[92] Zur Erforschung mathematischer Instrumente im Mathematikunterricht

In: L. Hefendehl-Hebeker, S. Hußmann (Hrsg), Mathematikdidaktik zwischen Fachoreientierung und Empirie, Festschrift für Norbert Knoche, Hildesheim (Franzbecker) 2003, 256-265

Zusammenfassung. An vier Ellipsenzirkeln soll gezeigt werden, welche Beiträge die Erforschung historischer mathematischer Instrumente im Mathematikunterricht zur mathematischen Allgemeinbildung leisten kann.

Mathematische Instrumente als Träger von Ideen

Dass man z.B. mit einem Zirkel einen Kreis zeichnen kann, ist unmittelbar klar, denn er ist so konstruiert, dass mit ihm eine Linie gezeichnet wird, deren Punkte von einem festen Punkt gleichen Abstand haben. Das ist ja gerade die definierende Eigenschaft des Kreises. Der Zirkel ist also Träger einer *mathematischen Idee*.

Mit dem Zirkel kann man seit jeher Kreise verschiedener Radien zeichnen, denn die Schenkel des Zirkels wurden bereits im Altertum über ein Gelenk drehbar miteinander verbunden. Das war die entscheidende *technische Idee* dieses Instruments.

Die *technische Realisierung* einer mathematischen Idee ist im allgemeinen in unterschiedlicher Weise möglich. Im Laufe der Geschichte ist eine Fülle ganz verschiedener Zirkeltypen entwickelt worden (Vollrath, Weigand, Weth 2000). Ihre speziellen Eigenschaften lassen sich als Lösungen praktischer Probleme deuten. Beim Zeichnen von Kreisen mit großen Radien ergibt sich z.B. das Problem, dass die Spitze und der Bleistift zunehmend schräger auf das Papier aufsetzen, worunter die Genauigkeit leidet. Dieses Problem wird bei einem *Stangenzirkel* vermieden. Zwar liegt auch ihm die gleiche definierende Eigenschaft des Kreises zu Grunde, doch beruht bei ihm die Realisierung auf einer anderen technischen Idee.

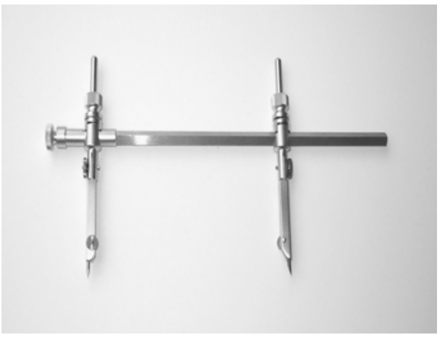

Abbildung 1. Stangenzirkel

Die Änderung des Radius wird hier durch das Verschieben von Spitze und Zeichenstift bzw. Zeichenfeder auf einer Stange erreicht, wobei Spitze bzw. Zeichenstift stets senkrecht auf dem Papier stehen. Das ist allerdings nur unter der mathematischen Bedingung gewährleistet, dass die Stange parallel zur Zeichenebene verläuft.

Man konnte das Problem, der schrägen Spitzen jedoch auch am klassischen Zirkel technisch lösen, indem man Gelenke in die Schenkel einbaute, an denen man die Schenkel so „abknicken“ konnte, dass die Spitzen senkrecht auf dem Papier standen (Abb. 2).

Abbildung 2. Zirkel mit Gelenken

Abbildung 3. Parallelzirkel

Bei dieser Lösung musste man die Schenkel nach Augenmaß mit der Hand abknicken. Das war keine sehr elegante Lösung. Der Zirkelmacher Johann Christian Lotter in Wilhelmsdorf hatte die Idee, mit Hilfe eines parallel laufenden Gestänges die Schenkel automatisch beim Öffnen abzuknicken. Das war eine technisch interessante Lösung, die sich wiederum auf eine mathematische Idee stützte (Abb. 3). Wir beobachten an diesen Beispielen ein Zusammenspiel zwischen Mathematik und Technik, das zur Lösung praktischer mathematischer Probleme führte.

Diese Entwicklung begann im 17. Jahrhundert und reichte bis in die Mitte des 20. Jahrhunderts. Das Ergebnis waren hoch entwickelte leistungsfähige mathematische Instrumente. Eine große Leistungsschau stellte die Ausstellung 1893 auf der DMV-Tagung in München dar. Der aus diesem Anlass von Walter Dyck verfasste *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* ist eine wichtige Quelle für das historische Studium mathematischer Instrumente (Dyck 1892; Nachdruck 1994). Ausführlich wurden Mathematische Instrumente von W. Meyer zur Capellen (1949) und F. A. Willers (1951) behandelt. Beide Bücher sind inzwischen begehrte Klassiker.

Ellipsenzirkel

Den Zirkeln zum Zeichnen von Kreisen liegt immer die gleiche grundlegende mathematische Eigenschaft des Kreises zu Grunde, die ja auch in der Elementargeometrie verwendet wird.

Bei den Ellipsen dagegen lassen sich unterschiedliche Eigenschaften zur Konstruktion verwenden. Die *Gärtnerkonstruktion* beruht auf dem Satz:

> *Die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstandssumme von 2 festen Punkten konstant ist, ist eine Ellipse.*

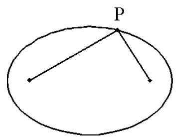

Abbildung 4. Gärtnerkonstruktion

Die *Papierstreifenkonstruktion* beruht dagegen auf dem Satz:

> *Bewegen sich die Endpunkte einer Strecke, die durch einen Punkt geteilt wird, auf zueinander senkrechten Geraden, so beschreibt der Teilpunkt eine Ellipse.*

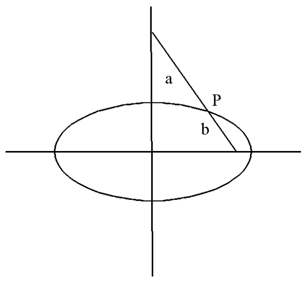

Abbildung 5. Papierstreifenkonstruktion 1. Art

Es gibt eine Fülle weiterer Eigenschaften der Ellipse, die zu Konstruktionen verwendet werden können (s. Schupp 2000). Einige dieser Eigenschaften sind auch grundlegend für *Ellipsenzirkel*. Im Folgenden sollen vier Ellipsenzirkel untersucht werden, die aus dem vorigen Jahrhundert stammen. Von Zeit zu Zeit findet man Angebote im Internet oder auf Flohmärkten. Drei der hier vorgestellten Instrumente wurden im Internet ersteigert.

Es geht uns darum, zunächst die Funktionsweise zu beschreiben, die zu Grunde liegende Ellipseneigenschaft anzugeben und dann die technische Idee herauszuarbeiten.

Ein Ellipsenzirkel von Stanley

Von der berühmten englischen Firma W. F. Stanley, London, stammt der Ellipsenzirkel, der sich am klassischen Vorbild von Adams (Adams 1797) orientiert.

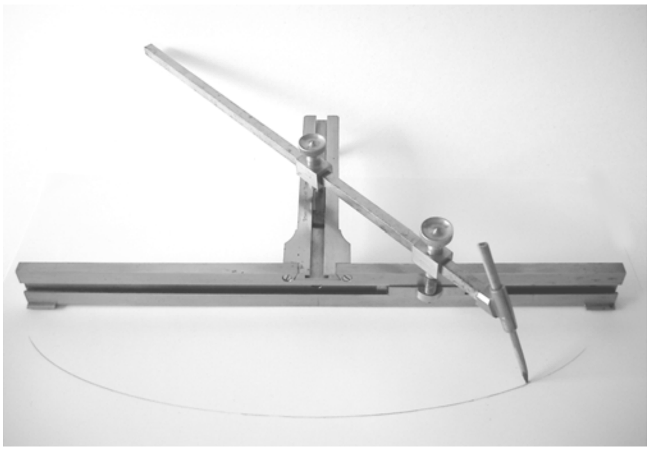

Abbildung 6. Ellipsenzirkel der Fa. Stanley, London

Auf zwei zu einander senkrechten Schienen läuft auf zwei Zapfen eine Stange, an deren Ende sich ein Bleistift befindet. Das Instrument zeichnet eine halbe Ellipse. Die Konstruktion beruht auf dem Satz:

> *Bewegen sich ein Endpunkt und ein innerer Punkt einer Strecke auf zueinander senkrechten Geraden, so beschreibt der andere Endpunkt der Strecke eine Ellipse.*

Auch hier spricht man von einer Papierstreifenkonstruktion (Schupp 2000, S. 39). Durch Verschieben der Zapfen lassen sich verschiedene Halbachsen einstellen. Im Grunde handelt es sich bei diesem Instrument um eine unmittelbare technische Umsetzung des mathematischen Prinzips.

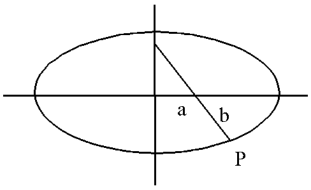

Abbildung 7. Papierstreifenkonstruktion 2. Art

An der Papierstreifenkonstruktion 2. Art macht man sich klar, wie man an dem Ellipsenzirkel die Größe der Halbachsen festlegt.

Der Ellipsograph nach Farey

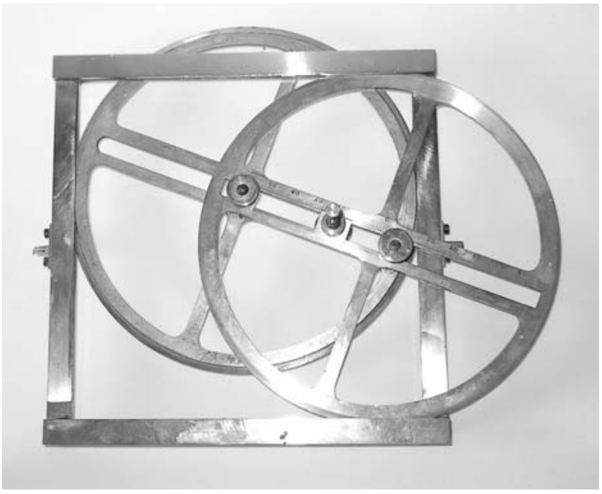

Abbildung 8: Ellipsograph nach Farey

Bei diesem Instrument unbekannter Herkunft handelt es sich um einen *Ellipsographen,* der auf John Farey, London, zurückgeht (Hambly 1988, S. 90). Bei ihm gleiten zwei Kreise gleichen Durchmessers jeweils zwischen zwei zueinander parallelen Schienen, die ein Quadrat bilden. Diese beiden Kreise sind gegeneinander versetzt und durch Stellschrauben miteinander verbunden. Im Innern der Verbindungsstrecke ist ein Zeichenstift angebracht. Die beiden Kreise lassen sich nun zusammen in dem Rahmen drehen. Dabei beschreibt der Stift eine Ellipse.

Die mathematische Idee, die diesem Instrument zu Grunde liegt, erschließt sich dem Betrachter nicht unmittelbar. Die entscheidende Erkenntnis findet man in einem typischen Problemlöseprozess: Beim Drehen der zusammenhängenden Kreise bewegen sich deren Mittelpunkte auf den Mittellinien des Quadrats.

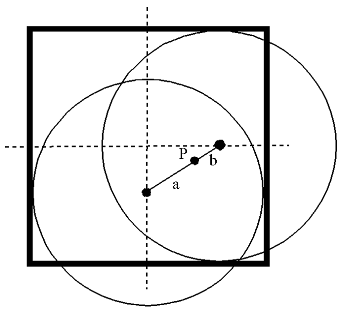

Abbildung 9. Gleitkreiskonstruktion

Befindet sich der Stift im Innern der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Kreismittelpunkten, so ist klar, dass der Stift eine Ellipse zeichnet. Denn die Endpunkte der Strecke bewegen sich ja auf den zueinander senkrechten Mittellinien. Diesem Instrument liegt also die Papierstreifenkonstruktion 1. Art zu Grunde. Allerdings wird sie hier durch eine raffinierte technische Idee realisiert.

An der Abbildung der Gleitkreiskonstruktion liest man ab, wie man bei dem Instrument die Halbachsen einstellen kann.

Es gibt ein ähnliches Instrument der Fa. Haff, Pfronten, aus Plexiglas, das allerdings mit Kreisen unterschiedlicher Radien arbeitet.

Ein zweischenkliger Ellipsenzirkel

Der folgende Zirkel erinnert an einen Kreiszirkel. Er hat ebenfalls 2 Schenkel, die jedoch leicht beweglich sind und durch eine Feder so weit auseinan der gedrückt werden, wie es die Schlinge zulässt. Die Schlinge läuft über zwei Zapfen. Der eine Schenkel mit den 3 Spitzen wird festgehalten. Der andere Schenkel mit dem Schreibstift wird gedreht. Dabei wird eine Ellipse gezeichnet.

Abbildung 10. Zweischenkliger Ellipsenzirkel

Grundlage dieses Instruments ist die Gärtnerkonstruktion. Die beiden Zapfen markieren die Brennpunkte. Ihren Abstand kann man verändern, so dass sich Ellipsen mit unterschiedlicher Exzentrizität zeichnen lassen. Die Größe der Ellipse ist durch die Schlinge bestimmt. Die eigentliche Ellipse entsteht in Höhe der Schlinge bzw. der Scheibe. Gezeichnet wird dann eine zentrisch gestreckte Ellipse.

Als ich das Instrument im Internet sah, war es falsch montiert, außerdem fehlten die Schlinge und ein Zapfen. Im übrigen war es auch lediglich als „merkwürdiger Zirkel" angezeigt. Nach einigem Überlegen und nach Anfertigung eines Ersatzes für den zweiten Zapfen durch einen Mechaniker konnte ich den Zirkel wieder benutzbar machen. Wegen der robusten Konstruktion und der Größe (33 cm Höhe) vermute ich, dass er für eine Nutzung im Handwerk bestimmt war.

Ein dreischenkliger Ellipsenzirkel

Von Linnhoff in Berlin stammt ein dreischenkliger Ellipsenzirkel. Er besteht aus einem äußeren Zirkel mit zwei Schenkeln und Spitzen, die fest eingestochen werden, sowie einem frei beweglichen dritten Schenkel mit Bleistiftspitze, der um einen Schenkel gedreht werden kann. Dabei wird eine Ellipse gezeichnet.

Man kann sich vorstellen, wie der Erfinder auf dieses Instrument gekommen ist. Er brauchte ja nur den festen Schenkel eines Fallnullenzirkels nicht wie üblich senkrecht, sondern schräg zu halten und konnte dann beim versuchten Zeichnen eines Kreises eine Ellipse beobachten. Machte er nun aus der „Not" eine „Tugend", so hatte er einen Ellipsenzirkel.

Er vertrieb dieses Instrument zunächst selbst. Später nahm es die Fa. Haff in ihr Programm.

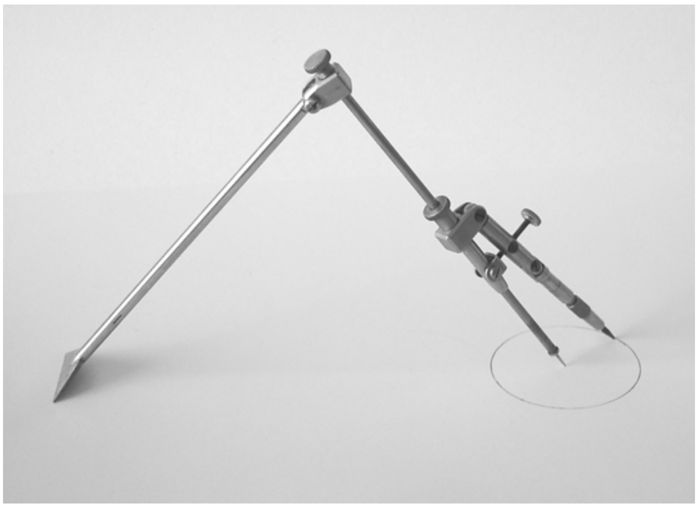

Abbildung 11. Dreischenkliger Ellipsenzirkel

Auch hier erschließt sich einem die zu Grunde liegende mathematische Idee bei einigem Nachdenken. Die entscheidende Erkenntnis besteht darin, dass die Bleistiftspitze sich auf einem Kreiszylinder dreht, dessen Achse durch den festen Schenkel verläuft. Das Zeichenblatt kann man sich als Ebene vorstellen, die den Zylinder schräg schneidet. Bekanntlich ergibt sich dabei eine Ellipse.

An einer Skizze kann man sich nun auch klar machen, wie die Achsen von den Einstellungen des Zirkels abhängen.

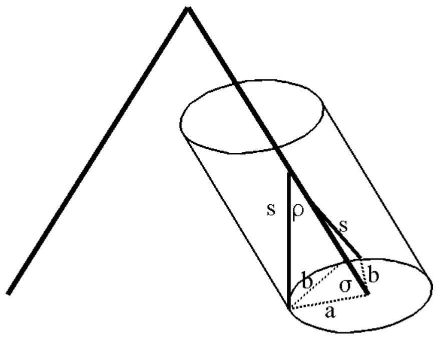

Abbildung 12. Linnhoff-Konstruktion

Man liest aus den Teildreiecken ab:

$$a = \frac{s \cdot \sin\rho}{\sin\sigma} \quad \text{und} \quad b = s \cdot \sin\rho\,.$$

Da s an dem Zirkel konstant ist, hängen die Halbachsen von den beiden Winkeln σ und ρ ab. Der Winkel ρ, der am Zirkel durch eine Stellschraube am beweglichen Schenkel eingestellt werden kann, bestimmt die Halbachse b. Hat man die Halbachse b festgelegt, so bestimmt man wegen

$$a = \frac{b}{\sin\sigma}$$

die Halbachse a durch den Neigungswinkel des festen Schenkels gegen die Zeichenebene. Man macht sich klar, dass man den Schenkel sehr schräg stellen muss, um eine „ansehnliche“ Ellipse zu erhalten. So ergibt sich z.B. für $\sigma = 30°$ die Beziehung $a = 2b$. Den Sonderfall des Kreises erhält man für $\sigma = 90°$, denn dann ist $a = b$.

Kritik der Instrumente

Es war der Zweck dieser Instrumente, Ellipsen zu zeichnen. Das ist auch wirklich mit diesen Ellipsenzirkeln möglich. Beim Vergleich mit Kreiszirkeln schneiden allerdings alle diese Ellipsenzirkel schlechter ab. Jedes Instrument erfordert wesentlich mehr Geschick. Die Gefahr, dass sich die Kurve nicht schließt, ist groß, denn bei jedem der Zirkel besteht eine Tendenz zum Rutschen. Bei manchen Zirkeln muss man umgreifen oder man muss sie sogar umlegen. Die Einstellung der Achsen erfordert bei jedem Instrument ein Nachdenken oder einen Blick in die Gebrauchsanweisung. Ist es ein Wunder, dass Technische Zeichner lieber zu Ellipsenschablonen gegriffen haben?

Aber es bestehen nicht nur Schwierigkeiten durch die Handhabung. Auch die Mechanik hat ihre Probleme. Alle meine Instrumente „haken“ irgendwo und „ruckeln“ beim Zeichnen. Das mag an dem Alter der Instrumente liegen. Aber man begegnet hier auch einem prinzipiellen Problem der Mechanik: Beweglichkeit erfordert Spiel, dieses aber führt zu Ungenauigkeiten. Ein zweites Problem sind die auftretenden Hebelkräfte, die ein hohes Maß an Stabilität erfordern, was wiederum die Präzision beeinträchtigt.

Bei aller Begeisterung für die diesen Ellipsenzirkeln zu Grunde liegenden Ideen muss man leider doch feststellen, dass ihre Handhabung vergleichsweise kompliziert ist und erhebliches Geschick erfordert. Man kann die Begeisterung ihrer Erfinder verstehen, wird aber auch Verständnis für das Zögern der Praktiker haben, diese Instrumente wirklich zu nutzen.

Beiträge des Themas zur mathematischen Allgemeinbildung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Untersuchung mathematischer Instrumente in den Unterricht einzubeziehen. Die Instrumente können als *Einstiege* dienen (z.B. Vollrath 2001, S. 220-221), um die grundlegende mathe matische Idee zu finden. Auf diese Weise können die Ellipseneigenschaften erarbeitet werden. Sind Ellipseneigenschaften bekannt, so können Ellipsenzirkel analysiert und als *Anwendungen* erkannt werden, an denen Realisierungsmöglichkeiten mathematischer Ideen deutlich werden. Dabei kann der Mathematikunterricht auch einen Beitrag zur *Geschichte* der Mathematik und der Technik leisten (Vollrath, Weigand, Weth 2000, S. 142-151).

Zwar haben Ellipsenzirkel durch den *Computer* ihre Bedeutung verloren. Andererseits kann man z.B. mit Hilfe eines Geometrieprogramms derartige Zirkel „konstruieren" und studieren, wie man die Halbachsen variieren kann und wie dies am Instrument geschieht (Weigand, Weth 2002).

Die Erforschung dieser Instrumente passt gut in einen problemorientierten Unterricht, der auf entdeckendes Lernen ausgerichtet ist. Dabei bieten sich offene Unterrichtsformen wie Projekte oder selbstständiges Arbeiten an. So regen die Richtlinien für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auch „Ellipsenzirkel" als Thema einer Facharbeit an. Tatsächlich kann man derartige Bearbeitungen auch bereits im Internet finden. Sie zeigen, dass Schüler und Schülerinnen bei der Bearbeitung eines derartigen Themas selbst kreativ werden können.

Die Beschäftigung mit derartigen Instrumenten vermittelt folgende Einsichten:

- Mathematische Instrumente sind Träger mathematischer Ideen. Sie vertiefen das Verständnis des zugrunde liegenden Sachverhalts und geben Einblick in das Denken der Erfinder.
- Mathematische Instrumente wurden zur Lösung praktischer mathematischer Probleme entwickelt. Der Nachweis, dass das Instrument die behauptete Problemlösung erbringt, muss und kann durch eine mathematische Überlegung erbracht werden.

- Mathematische Instrumente sind Beiträge zur Entwicklung der Technik und damit auch unserer Kultur. Sie machen an einem Aspekt Beiträge sichtbar und handgreiflich, die Mathematik zu unserer Kulturgeschichte geleistet hat.
- Sie zeigen aber auch, dass nicht jede denkbare und mathematisch interessante Lösung eine praktische Lösung ist.

Literatur

Adams, G. (1797). Geometrical and Graphical Essays, London. Nachdruck: Geometrische und graphische Versuche. Darmstadt 1985.

Dyck, W. (1892). Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München. Nachdruck Hildesheim 1994.

Hambly, M. (1988). Drawing Instruments 1580-1980. London.

Meyer zur Capellen, W. (1949). Mathematische Instrumente. Leipzig.

Schupp, H. (2000). Kegelschnitte. Hildesheim.

Vollrath, H.-J., H.-G. Weigand, T. Weth (2000). Spezialisierung und Generalisierung in der Entwicklung der Zirkel. In: M. Liedtke. Relikte – Der Mensch und seine Kultur, Graz, S. 123-158.

Vollrath, H.-J. (2001). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg.

Weigand, H.-G., T. Weth (2002).Computer im Mathematikunterricht. Heidelberg.

Willers, F. A. (1951). Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin (Akademie).