

# Rekursive Folgen — Vorschlag für ein W-Seminar in Mathematik

Richard Greiner

Universität Würzburg  
Institut für Mathematik

07.10.2009

W-Seminar *Rekursive Folgen* • Kurzvorstellung

Vier Beispiele zu rekursiven Folgen.

(1) Verzinsung einer Spareinlage:  $s_{n+1} = (1 + q)s_n$ ,

W-Seminar *Rekursive Folgen* • Kurzvorstellung

Vier Beispiele zu rekursiven Folgen.

- (1) Verzinsung einer Spareinlage:  $s_{n+1} = (1 + q)s_n$ ,  
Kapital im  $n$ -ten Jahr  $s_n = (1 + q)^n s_0$ .

W-Seminar *Rekursive Folgen* • Kurzvorstellung

Vier Beispiele zu rekursiven Folgen.

- (1) Verzinsung einer Spareinlage:  $s_{n+1} = (1 + q)s_n$ ,  
Kapital im  $n$ -ten Jahr  $s_n = (1 + q)^n s_0$ .
- (2) Babylonisches Wurzelziehen:  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right)$ ,  $a_0 = c > 1$ ,

## W-Seminar *Rekursive Folgen* • Kurzvorstellung

Vier Beispiele zu rekursiven Folgen.

- (1) Verzinsung einer Spareinlage:  $s_{n+1} = (1 + q)s_n$ ,  
Kapital im  $n$ -ten Jahr  $s_n = (1 + q)^n s_0$ .
- (2) Babylonisches Wurzelziehen:  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right)$ ,  $a_0 = c > 1$ ,  
konvergiert monoton fallend gegen  $\sqrt{c}$ .
- (3) Entwickle eine Lösungstheorie für homogene lineare Differenzgleichungen  
zweiter Ordnung  $f_{n+2} + af_{n+1} + bf_n = 0$ .
- (4) Was hat die durch  $f(x) := \frac{x}{1 - x - x^2}$  definierte Funktion  
mit der Fibonacci-Folge  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ,  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ , zu tun?

## W-Seminar *Rekursive Folgen* • Übersicht

- 1 Themengebiet
- 2 Teilthemen
- 3 Arbeitsplan
- 4 Interaktion Schule↔Uni

W-Seminar *Rekursive Folgen* • Themengebiet

Die Beschäftigung mit rekursiven Folgen (Differenzgleichungen oder diskreten dynamischen Systemen)

- erlaubt die Modellbildung in vielen verschiedenen Bereichen mit verhältnismäßig einfachen mathematischen Mitteln,
- führt in die Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik ein und
- bietet ein Spektrum an Teilthemen unterschiedlicher Komplexität, die teils klar umrissen, teils stark individuell ausgestaltet werden können.

## W-Seminar *Rekursive Folgen* • Teilthemen

1. Grundlagen
  - 1.1 Rekursionsprinzip und rekursive Definition
  - 1.2 vollständige Induktion
  - 1.3 einige Summenformeln
2. Rekursionsgleichungen erster Ordnung
  - 2.1 arithmetische und geometrische Rekursion
  - 2.2 Bevölkerungsmodelle
  - 2.3 Sparformen (einmalig, regelmäßig, Wachstumssparen)
  - 2.4 Darlehen (Annuitätendarlehen, Tilgung bei mehreren Darlehen)
  - 2.5 Komplexität von Algorithmen
  - 2.6 Babylonisches Wurzelziehen
  - 2.7 Newton-Iteration zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen
  - 2.8 Diskretisierung von Anfangswertproblemen
3. Rekursionsgleichungen höherer Ordnung
  - 3.1 Lösungstheorie für lineare Rekursionsgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
  - 3.2 Fibonacci-Zahlen mit Anwendungen
  - 3.3 Z-Transformation (mit Einführung in Potenzreihen)
  - 3.4 lineare Rekursionsgleichungen mit polynomialen Koeffizienten



## W-Seminar *Rekursive Folgen* • Arbeitsplan

### 11/1

- Einführung in das Rahmenthema und in die Arbeitsweisen der Mathematik
- Vermittlung fachlicher und methodischer Grundkompetenzen
- Recherchen, Wahl des Seminararbeitsthemas

### 11/2

- Weiterarbeit am Rahmenthema
- Eigenständiges Arbeiten, Beratung
- Zwischenpräsentationen

### 12/1

- Redaktionelle Abfassung der Seminararbeiten (beratet und beleitet)
- Fortführung der Arbeit am Rahmenthema und der Methodenreflexion
- Anfang November: Abgabe der Seminararbeiten
- November bis Januar: Vorbereitung der Abschlusspräsentationen und Abschlusspräsentationen mit Aussprache, Einordnung in das Rahmenthema

W-Seminar *Rekursive Folgen* • Interaktion Schule ↔ Uni

mit dem Seminarleiter

- Abstimmung zu Teilthemen und Schwerpunktsetzung
- Austausch über Literatur
- Abstimmung zu Treffen mit dem Seminar

mit dem gesamten W-Seminar

- Besuch in einer Mathematik-Vorlesung passend zum gerade im W-Seminar behandelten Teilthema
- Workshop mit einem Dozenten in der Schule zur Erarbeitung von Hilfsmitteln (z.B. Potenzreihen, Fixpunktsätze)
- u.U. gemeinsames Seminar mit Bachelor-Studierenden