

# Argumentieren mit multiplen und dynamischen Darstellungen

Jahrestagung der GDM in Weingarten  
Andreas Bauer – 09.03.2012

# Gliederung

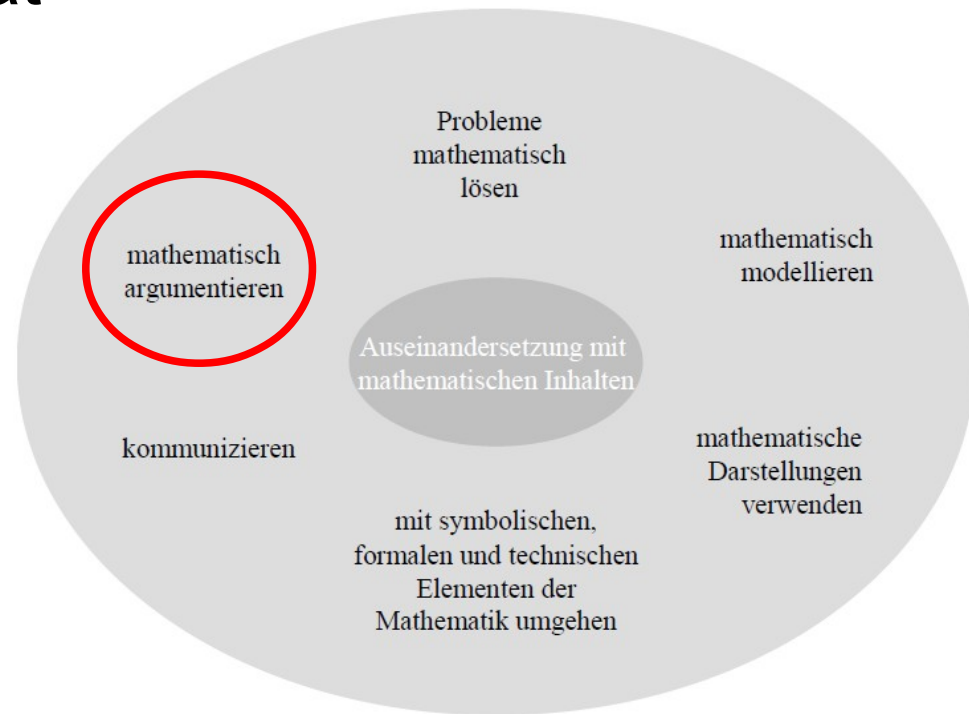
1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Darstellungen und Darstellungsarten
3. Zur Untersuchung

# Gliederung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Darstellungen und Darstellungsarten
3. Zur Untersuchung

# Argumentieren im MU

- Argumentieren hat an Bedeutung gewonnen
- Unterstützung durch Bildungsstandards



# Argumentieren im MU

Was ist eine „**Argumentation**“?

# Argumentieren im MU

Was ist eine „**Argumentation**“?

*„[...] der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diesen Begründungsbedarf zu befriedigen.“*

# Argumentieren im MU

Was ist eine „**Argumentation**“?

*„[...] der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diese Begründungsbedarf zu befriedigen.“*



Keine Kontroverse notwendig

# Argumentieren im MU

Was ist eine „**Argumentation**“?

*„[...] der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diese Begründungsbedarf zu befriedigen.“*



Keine Kontroverse notwendig  
Kein Beweis



# Argumentieren im MU

Was ist eine „**Argumentation**“?

*„[...] der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diese Begründungsbedarf zu befriedigen.“*



Keine Kontroverse notwendig  
Nicht unbedingt ein Beweis

# Argumentieren im MU

Was ist eine „**Argumentation**“?

*„[...] der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diese Begründungsbedarf zu befriedigen.“*

Was sind „**Argumente**“?

*„die in diesem Prozess hervorgebrachten Begründungsangebote“*

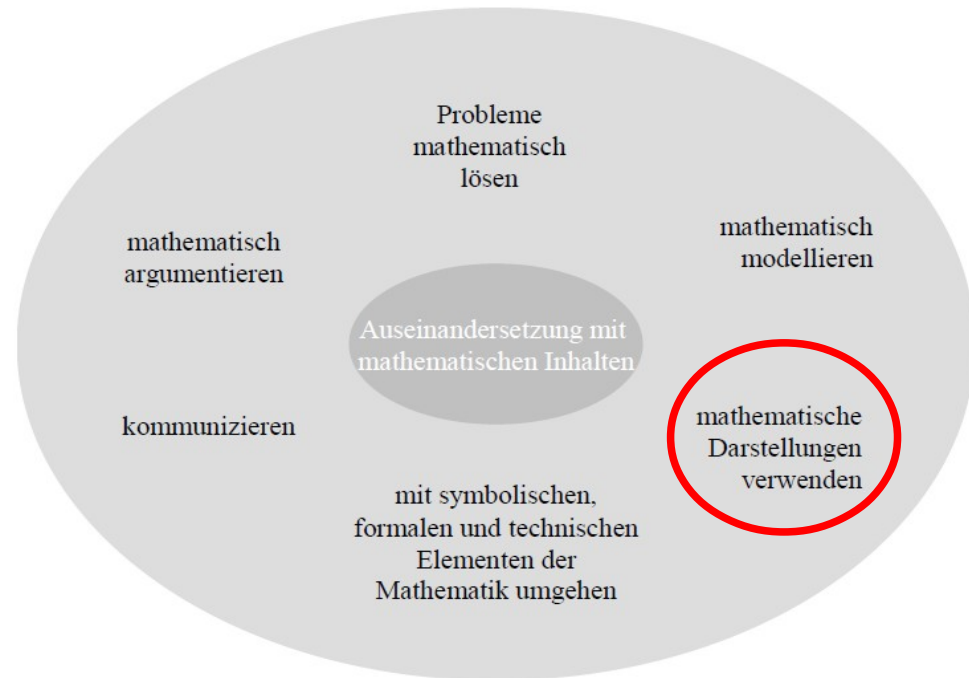
(jeweils Schwarzkopf 2000, S. 240)

# Gliederung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Darstellungen und Darstellungsarten
3. Zur Untersuchung

# Darstellungen / Repräsentationen

Arbeiten mit Repräsentationen ist allgemeine mathematische Kompetenz der Bildungsstandards:



# Darstellungen / Repräsentationen

„Eine Repräsentation ist etwas,  
das für etwas anderes steht.“

*Duval 2006*

# Darstellungen / Repräsentationen

- Mathematische Objekte entziehen sich als abstrakte Objekte unserem direkten Zugriff.
- Repräsentationen ermöglichen über die Darstellung von Eigenschaften den indirekten Zugriff.
- Verständnis platonisch, konstruktivistisch, formalistisch, ...

# Darstellungen / Repräsentationen

- Computer haben neue Möglichkeiten der Darstellung mit sich gebracht
- Kategorien:

<b>IER</b> (Isolierte, statische Darstellungen)	<b>IDER</b> (Isolierte, dynamische Darstellungen)
<b>MER</b> (Multiple, statische Darstellungen)	<b>MDER</b> (Multiple, dynamische Darstellungen)

# Darstellungsarten

Kategorien:

**IER**

(Isolierte, statische Darstellungen)

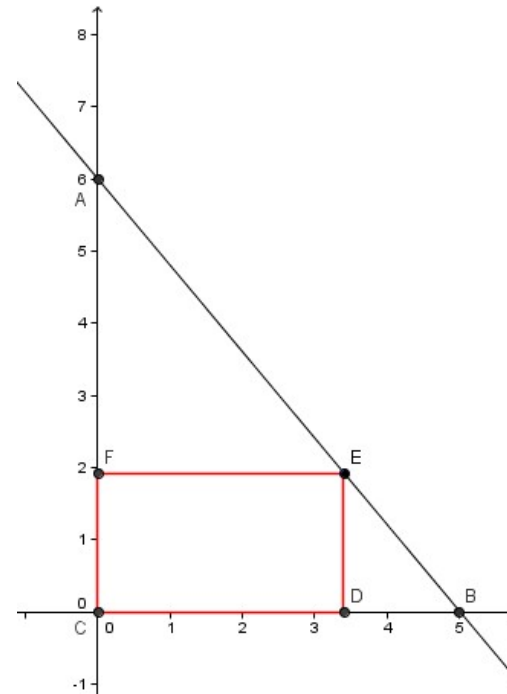


# Darstellungsarten

Kategorien:

**IER**

(Isolierte, statische Darstellungen)



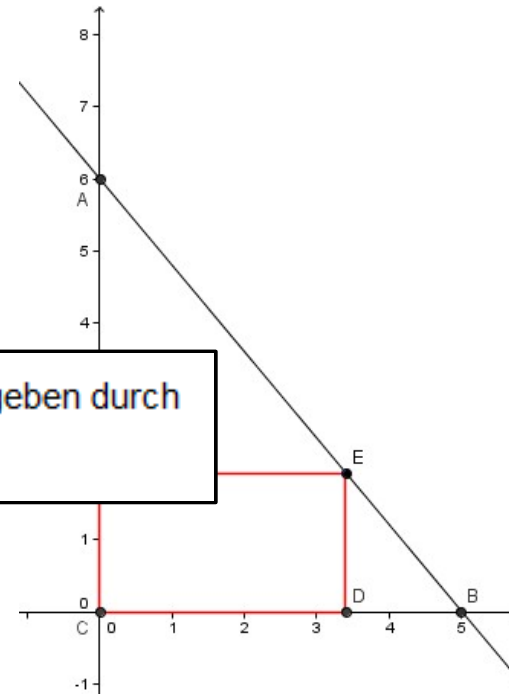
# Darstellungsarten

## Kategorien:

### IER

(Isolierte, statische Darstellungen)

Wir betrachten eine Schar linearer Funktionen, gegeben durch  
 $f(x) = a \cdot x + b$  und den Punkt  $P(1|2)$ .



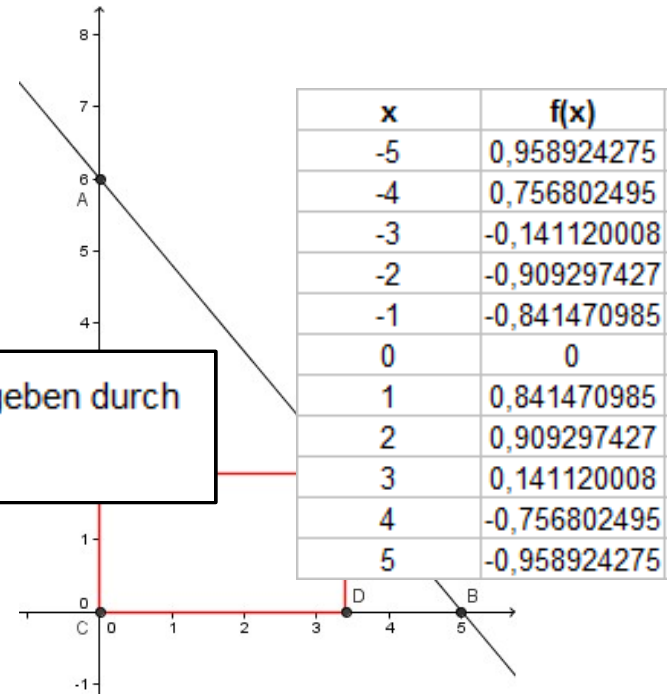
# Darstellungsarten

## Kategorien:

### IER

(Isolierte, statische Darstellungen)

Wir betrachten eine Schar linearer Funktionen, gegeben durch  $f(x) = a \cdot x + b$  und den Punkt P (1|2).

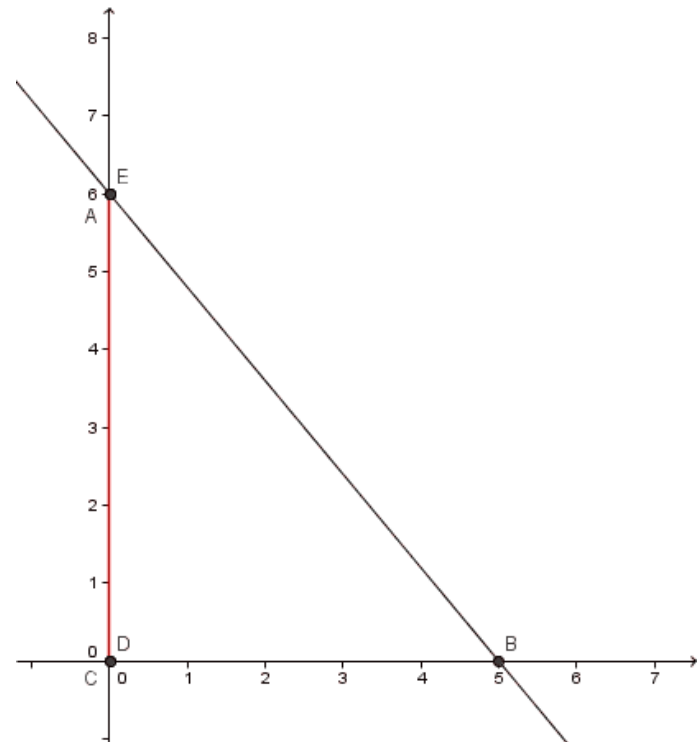
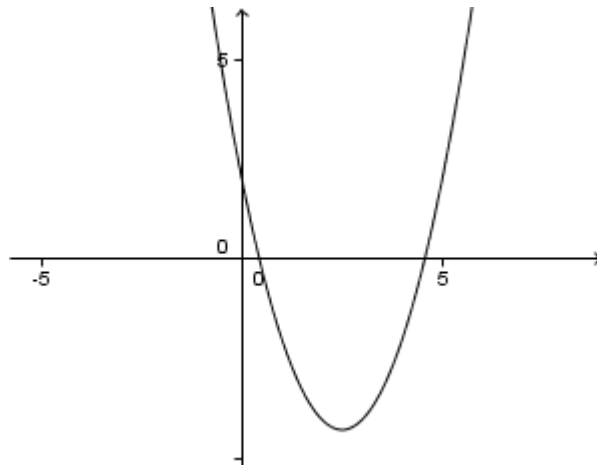


# Darstellungsarten

Kategorien:

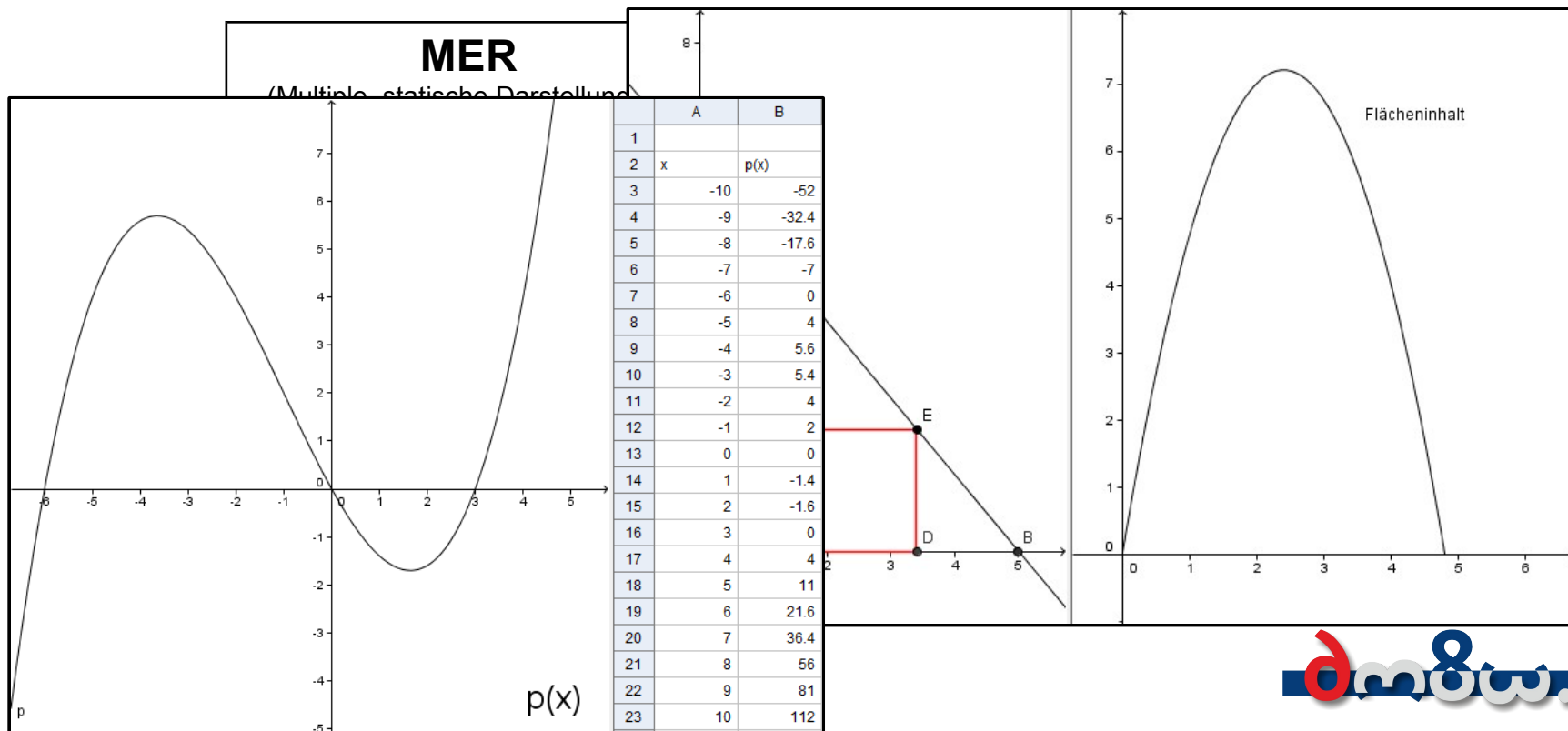
**IDER**

(Isolierte, dynamische Darstellungen)



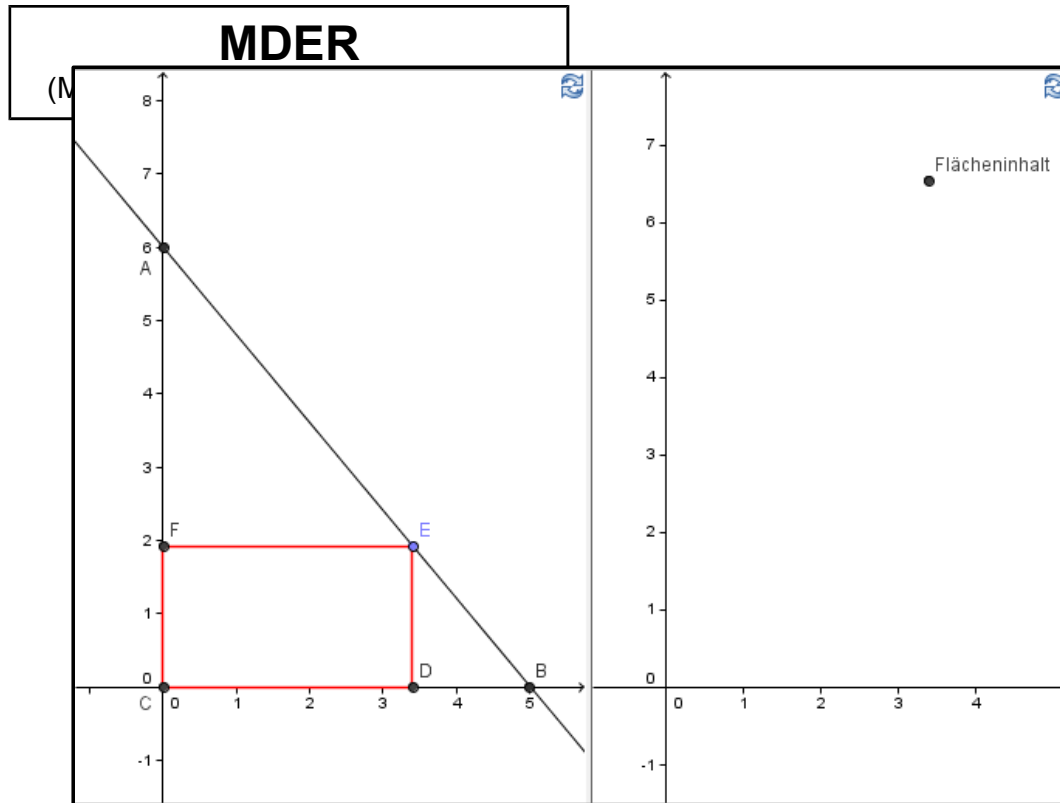
# Darstellungsarten

Kategorien:



# Darstellungsarten

Kategorien:



# Mögliche Vorteile von MDER

- Automatische Übersetzung  
(→ „*computational offloading*“)  
(Scaife & Rogers 1996)
- Vernetzte, bewegliche *externe* Rep.  
entsprechen vernetzten, beweglichen  
*internen*  
(vgl. Roth 2005)
- Dynamik mit Schlüsselrolle im  
Übersetzungsprozess bei multiplen  
Repräsentationen?

# Dynamik mit Schlüsselrolle?

- Übersetzung zwischen Repräsentationen erfolgt durch Analogiebildung (= struktur-erhaltende Abbildung)
- Dynamik hat das Potential, die zugrundeliegende Struktur besonders deutlich zu machen, indem sich gemeinsame Eigenschaften der Repräsentationen bei Änderung analog verhalten



# Bedenken bzgl. M(D)ER

## **Aber:**

- Schwierigkeiten v.a. beim Verknüpfen von Repräsentationen bei M(D)ER (trotz Dynamik!)
- Kritik an Automatisierung der Übersetzung
- Uneindeutige Forschungsergebnisse  
(vgl. Acevedo Nistal et al (2009))

# Gliederung

1. Argumentieren im Mathematikunterricht
2. Darstellungen und Darstellungsarten
3. Zur Untersuchung

# Grundannahme der Untersuchung

# Grundannahme der Untersuchung

Werden multiple bzw. dynamische Argumente vorgebracht, so existieren multiple bzw. dynamische interne Repräsentationen.

# Durchführung der Untersuchung

Drei verschiedene Aufgaben

in je einer Variante



Deine Teilnehmernummer lautet: 776670

**Aufgabe**

Die Abbildung 1 zeigt die zeitliche Entwicklung der Spannung  $U(t)$  an einem Widerstand  $R$  in einem RC-Kreis. Die Spannung  $U(t)$  wird durch die Gleichung  $U(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$  beschrieben, wobei  $U_0$  die Anfangsspannung und  $\tau$  die Zeitkonstante ist. Die Abbildung 2 zeigt die zeitliche Entwicklung der Stromstärke  $I(t)$  in demselben RC-Kreis. Die Stromstärke  $I(t)$  wird durch die Gleichung  $I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$  beschrieben, wobei  $I_0$  die Anfangsstromstärke und  $\tau$  die Zeitkonstante ist.

Deine Teilnehmernummer lautet: 776670

**Aufgabe**

Die Abbildung 1 zeigt die zeitliche Entwicklung der Spannung  $U(t)$  an einem Widerstand  $R$  in einem RC-Kreis. Die Spannung  $U(t)$  wird durch die Gleichung  $U(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$  beschrieben, wobei  $U_0$  die Anfangsspannung und  $\tau$  die Zeitkonstante ist. Die Abbildung 2 zeigt die zeitliche Entwicklung der Stromstärke  $I(t)$  in demselben RC-Kreis. Die Stromstärke  $I(t)$  wird durch die Gleichung  $I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$  beschrieben, wobei  $I_0$  die Anfangsstromstärke und  $\tau$  die Zeitkonstante ist.

Deine Teilnehmernummer lautet: 776670

**Aufgabe**

Die Abbildung 1 zeigt die zeitliche Entwicklung der Spannung  $U(t)$  an einem Widerstand  $R$  in einem RC-Kreis. Die Spannung  $U(t)$  wird durch die Gleichung  $U(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$  beschrieben, wobei  $U_0$  die Anfangsspannung und  $\tau$  die Zeitkonstante ist. Die Abbildung 2 zeigt die zeitliche Entwicklung der Stromstärke  $I(t)$  in demselben RC-Kreis. Die Stromstärke  $I(t)$  wird durch die Gleichung  $I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$  beschrieben, wobei  $I_0$  die Anfangsstromstärke und  $\tau$  die Zeitkonstante ist.



# Auswertung der Untersuchung

- Abgleich der am Rechner abgerufenen Repräsentationen mit schriftlichen Bearbeitungen über eine Teilnehmernummer
- Ziel: Zusammenhang zwischen dargebotener Repräsentation und Art der Argumente herausfinden (Antwortschema)



# Das Antwortschema

	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i>
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					

*Art der gegebenen Repräsentation*

# Das Antw...

	Isoliert, statisch	Isol dy		Multipel, dynamisch	Merkmale der Argumente
<b>IER</b> Isoliert, statisch			<p><i>Aufgabe 1</i></p> $y = 6 - \frac{6}{5}x$ $4 = x \cdot y \quad y = \frac{4}{x}$ $\frac{4}{x} = 6 - \frac{6x}{5} \quad   \cdot x$ <del><math display="block">\frac{4}{x} \cdot x = 6x - \frac{6x^2}{5} \quad   \cdot 5</math></del> $4x = 6 - \frac{6x^2}{5}$ $4 = 6 - \frac{6x^2}{5}$ <del><math display="block">-2 = -\frac{6x^2}{5}</math></del> $-2 = -\frac{6}{5} + \frac{x^2}{5}$ $-\frac{4}{5} = \frac{x^2}{5}$ $-4 = x^2$ $x = 2$ $y = -2$		
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					

Art der gegebenen  
Repräsentation



# Das Antwortschema

	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i>
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					

*Art der gegebenen Repräsentation*

# Das Antwortschema

Isoliert,  
statisch

Isoliert,  
dynamisch

Multipel,  
statisch

Multipel,  
dynamisch

*Merkmale  
der Argumente*

Bei einem muss man den Graphen soweit **nach oben bzw unten**  
**verschieben** bis noch ein Ast des Graphen  
die  $x$ -Achse schneidet

Bei 2 analog **verschieben** bis es so  
aussieht:

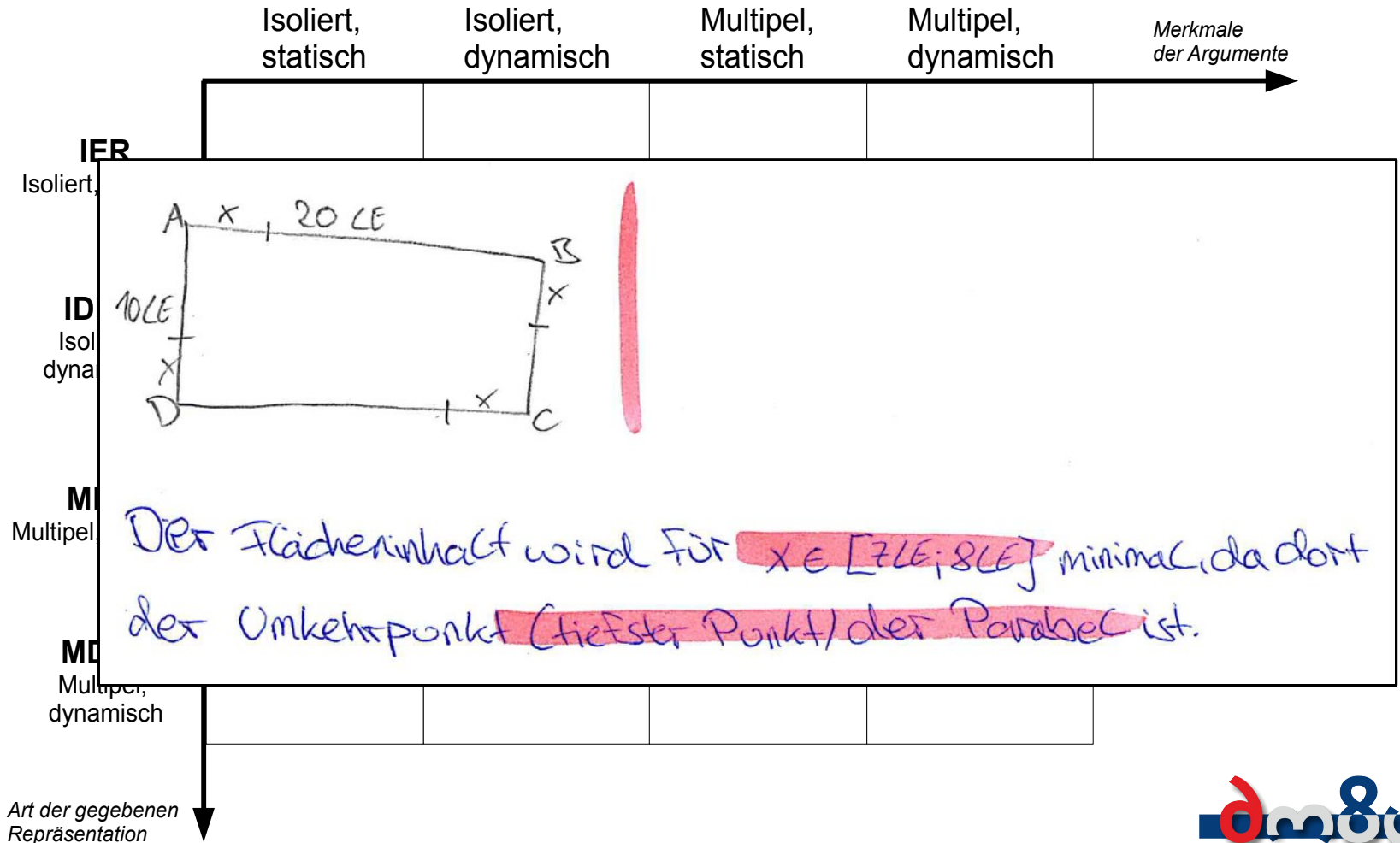


# Das Antwortschema

	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipl, statisch	Multipl, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i>
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipl, statisch					
<b>MDER</b> Multipl, dynamisch					

*Art der gegebenen Repräsentation*

# Das Antwortschema



# Das Antwortschema

	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i>
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					

*Art der gegebenen Repräsentation*

**Frage:**

Welchen Zusammenhang gibt es  
zwischen

?

**Frage:**

Welchen Zusammenhang gibt es  
zwischen gegebenen **multiplen**  
Repräsentationen

?

## Frage:

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen gegebenen **multiplen** Repräsentationen und dem Auftreten von Argumenten, in denen **multiple** Repräsentationen Verwendung finden?

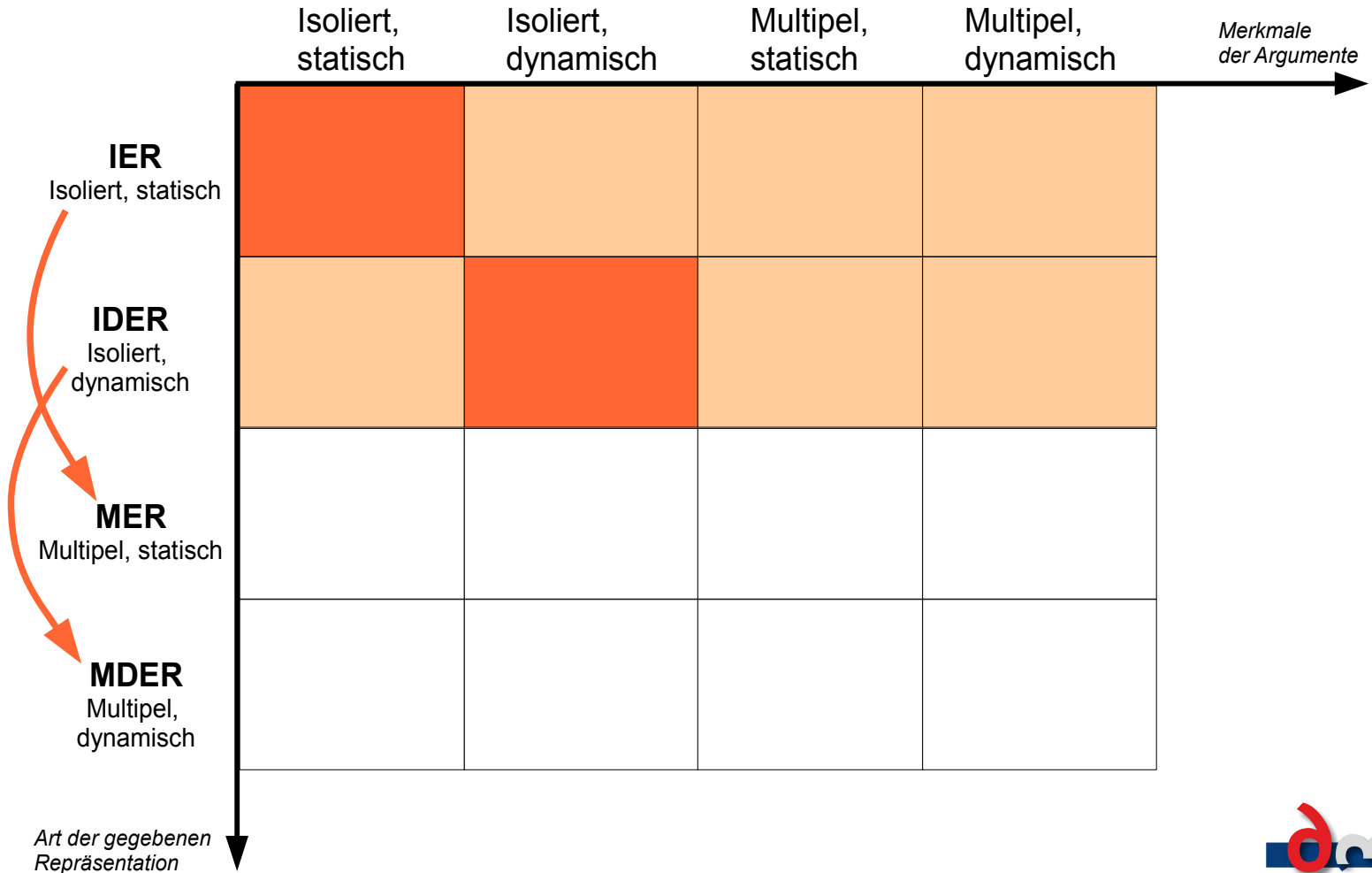


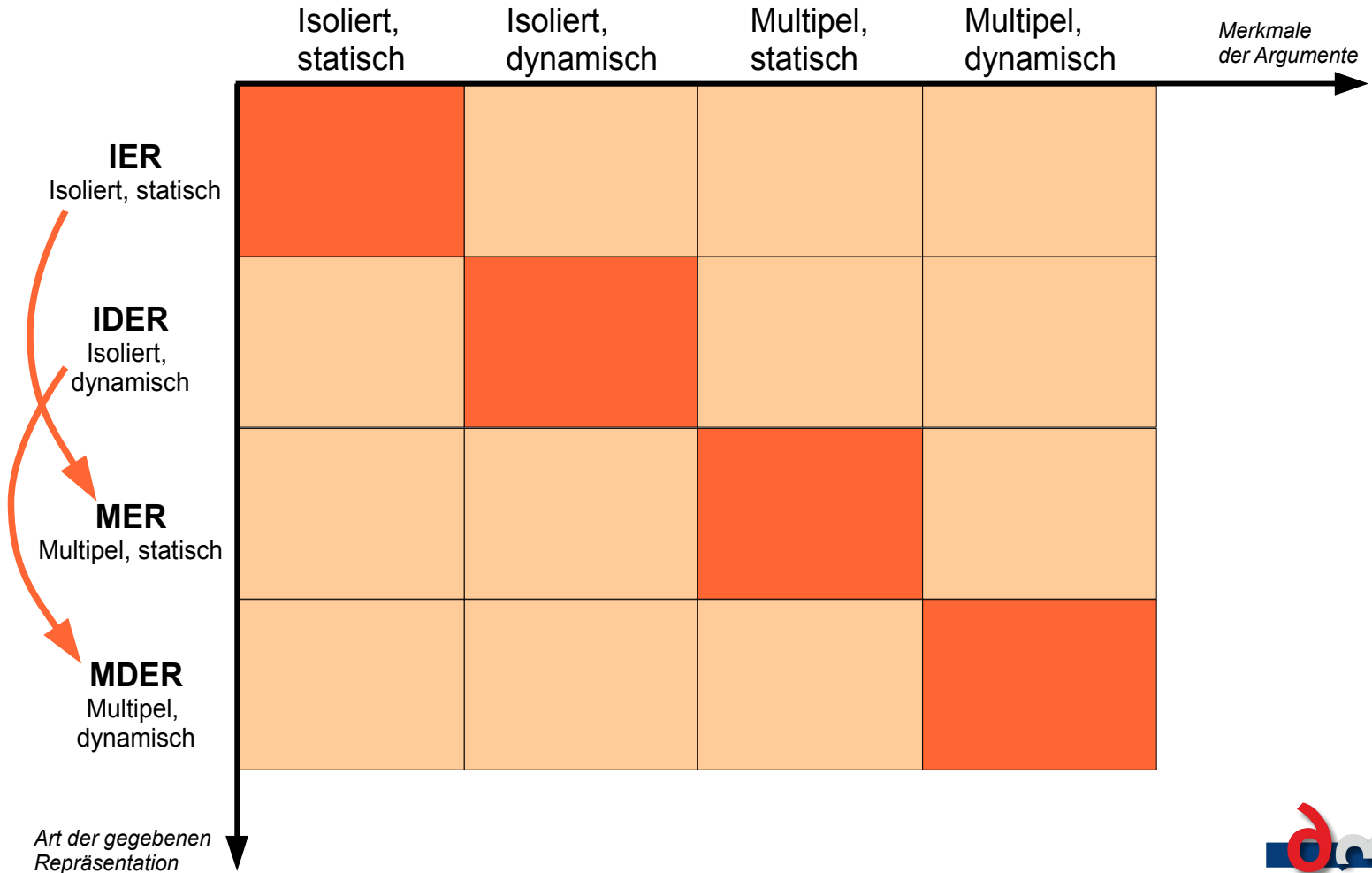
	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i> →
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					

*Art der gegebenen  
Repräsentation* ↓

	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i> →
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					

*Art der gegebenen Repräsentation* ↓





**Frage:**

Welchen Zusammenhang gibt es  
zwischen

?

**Frage:**

Welchen Zusammenhang gibt es  
zwischen gegebenen **dynamischen**  
Repräsentationen

?

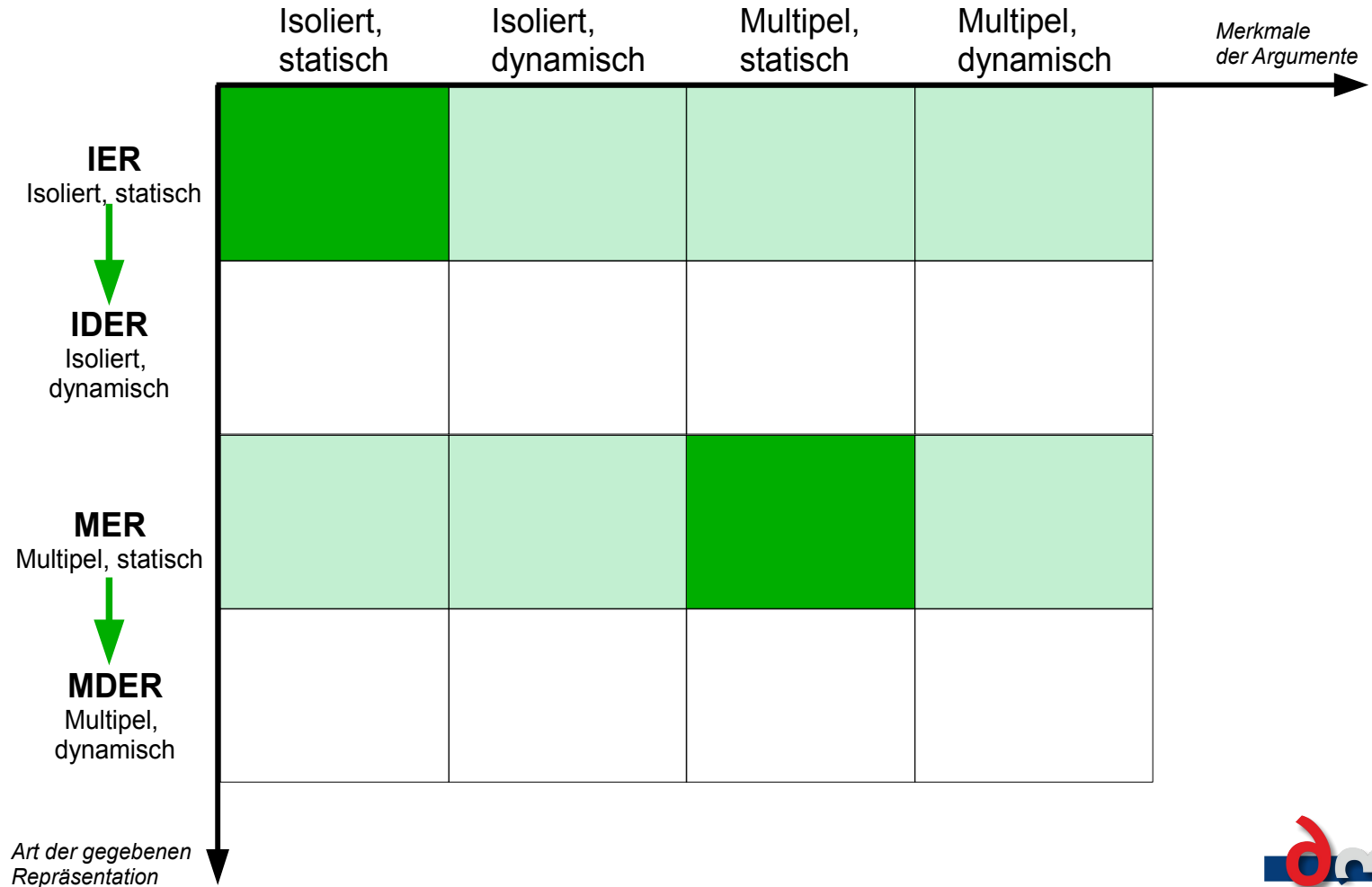
## Frage:

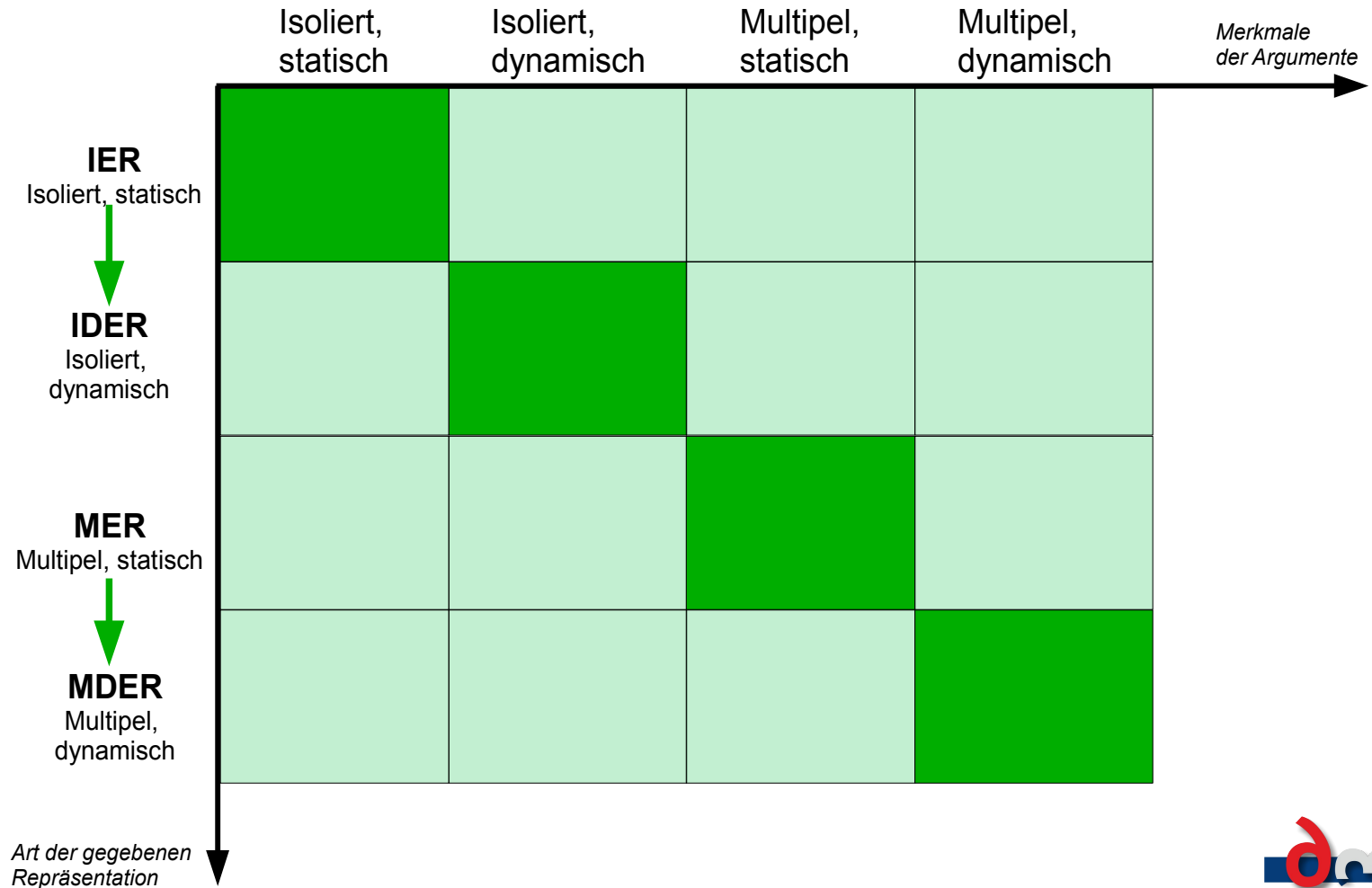
Welchen Zusammenhang gibt es zwischen gegebenen **dynamischen** Repräsentationen und dem Auftreten von Argumenten, in denen **dynamische** Repräsentationen Verwendung finden?

	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i> →
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					
<i>Art der gegebenen Repräsentation</i> ↓					



	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i> →
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					
<i>Art der gegebenen Repräsentation</i> ↓					





	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i>
<b>IER</b> Isoliert, statisch ↓ <b>IDER</b> Isoliert, dynamisch ↓ <b>MER</b> Multipel, statisch ↓ <b>MDER</b> Multipel, dynamisch					
<i>Art der gegebenen Repräsentation</i>					

**Frage:**

Welchen Zusammenhang gibt es  
zwischen

?

**Frage:**

Welchen Zusammenhang gibt es  
zwischen gegebenen **dynamischen**  
Repräsentationen

?

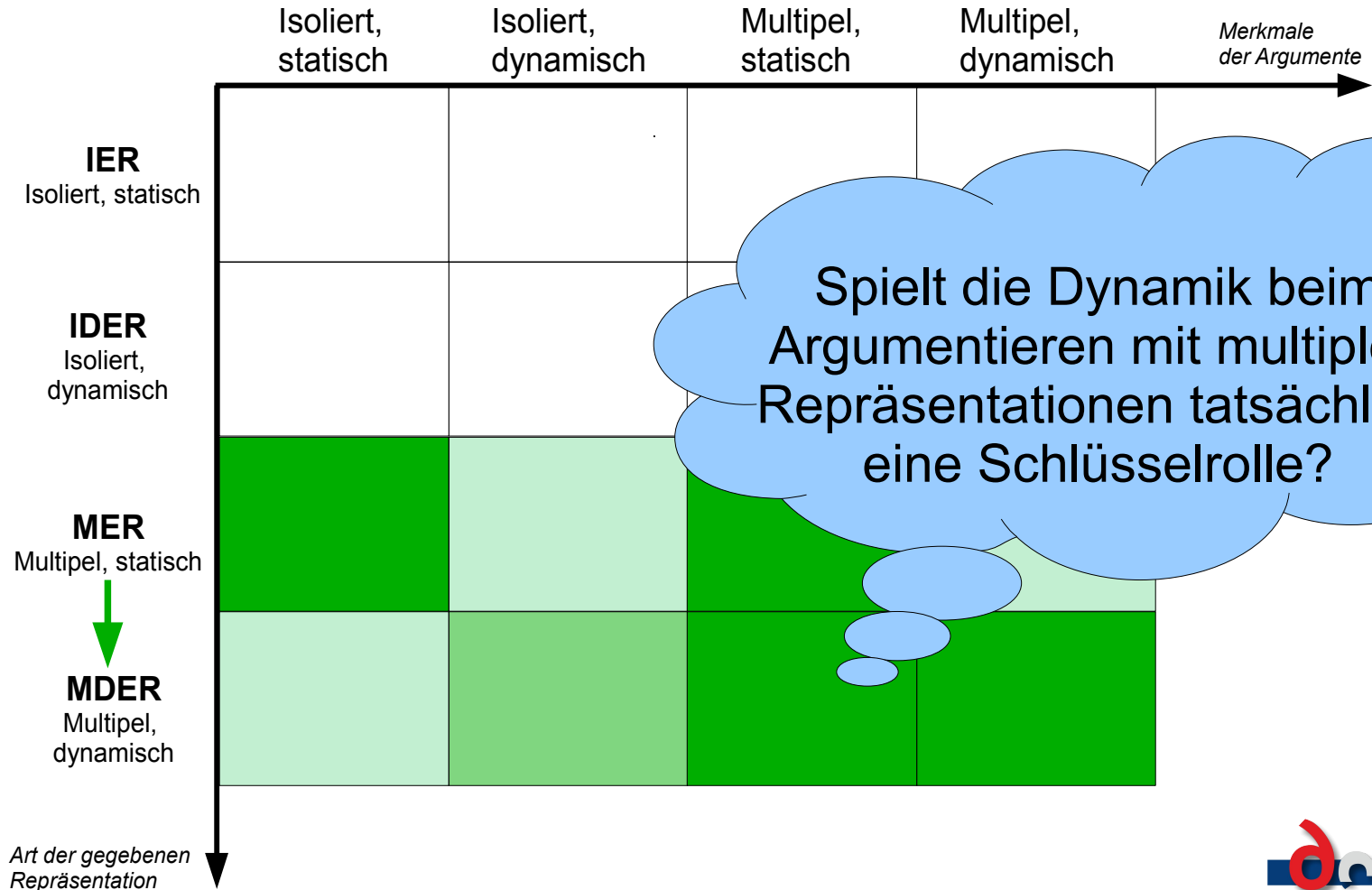
## Frage:

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen gegebenen **dynamischen** Repräsentationen und dem Auftreten von Argumenten, in denen **multiple** Repräsentationen Verwendung finden?

	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipl, statisch	Multipl, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i> →
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipl, statisch ↓					
<b>MDER</b> Multipl, dynamisch					
<i>Art der gegebenen Repräsentation</i> ↓					



	Isoliert, statisch	Isoliert, dynamisch	Multipel, statisch	Multipel, dynamisch	<i>Merkmale der Argumente</i> →
<b>IER</b> Isoliert, statisch					
<b>IDER</b> Isoliert, dynamisch					
<b>MER</b> Multipel, statisch ↓					
<b>MDER</b> Multipel, dynamisch					
<i>Art der gegebenen Repräsentation</i> ↓					



# Fazit der Vorstudie

## Beobachtungen

- Versuchsanordnung funktioniert
- Dynamik & Multiplizität wird genutzt
- Wenig ausformulierte Argumente

## Nächste Schritte

- Anpassen der Aufgaben
- Entwurf eines Kodierleitfadens
- Zweite Vorstudie?

# Literatur

**Acevedo Nistal, A. Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., Verschaffel, L.** (2009): *Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review*. ZDM Mathematics Education 41: 627-636.

**Roth, J.** (2005): *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

**Scaife, M., Rogers, Y.** (1996): *External cognition: how do graphical representations work?* International Journal of Human-Computer Studies 45(2), 185-213.

**Schwarzkopf, R.** (2000): *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht – theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim: Franzbecker.

# Bildnachweis

Das Bild des [Servers](#) auf Folie 30f ist von [Everaldo Coelho](#), lizenziert unter GNU/GPL.

Die Bilder der [Benutzerinnen und Benutzer](#) auf den Folien 30f sind von [Iconaholic](#), lizenziert als Freeware, unkommerziell.

Der [Computer](#) auf Folien 30f ist von Nutzer [gakuseiSean](#), lizenziert als Freeware, unkommerziell.

Das [Notizbuch mit Stift](#) auf Folien 30f ist von Benutzer [Yellowicon](#), lizenziert als Freeware, unkommerziell.

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Fragen?

Anmerkungen?