen" einer Aufgabe gefordert.

Auch bei dem folgenden Beispiel gibt es verschiedene Lösungsstrategien:

Beispiel: *f(x)* = $\frac{5}{2}\sqrt[3]{x+2}$. *Für welchen x-Wert (auf 1 Dezimale) gilt f(x) = 4,5? Wie gehst du vor?*[22]

---

[20] HLG Landshut – 2. Stegreifaufgabe am 14. 10. 2003, Aufgabe 1

[21] Franz-Ludwig-Gymnasium Bamberg, Klasse 10 b, 1. Schulaufgabe (18. 11. 03), Aufgabe 3 b)

[22] Franz-Ludwig-Gymnasium Bamberg, Klasse 10 b, 2. Schulaufgabe (20. 1. 04), Aufgabe 2 c)

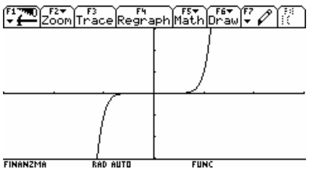
4.5.3 Der Rechner als heuristisches Hilfsmittel

Beispiel: *Geben Sie Definitionsbereich, Symmetrie und Wertemenge der Funktion mit* $g(x) = \frac{1}{(x+2)^4}$ *an.*[23]

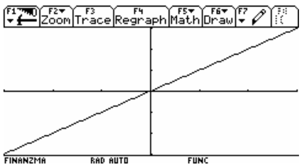
Hier lassen sich aus dem Graph der Funktion Hinweise auf die Lösung entnehmen. Dieses Beispiel zeigt, dass sich das in dieser Jahrgangsstufe betrachtete Funktionsspektrum durch den TC-Einsatz erweitert.

Beispiel: *Gegeben sei zu jedem ganzen p die Funktion* $f_p : x \mapsto x^{2p+7}$ *mit jeweils maximaler Definitionsmenge. Was kannst du über die Symmetrie der Graphen von* f_p *aussagen? (Knappe Begründung)*[24]

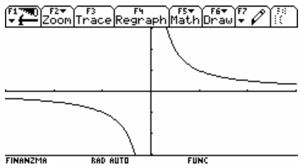
Der Rechner ist hier eine Hilfe, um durch das Betrachten von Einzelbeispielen auf die Lösungsidee zu kommen.



p = 1



p = - 3



p = - 4

Es zeigt sich aber auch, dass die Ausgabe im Graphik-Fenster nicht selbsterklärend ist, sondern dass die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein müssen, diese zu interpretieren.

4.5.4 Der Rechner als Kontrollinstrument

In vielfacher Hinsicht kann der Rechner als Kontrollinstrument eingesetzt werden, um mit Papier und Bleistift erhaltene Ergebnisse zu kontrollieren. Das folgende Beispiel zeigt dies bei Termumformungen.

Beispiel:
Vereinfachen Sie schrittweise mit Hilfe der Potenzgesetze so weit wie möglich:[25]

$$\left(\frac{3a^{-2}b^4}{4ab^{-2}}\right)^{2p} : \left(\frac{2b^{-4}}{3a^{-2}}\right)^{-3p}$$

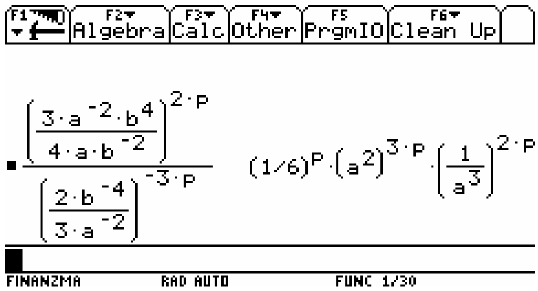
---

23 Franz-Ludwig-Gymnasium Bamberg, Klasse 10 a, 2. Schulaufgabe (11. 12. 03), Aufgabe 3 c)

24 Hans-Leinberger-Gymnasium Landshut, Klasse 10 a/c, 1. Schulaufgabe (14. 11. 03), Aufgabe 4 a)

25 Franz-Ludwig-Gymnasium Bamberg, Klasse 10 a, 2. Schulaufgabe (11. 12. 03), Aufgabe 1 b)

Der vollständig vereinfachte Term würde $\left(\frac{1}{6}\right)^p$ lauten. Als Ausgabe erhält man mit dem Voyage 200:



Wiederum zeigt sich hier, dass sowohl bei der Eingabe des Terms als auch beim Ablesen der auf dem Bildschirm dargestellten Ergebnisse einer Strukturerkennungskompetenz eine zentrale Bedeutung zukommt (vgl. etwa Heugl u. a. 1996, S. 175).

Der Optimismus der frühen Jahre des Rechnereinsatzes war häufig, dass die Bedienung der Rechner sehr bald so einfach werde, dass sie weitgehend intuitiv erfolgen könne und aus mathematischen Handlungen leicht ableitbar sei. Diese Hoffnung hat sich bis heute nicht erfüllt. Der Rechner ist ein Werkzeug oder Instrument, das nicht aus sich selbst heraus verständlich ist, dessen Bedienung vielmehr im Rahmen der Tätigkeit, für die er eingesetzt werden soll, gelernt werden muss.

Deshalb wurden in den Prüfungen der Modellklassen auch Aufgaben gestellt, die sich unmittelbar auf den Umgang mit dem TC bezogen, z. B. „Beschreibe dein Vorgehen mit dem Rechner“, „Wie überprüfst du das Ergebnis mit dem TI Voyage 200“ oder „Interpretiere die Anzeige des TI Voyage 200“.

5 Selbsteinschätzung des Unterrichts durch die Lehrer

In jeweils zwei schriftlichen Berichten haben die unterrichtenden Lehrer zum Schulhalbjahr und zum Ende des Schuljahres ihren eigenen Unterricht beschrieben. Darin wurden zum ersten übereinstimmend der Vorteil des Rechners in der Möglichkeit der einfachen graphischen und tabellarischen Darstellung von Funktionen gesehen. Damit können Gleichungen graphisch oder durch sukzessives Verändern von tabellarischen Werten gelöst werden. Insbesondere lassen sich jetzt auch Gleichungen lösen, etwa Polynomgleichungen höheren Grades, Exponential- oder logarithmische Gleichungen, die bisher nur in Spezialfällen im Unterricht behandelt wurden. Weiterhin eröffnen sich etwa bei der Modellierung von Umweltsituationen Zugänge zu Funktionstypen, die bisher nicht behandelt wurden, wie etwa Polynomfunktionen oder (diskrete) logistische Wachstumsfunktionen (die rekursiv definiert werden können). Schließlich ergibt sich die Möglichkeit, Darstellungen zu dynamisieren: Das betrifft graphische Darstellungen von Funktionsscharen, die Veränderbarkeit tabellarischer Werte oder die sukzessive numerische Berechnung algebraischer Terme.

Zum zweiten gewinnt die Möglichkeit der *Kontrolle von Rechnungen* mit Hilfe des TC an Bedeutung. Es lassen sich mit Papier und Bleistift durchgeführte algebraische

Umformungen numerisch an Einzelbeispielen überprüfen. Die Erfahrung der Lehrer zeigt, dass derartige Kontrollkompetenzen entwickelt werden müssen, dass dies aber häufig nur bei leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern gelingt. Leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern gelingt es dagegen nicht, beim Nichtübereinstimmen von Kontroll- und Ursprungsrechnung eine sinnvolle Fehlersuche und erfolgreiche Fehlerbehebung durchzuführen.

Zum dritten ergeben sich neue Möglichkeiten *diskreten Arbeitens*, etwa beim Arbeiten mit Folgen und Intervallschachtelungen. So lassen sich Potenzen mit irrationalen Exponenten oder Volumina bei Kegel und Kugel durch einbeschriebene Zylinder mit sukzessive verkleinerten Höhen approximativ berechnen. Bei Kreisumfang und Kreisfläche lassen sich iterative Berechnungen von Schülerinnen und Schülern gut selbst durchführen.

Durchgehend waren alle Lehrer der Meinung, dass sich vor allem leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sehr passiv beim Arbeiten mit dem Rechner verhalten und sich auch wenig mit der Bedienung des Gerätes auskennen. Gerade diese Schülerinnen und Schüler empfanden das Erlernen der Bedienung des Rechners als zusätzlichen „neuen Stoff". Für diese Schülerinnen und Schüler blieb der TC ein Gerät und entwickelte sich nicht zu einem Werkzeug.

Während die Schülerinnen und Schüler die Größe und Auflösung des Bildschirms als wenig störend empfanden, wurden aber die Möglichkeiten des Arbeitens mit dem Geometrieprogramm aufgrund des kleinen Bildschirms (auch) von den Schülern als nicht geometrieadäquat angesehen. Deshalb wurde der Geometrieteil des TC auch seitens der Lehrer wenig benutzt. Es ist eine offene Frage, ob durch einen häufigeren Gebrauch dieser TC-Komponente ein Gewöhnungseffekt eintreten wird.

Die Lehrer empfanden die Vorbereitung des Unterrichts aufgrund des Einbezugs eines neuen Mediums wesentlich zeitintensiver und die Durchführung des Unterrichts herausfordernd, vor allem aufgrund der Vielzahl unterschiedlicher inhaltlicher und technischer Probleme in offenen Unterrichtsphasen. Wie die von den Lehrern angesprochenen Aspekte den Unterricht tatsächlich verändert haben, konnte im Rahmen dieses Projekts nicht untersucht werden und bedarf eines größeren Untersuchungsdesigns (vgl. KENDAL U. STACEY 2002).

Ein großes Problem war das stete Mitbedenken, dass der Rechner im darauf folgenden Jahr nicht mehr verwendet werden durfte. Dadurch war – nach Aussage der Lehrer – die Möglichkeit des „Auslagerns" von Fertigkeiten, also das Übertragen von normalerweise von Schülerinnen und Schülern mit Papier und Bleistift durchgeführten Berechnungen an den Rechner nur in sehr eingeschränktem Maße möglich. Gerade diese Möglichkeit muss aber als eine zentrale und in Zukunft immer wichtigere Komponente beim Einsatz Neuer Technologien angesehen werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Der einjährige Modellversuch hat gezeigt, dass sich der Taschencomputer gut in den regulären Unterricht der 10. Klasse integrieren und in Prüfungen verwenden ließ. Individuelles Arbeiten sowie Partner- und Gruppenarbeit traten im Mathematikunterricht verstärkt auf. Dieses Ergebnis unterstützt die Hypothese, dass der TC zu einem Katalysator für immer wieder geforderte neue Unterrichtsformen werden kann. Insbesondere bei Schülervorträgen oder -erläuterungen mit Hilfe des am Overhead-Display angeschlossenen Rechners oder beim Berichten über Ergebnisse von Partner- und Gruppenarbeitsphasen zeigte sich, dass dem schriftlichen und mündlichen Beschreiben des Vorgehens und dem Interpretieren von TC-Ergebnissen – ganz im Sinne des KMK-Standards „Kommunikation“ – eine größere Bedeutung zukam.

Die Ergebnisse des Vor- und Nachtests bestätigen eine Kompetenzentwicklung in Bereichen, bei denen ein TC vorteilhaft eingesetzt werden kann: So haben die Schülerinnen und Schüler der CAS-Klassen beim Arbeiten mit Funktionsgraphen und beim Transfer zwischen Gleichung und Graph einen höheren Leistungszuwachs gegenüber den Kontrollklassen erzielt. Keine Unterschiede lassen sich beim Arbeiten mit Variablen, Termen und Tabellen feststellen. Dies zeigt insbesondere, dass kalkülhafte algebraische Fertigkeiten auch bei den CAS-Klassen nicht unterentwickelt bleiben. Das – im Rahmen des Versuchs nicht erklärbare – schlechtere Abschneiden der CAS-Klassen bei Aufgaben zum Lösen von – einfachen – Gleichungen und dem Arbeiten mit Tabellen weist darauf hin, dass alleine der Einsatz des Gerätes im Unterricht nicht automatisch zu einem besseren Verständnis der behandelten Inhalte führt, dass es hierzu vielmehr des Werkzeugaspekts des TC im Sinne der *Theorie der instrumentellen Entwicklung* bedarf, der in Wechselbeziehung zu den mathematischen Inhalten im Rahmen einer produktiven Lernumgebung entfaltet werden muss.

Das häufig befürchtete Auseinanderstreben der Leistungen beim TC-Einsatz zwischen leistungsschwachen und -starken Schülerinnen und Schülern („Schereneffekt“) konnte nicht beobachtet werden, im Gegenteil, dieser Unterschied hat sich bei den CAS-Klassen verringert, was vor allem auf die Leistungszuwächse der mittleren und leistungsschwachen Schülerinnen und Schüler zurückzuführen ist. Allerdings muss der gegenüber der Kontrollgruppe geringere Leistungszuwachs der – entsprechend der Ergebnisse des Vortests – „guten“ Schülerinnen und Schüler eingehender untersucht werden. Die Anlage dieses Modellversuchs lässt keine Rückschlüsse auf die Ursache für dieses Ergebnis zu.

Die in Klassenarbeiten gestellten Aufgaben unterscheiden sich nicht wesentlich von traditionellen Aufgaben, was bei diesem Modellversuch aber auch darauf zurückzuführen sein mag, dass der Rechner in der nachfolgenden 11. Jahrgangsstufe nicht eingesetzt werden darf und die Lehrer deshalb auf die Gleichwertigkeit der Klassenarbeiten mit denjenigen von „rechnerfreien Klassen“ großen Wert legten.

Durch den Rechnereinsatz in Prüfungen eröffnete sich den Schülerinnen und Schülern ein erweitertes Spektrum an Lösungsstrategien, etwa beim Gleichungslösen, und sie nutzten – nach Aussage der Lehrer – auch die vielfältigen Möglichkeiten (numerisch, algebraisch, geometrisch) zur Ergebniskontrolle ihrer Berechnungen (ob mit Papier und Bleistift oder mit dem Rechner durchgeführt). Eine systematische Untersuchung der aufgetretenen Lösungsstrategien war in diesem Versuch leider nicht möglich, das soll in dem Nachfolgeprojekt nachgeholt werden.

Ab dem Schuljahr 2005/06 ist der Modellversuch auf 10 Schulen ausgedehnt. Er startete wieder in den jeweils 10. Klassen, wird aber im kommenden Schuljahr in den 11. Klassen fortgeführt und es ist geplant, den Werkzeugeinsatz bis zum Abitur zu testen. In diesen Modellklassen unterrichten insbesondere Lehrerinnen und Lehrer, die sich bisher kaum oder gar nicht mit dem Einsatz von CAS beschäftigt haben. Damit wird ein weiterer Schritt hin zum Werkzeugeinsatz im „normalen“ Unterricht getan. Neben der Dokumentation der langfristigen Kompetenzentwicklung der Schüler soll bei diesem Versuch stärker nach den Ursachen für mögliche Veränderungen des Unterrichts aufgrund des Werkzeugeinsatzes gefragt werden.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt allen an dem Projekt beteiligten Schülerinnen und Schülern sowie Lehrerinnen und Lehrern, insbesondere Christine Hanisch, Matthias Maas und Thomas Rauch vom Ludwigsgymnasium Straubing, Dr. Herbert Weiss und Klaus Krug vom Franz-Ludwig-Gymnasium Bamberg sowie Ewald Bichler vom Hans-Leinberger-Gymnasium Landshut.

Ich bedanke mich bei Herrn Götzl vom Bayerischen Kultusministerium für die Genehmigung und Unterstützung dieses Projekts sowie bei der Firma Texas Instruments für die Initiierung des Projekts und für die Ausstattung aller beteiligten Klassen mit dem Rechner Voyage 200.

Ganz besonders möchte ich mich bei meiner studentischen Mitarbeiterin Carina Biere bedanken, die die Auswertung aller Testfragen, Fragebögen, Stundenprotokolle und Prüfungsaufgaben mit großer Sorgfalt vorgenommen und alle Ergebnisse in beeindruckend übersichtlicher Form zusammengestellt hat.

Bedanken möchte ich mich auch bei den Gutachtern des Journals für Mathematik-Didaktik für die zahlreichen konstruktiven Hinweise.

Literatur

ARTIGUE, M., Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between technical and conceptual Work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7 (2002) 245-274

BARZEL, B. U. MÖLLER, R., About the Use of the TI-92 for an Open Learning Approach to Power Functions – A Teaching Study, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) 33 (2001), Bd. 1, 1-5,

BAUMERT, J., LEHMANN, R. u. a., TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich, Leske + Budrich, Opladen 1997

BROWN, R., Computer Algebra Systems and Mathematics Examinations: A comparative Study, International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education 10 (2003), No. 3, 155-182

DÖRFLER, W., Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium, in: DÖRFLER, W., PESCHEK, W., SCHNEIDER, E., WEGENKITTL, K. (Hrsg.), Computer – Mensch – Mathematik, Hölder-Pichler-Tempsky u. Teubner, Wien 1991, 51-75

DRIJVERS, P. A. GRAVEMEIJER, K., Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes, in: Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (Eds.), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Sprinter, New York 2005, 163-196

DRIJVERS, P. A. VAN HERWAARDEN, O., Instrumentation of ICT-tools: The case of algebra in a computer algebra environment, *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 7 (2000), 255-275

DRIJVERS, P., Learning Algebra in a Computer Algebra Environment, Design Research on the Understanding of the Concept of Parameter, Dissertation, Utrecht 2003

GRIEBEL, S., Verbreitung von Graphikrechnern und Computer-Algebra-Taschencomputern in Deutschland und Europa, erscheint in: Bender, P., Herget, W., Weigand, H.-G. u. Weth, Th. (Hrsg.), Neue Medien und Bildungsstandards, Franzbecker, Hildesheim u. Berlin 2005

GUIN, D., RUTHVEN, K., TROUCHE, L. (Eds.), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Sprinter, New York 2005

HERGET, W. HEUGL, H., KUTZLER, B., LEHMANN, E., Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht* MNU 54 (2001), 458-464

HEUGL, H., KLINGER, W., LECHNER, J., Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen, Addison-Wesley, Bonn u. a. 1996

HISCHER, H. (Hrsg.), Mathematik im Umbruch? Erörterungen zur möglichen 'Trivialisierung' von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software, Franzbecker, Hildesheim 1992

Kendal M., Stacey, K., Teachers in Transition: Moving towards CAS-supported classrooms, ZDM 34 (2002)(5), 196-203

KUTZLER, B., Mathematik unterrichten mit DERIVE, Addison-Wesley, Bonn u. a. 1995

NOCKER, R, Der Einfluß von Computeralgebrasystemen auf die Unterrichtsmethoden und die Schüleraktivitäten, in: MÜLLER, K. P. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker-Verlag, Hildesheim 1996, S. 325-328

PIERCE, R. A. STACEY, K., A Framework for Monitoring Progress and Planning Teaching towards the effective Use of Computer Algebra Systems, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9 (2004), 59-93

RASFELD, P., Untersuchung von Funktionen bei Anwendung linearer Transformationen mit Hilfe eines Computeralgebrasystems, *mathematica didactica* 22 (1999), Bd. 2, 79-109

SCHNEIDER, E., Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht, Habilitationsschrift, Klagenfurt 2000a

SCHNEIDER, E., Teacher Experiences with the Use of a CAS in a Mathematics Classroom, *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* (2000b) v. 7(2) 119-141

TROUCHE, L., Calculators in Mathematics Education: A rapid Evolution of Tools, with differential Effects, in: Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (Eds.), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Sprinter, New York 2005a, 9-39

TROUCHE, L., Instrumental Genesis, individual and Social Aspects, in: Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (Eds.), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Sprinter, New York 2005b, 197-230

VERILLON, P. A. RABARDEL, P., Cognition and Artefacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to instrumented Activity, *European Journal of Psychology of Education* 10 (1995), V. 1, 77-101

Weigand, H.-G. u. Weth, Th., Computer im Mathematikunterricht – Neue Wege zu alten Zielen, Spektrum, Heidelberg u. Berlin 2002

WEIGAND, H.-G., Eine explorative Studie zum computerunterstützten Arbeiten mit Funktionen, *Journal für Mathematikdidaktik* (JMD) 20 (1999), 28-54

Adresse des Autors

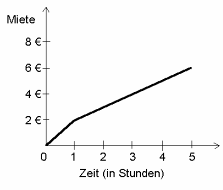
Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
Universität Würzburg
Didaktik der Mathematik
Am Hubland
97074 Würzburg
Email: weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de

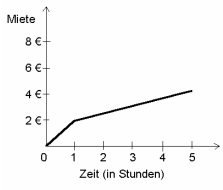
Der Vortest[26]

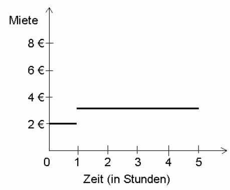
1. Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich: $\frac{x^3 - xy^2}{x^3 - x^2y} =$

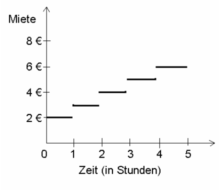
2. Welche Ausdrücke sind gleichbedeutend mit $2x + y^3$? Kreisen Sie die zugehörigen Buchstaben (A, B, C, D) ein.
   A: $x^2 + y \cdot y^2$ B : $x + x + y^3$ C : $x \cdot x + y^3$ D : $x + x + y \cdot y^2$.

3. In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde (oder ein Teil davon) kostet 2 € und jede weitere angefangene Stunde kostet 1 €. Welches Diagramm zeigt dies? Kreisen Sie die entsprechenden Buchstaben A, B, C oder D ein.



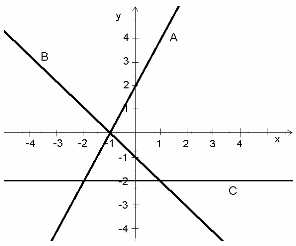






A B C D

4. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der drei gezeichneten Graphen A, B und C!

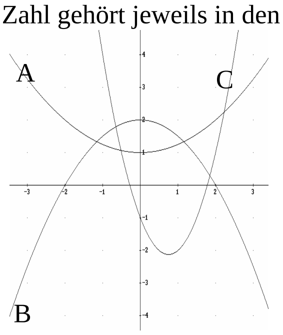


A: ....

B: ....

C: …...............................

5. Zu den gezeichneten Parabeln A, B und C gehören die angegebenen Gleichungen. Welche Zahl gehört jeweils in den Kasten?



A : $y = \frac{1}{4}x^2 + \boxed{}$

B : $y = \boxed{} \cdot x^2 + 2$

C : $y = 2x^2 - 3x + \boxed{}$

---

[26] Aus Platzgründen sind die Aufgaben nicht im Original-Layout wiedergegeben. Die Graphiken sind verkleinert und im Original vorhandene Freiräume für Rechnungen und Skizzen sind nicht mit angegeben.

6. Skizzieren Sie den Graphen der quadratischen Funktion mit der Gleichung
$y = -0{,}5(x - 1{,}5)^2 + 3$.

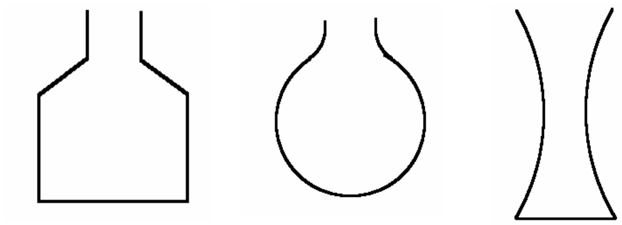
7. Für eine Funktion: $x \mapsto y$ sind folgende x- und y-Werte gegeben. Vervollständigen Sie die Tabelle:

X	1	2	3	4	5	6
y	–1	0	3	8		

8. Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die zu der folgenden Tabelle passt:

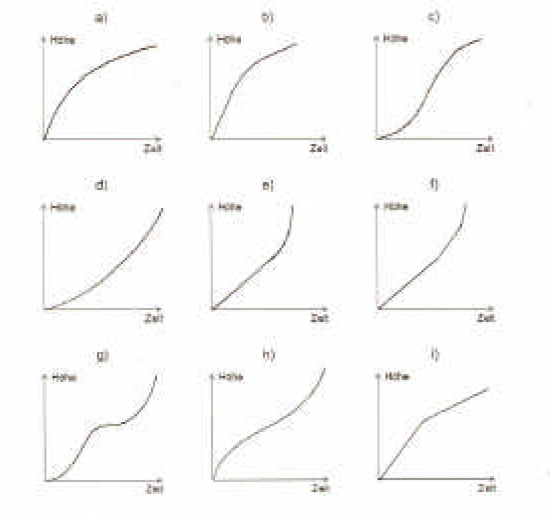
x	–3	–2	–1	0	1	2
y	–2,5	–1	0,5	2	3,5	5

9. In die drei abgebildeten Vasen fließt gleichmäßig Wasser zu. Die abgebildeten Graphen stellen die Wasserstandshöhe in Abhängigkeit von der Zeit dar. Welcher Graph gehört zu welcher Vase?



Vase A Vase B Vase C

Vase A und Graph: ....
Vase B und Graph: ....
Vase C und Graph: ....

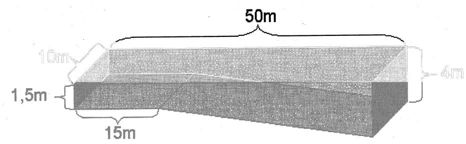


10. Bestimmen Sie jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen über der Grundmenge ℝ.

a) $x^2 + 5x = 0$ b) $x^2 = x$.

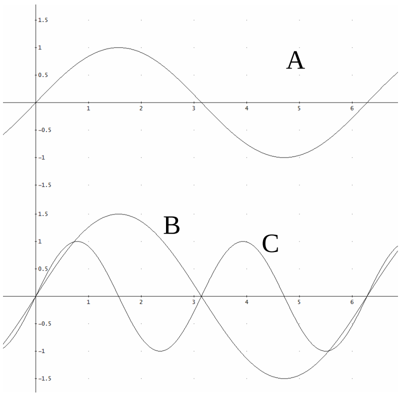
11. Ermittelen Sie (näherungsweise) **graphisch** die Lösung der Gleichung $x^2 – x – 3 = 0$.

12. Berechnen Sie das Volumen des (vollständig gefüllten) Schwimmbeckens.



Der Nachtest (Es sind nur die Aufgaben aufgeführt, die gegenüber dem Vortest verändert wurden)

4. A ist der Graph der Funktion mit $y = \sin(x)$. Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichungen der Graphen B und C!



A: $y = \sin(x)$

B: ....

C: …..............................

6. Skizzieren Sie die beiden Graphen der Funktionen mit den Gleichungen
A: $y = \cos(x)$ und B: $y = – 2 \cos(x) + 0,5$ im Bereich von –3 bis +3.

8. Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die zu der folgenden Tabelle passt:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

10. Bestimmen Sie jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen über der Grundmenge ℝ.

a) $x^2 + 5x = 0$ b) $\sin(x) = 0,5$.

11. Ermitteln Sie (näherungsweise) **graphisch** die Lösung der Gleichung $\cos(x) = x$.